Beweis des Kirchhoff'schen Satzes im Allgemeinen

Meike Akveld, MNG Rämibühl, 8001 Zürich

Der allgemeine Beweis des Satzes von Kirchhoff verlangt ein wenig Mathematik ausserhalb des Schulcurriculums. Ich möchte ihn aber doch, der Vollständigkeit halber, hier vorführen. Der Beweis ist relativ abstrakt, wird aber nachher im Text illustriert an Hand von einem Beispiel.

Betrachten Sie dieses Mal ein elektrisches Netzwerk als ein Gebilde aus e Ecken und k Kanten. Man definiere nun zwei Vektorräume C_0 und C_1 durch

$$C_0 = \left\{ \sum_i \alpha_i e_i \,\middle|\, \alpha_i \in \mathbb{Z}_2, e_i \text{ eine Ecke} \right\}$$

$$C_1 = \left\{ \sum_i \alpha_i k_i \,\middle|\, \alpha_i \in \mathbb{Z}_2, k_i \text{ eine Kante} \right\}$$

Wir lassen hier nur Koeffizienten in $\mathbb{Z}_2$ zu (damit umgehen wir das Problem der Orientierung). Betrachten Sie die folgende lineare Abbildung – der sogenannte Randoperator – zwischen diesen beiden Vektorräumen

$$\partial : C_1 \to C_0 \tag{1}$$

wobei ∂ genau das macht, was sein Name vermuten lässt: Er ordnet jeder Kante ihren Rand zu (d.h. in unserem Fall ihre zwei Ecken). Also, wenn k_i eine Kante ist, die die Ecken e_{i1} und e_{i2} verbindet, so gilt

$$\partial(k_i) = e_{i1} + e_{i2}$$

Aus der linearen Algebra kennen wir den folgenden Satz über lineare Abbildungen

$$\dim(\ker \partial) + \dim(\operatorname{im} \partial) = \dim C_1 \tag{2}$$

wobei in unserem Fall $\dim C_1$ nichts anderes ist als die Anzahl der Kanten, d.h. k.

Aus der algebraischen Topologie erkennen wir (1) als einen kleinen Kettenkomplex, womit sich schnell die Homologie dieses Komplexes berechnen lässt (vergl. $H_i = \ker \partial / \operatorname{im} \partial$). Insbesondere charakterisiert die erste Homologiegruppe H_0 die Anzahl Komponenten des Komplexes. In unserem Fall ist der Komplex zusammenhängend und damit gilt $H_0 = \mathbb{Z}_2$, gleichzeitig gilt aber auch $H_0 = C_0 / \operatorname{im} \partial$ und daraus folgt

$$1 = \dim H_0 = \dim C_0 - \dim(\operatorname{im} \partial) \tag{3}$$

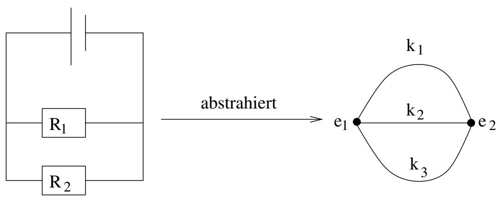
Kombinieren wir jetzt (2) und (3) so sehen wir leicht, dass

$$\begin{aligned}\dim(\ker\partial) &= \dim C_1 - \dim(\operatorname{im}\partial)\\ &= \dim C_1 - (\dim C_0 - \dim H_0)\\ &= k - e + 1\end{aligned}$$

Was ist aber die geometrische Bedeutung von $\ker\partial$? Es sind die Linearkombinationen der Kanten, die durch die Abbildung ∂ auf Null abgebildet werden d.h. es sind die Linearkombinationen der Kanten, die keinen Rand haben. Aber das sind genau unsere Maschen! Und damit ist $\dim(\ker\partial)$ genau die Anzahl der linear unabhängigen Maschen. Der Satz ist bewiesen!

Beispiel

Betrachte das untenstehende Netzwerk und seine abstrahierte Form. Man sieht eigentlich sofort, dass es sich hier um zwei linear unabhängige Maschen handelt.



Schauen wir doch was die Berechnungen uns zeigen. Wir haben nun die folgende Vektorräume

$$C_0 = \{\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 \mid \alpha_i \in \mathbb{Z}_2\}$$

$$C_1 = \{\alpha_1 k_1 + \alpha_2 k_2 + \alpha_3 k_3 \mid \alpha_i \in \mathbb{Z}_2\}$$

und den Operator $\partial : C_1 \to C_0$. Beachte, dass $\dim C_0 = 2$ und $\dim C_1 = 3$ und dass

$$\partial(k_1) = \partial(k_2) = \partial(k_3) = e_1 + e_2$$

und somit gilt $\dim(\operatorname{im}\partial) = 1$ – meistens ist dies nicht so einfach zum ausrechnen. Wir sehen jetzt entweder sofort

$$\dim(\ker\partial) = \dim C_1 - \dim(\operatorname{im}\partial) = 3 - 1 = 2$$

oder mit Hilfe der obenstehenden Formel

$$\dim(\ker\partial) = \dim C_1 - (\dim C_0 - \dim H_0) = k - e + 1 = 3 - 2 + 1 = 2$$

und somit ist dieses Resultat in Übereinstimmung mit unserer Beobachtung.