Zusammengesetzte Funktionen

R. Rose, Biel

Februar 2006

1 Einleitung

Wird nach einem Extremum oder einem Wendepunkt einer Funktion gefragt, so besteht die erste Reaktion darin, die erste bzw. die zweite Ableitung gleich Null zu setzen. Das ist durchaus begreiflich, weil dieses Vorgehen in den allermeisten Fällen erfolgreich ist.
Dabei sollte aber nicht vergessen werden, dass das Verschwinden der ersten, bzw. zweiten Ableitung kein Kriterium für ein Extremum, bzw. Wendepunkt ist. Wesentlich für ein Extremum oder einen Wendepunkt ist allein der Vorzeichenwechsel der ersten bzw. der zweiten Ableitung. Es sei nicht bestritten, dass bei den gebräuchlichen Funktionen dieser Vorzeichenwechsel fast immer über Null erfolgt. Ein Vorzeichenwechsel kann aber auch eintreten, wenn an der besagten Stelle die erste, bzw. die zweite Ableitung nicht definiert ist.
Leider wird dies in den Lehrbüchern selten erwähnt, und es mangelt auch an geeigneten, elementaren Beispielen wie $x \mapsto \sqrt[3]{x^2}$ dafür. Es handelt sich somit darum, einfache Funktionen zu finden, bei denen ein Extremum, bzw. ein Wendepunkt mit Vorzeichenwechsel der ersten bzw. zweiten Ableitung über einer Definitionslücke vorliegt, die Funktion selbst an dieser Stelle aber definiert und stetig bleibt. Verwunderlich ist in diesem Zusammenhang, dass ein Extremum gleichzeitig Wendepunkt sein kann, was z.B. bei der Funktion $x \mapsto (x+2)|x|$ im Nullpunkt der Fall ist.
Um Funktionen zu finden, die ungewohnte Eigenschaften aufweisen, sollte Gebrauch von der Betrags- bzw. Signumfunktion gemacht werden, wie dies im folgenden Beispiel der Fall ist. Den Graph einer Funktion, die Betrags- bzw. Signumzeichen enthält, können Computer und anspruchsvolle Taschenrechner mühelos zeichnen. Will man aber solch eine Funktion ohne die genannten Hilfsmittel graphisch darstellen, so ist es vorteilhaft, die Funktion in Teilfunktionen für bestimmte Teilintervalle zu zerlegen - was keine Schwierigkeiten bereitet. So setzt sich z.B. die Funktion

$$f(x) = |x| + x + 8 + (|x| - x - 24) \cdot sign(x + 12)$$

aus folgenden Einzelfunktionen zusammen:

$$\begin{array}{lll} f_1(x) = 2x + 32 & \text{für} & x \le -12 \\ f_2(x) = -2x - 16 & \text{für} & -12 \le x \le 0 \\ f_3(x) = 2x - 16 & \text{für} & x \ge 0 \end{array}$$

Wie ist aber vorzugehen, um aus den Einzelfunktionen wieder eine Gesamtfunktion aufzustellen?

2 Zusammenfügen von Einzelfunktionen

2.1 Zusammenfügen zweier Einzelfunktionen

Wenn $f(x) = f_1(x)$ für $x \le x_1$ und $f(x) = f_2(x)$ für $x \ge x_1$, aber beide in $\mathbb{R}$ definiert sind, so gilt:

$$f(x) = \frac{f_1(x) + f_2(x)}{2} + \frac{f_2(x) - f_1(x)}{2} \cdot \frac{|x - x_1|}{x - x_1}$$

Sind beide Teilfunktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ Polynome und soll $f(x_1) = f_1(x_1) = f_2(x_1)$ gelten, so kann in der Formel für $f(x)$ die Unbestimmtheit bei $x = x_1$ durch Kürzen behoben werden.

$\frac{|x-x_1|}{x-x_1}$ kann aber auch durch $sign(x-x_1)$ ersetzt werden. Ist zumindest eine der beiden Teilfunktionen kein Polynom und soll $f(x_1) = f_1(x_1) = f_2(x_1)$ oder $f(x_1) = \frac{f_1(x_1)+f_2(x_1)}{2}$ gelten, so muss $\frac{|x-x_1|}{x-x_1}$ unbedingt durch $sign(x-x_1)$ ersetzt werden.

2.2 Zusammenfügen mehrerer Einzelfunktionen

Wenn $f(x) = f_1(x)$ für $x \leq x_1$, $f(x) = f_2(x)$ für $x_1 \leq x \leq x_2$, $f(x) = f_3(x)$ für $x_2 \leq x \leq x_3$ usw. , so kann man aus $f_1(x)$ und $f_2(x)$ zuerst eine vorläufige Gesamtfunktion $f_{12}(x)$ für $x < x_2$ bilden und sodann aus $f_{12}(x)$ und $f_3(x)$ auf die gleiche Art eine nächste Gesamtfunktion $f_{123}(x)$ erzeugen usw. Liegen nur drei Einzelfunktionen vor, so muss $\frac{|x-x_2|}{x-x_2}$ durch $sign(x-x_2)$ ersetzt werden, weil die Unbestimmtheit von $f(x)$ bei $x = x_2$ andernfalls nicht behoben werden kann. Man kann auch $f_1(x)$ mit $f_{23}(x)$ kombinieren, muss dann aber $\frac{|x-x_1|}{x-x_1}$ durch $sign(x-x_1)$ ersetzen, wenn $f(x)$ bei $x = x_1$ definiert und stetig bleiben soll. Wenn die $f_i(x)$ für alle x definiert sind, so ist es aber am einfachsten, $f_{12}(x)$ für $x \leq x_2$ und $f_{23}(x)$ für $x \geq x_1$ zu bilden und anschliessend die Formel $f(x) = f_{12}(x) + f_{23}(x) - f_2(x)$ zu benutzen. Das hat den Vorteil, bei ausschliesslich Polynomen $\frac{|x-x_1|}{x-x_1}$ und $\frac{|x-x_2|}{x-x_2}$ beibehalten zu können.

Da es schon bei drei Einzelfunktionen drei verschiedene Zusammensetzungsmöglichkeiten gibt mit je 4 Varianten bezüglich des Gebrauchs von "Betrag" und "sign", erhält man 12 verschiedene Funktionsvorschriften für die Gesamtfunktion bei ganzen Teilfunktionen. Vier dieser Funktionsvorschriften sind aber oft unvorteilhaft, wenn $f(x)$ überall definiert und stetig sein soll.

Der Gebrauch der Betragfunktion ist praktisch, wenn man anschliessend kürzen kann; anderfalls ist auf "sign" zurückzugreifen.

Am Beispiel aus der Einführung sei gezeigt, dass nur drei der Zusammensetzungsmethoden empfehlenswert sind:

$f_1(x) = 2x + 32$ für $x \leq -12$, $\quad f_2(x) = -2x - 16$ für $-12 \leq x \leq 0$, $\quad f_3(x) = 2x - 16$ für $x \geq 0$.

$f_{12}(x) = 8 - (2x - 24)\frac{|x+12|}{x+12} = 8 - 2|x + 12|$ für $x \leq 0$

$f_{23}(x) = -16 + 2x\frac{|x|}{x} = -16 + 2|x|$ für $x \geq -12$

Daraus ergeben sich die Zusammensetzungsmöglichkeiten:

a) $f_a(x) = \frac{f_{12}(x)+f_3(x)}{2} + \frac{f_3(x)-f_{12}(x)}{2} \cdot sign(x)$
$f_a(x) = x - 4 - |x + 12| + (x - 12 + |x + 12|) \cdot sign(x)$

b) $f_b(x) = \frac{f_1(x)+f_{23}(x)}{2} + \frac{f_{23}(x)-f_1(x)}{2} \cdot sign(x + 12)$
$f_b(x) = x + 8 + |x| + (|x| - x - 24) \cdot sign(x + 12)$

c) $f_c(x) = f_{12}(x) + f_{23}(x) - f_2(x)$
$f_c(c) = 8 - 2|x + 12| - 16 + 2|x| + 2x + 16 = 2(x + |x| - |x + 12| + 4)$
Diese Funktionsvorschrift scheint im vorliegenden Fall am günstigsten zu sein.

Dass alle drei Vorschriften $f_a(x)$, $f_b(x)$ und $f_c(x)$ Ausdrücke derselben Funktion sind, ist auf den ersten Blick nicht zu erkennen.

3 Weitere Beispiele

Die folgenden Funktionen enthalten ausser der gemeinsamen Teilfunktion $f_1(x) = 2x + 32$ eine Auswahl wichtiger elementarer Funktionen. Sie haben zusammen mit dem in der Einleitung betrachteten Beispiel die gemeinsame Eigenschaft, zuerst zum Maximum (-12;8) zu steigen, dann zum Minimum (0;-16) zu fallen und schliesslich anfangs wieder zu steigen. Sie zeigen die Vielfalt der Varianten bei der Zusammensetzung von Teilfunktionen zu einer Gesamtfunktion.

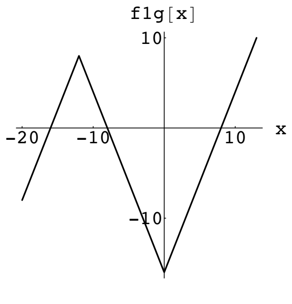
$f_{1g}(x) = x + 8 + |x| + (|x| - x - 24) \cdot sign(x + 12)$

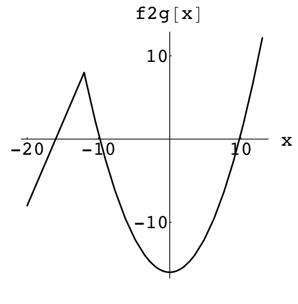
$f_{2g}(x) = \frac{x^2}{12} + x + 8 + (\frac{x^2}{12} - x - 24) \cdot sign(x + 12)$

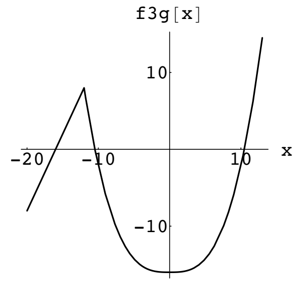
$f_{3g}(x) = \frac{|x|^3}{144} + x + 8 + (\frac{|x|^3}{144} - x - 24) \cdot sign(x + 12)$

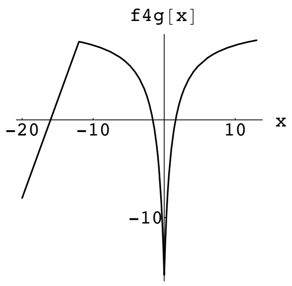
$f_{4g}(x) = \frac{13|x|}{|x|+1} + x + 8 + (\frac{13|x|}{|x|+1} - x - 24) \cdot sign(x + 12)$

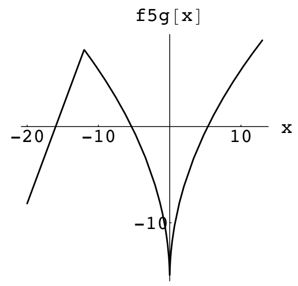
$f_{5g}(x) = \sqrt{12|x|} + x + 8 + (\sqrt{12|x|} - x - 24) \cdot sign(x + 12)$
$f_{6g}(x) = (x + 32 - 24 \cdot cos(\frac{\pi x}{36})) - (x + 24 \cdot cos(\frac{\pi x}{36})) \cdot sign(x + 12)$
$f_{7g}(x) = 12 \cdot ln(\frac{(e-1)|x|}{12} + 1) + x + 8 + (12 \cdot ln(\frac{(e-1)|x|}{12} + 1) - x - 24) \cdot sign(x + 12)$

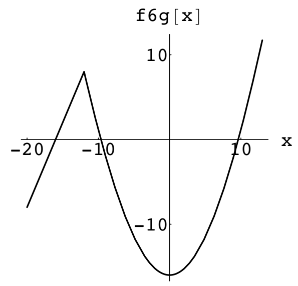


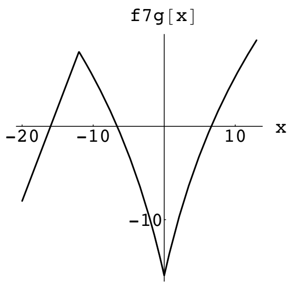












Der Leserin und dem Leser sei es überlassen, die Funktionen f_{2g} bis f_{7g} in Einzelfunktionen zu zerlegen und diese anschliessend auf die am Beispiel $f(x) = f_{1g}(x)$ gezeigten Weise auf verschiedene Arten wieder zu einer Gesamtfunktion zusammenzusetzen.