

Notes de lecture : Groupes et ethnologie

Paul Jolissaint

Les présentes notes sont extraites de *L'algèbre après Galois*, par Norbert Verdier dans la collection *Les génies de la science, Pour la Science*, février 2003 - mai 2003, pages 77 à 85.

Un peu avant les années 1950, l'ethnologue Claude Lévy-Strauss étudiait le concept de famille dans diverses civilisations et notamment, aidé du mathématicien André Weil, il dégagait le concept de *structure élémentaire de parenté*, basé sur la notion de groupe.

C. Lévy-Strauss étudiait en particulier une société primitive australienne, la société **Karieka**. Elle est formée de quatre clans : les **Banaka**, les **Karimera**, les **Burung** et les **Palyeri**. Après avoir exposé ses travaux à A. Weil, celui-ci découvrit que la théorie des groupes décrit parfaitement les mœurs des Karieka.

Afin de faciliter la manipulation de ces divers clans, nous allons les représenter par des lettres: A désignera les Banaka, B les Karimera, C les Burung et D les Palyeri. De plus, nous noterons $S = \{A, B, C, D\}$ l'ensemble des clans chez les Karieka.

Voici maintenant les deux ensembles de règles d'appartenance aux clans que l'ethnologue a décrites dans son ouvrage *Les structures élémentaires de la parenté* (1947) :

- **Règles des mariages :**
 1. A épouse C
 2. B épouse D
- **Règles d'appartenance de la descendance :**
 1. homme A et femme $C \rightarrow$ enfant D
 2. homme C et femme $A \rightarrow$ enfant B
 3. homme B et femme $D \rightarrow$ enfant C
 4. homme D et femme $B \rightarrow$ enfant A

Soit alors f la "fonction conjugale" ; d'après les règles de mariage, c'est la permutation de S donnée par :

$$\begin{array}{c|cccc} X & A & B & C & D \\ \hline f(X) & C & D & A & B \end{array}$$

On constate aisément que f est d'ordre 2 : $f \circ f = \text{Id}_S$. Pour décrire la filiation, on définit deux fonctions sur S ; la première $m : S \rightarrow S$ associe au clan maternel X le clan $m(X)$ de son enfant. Les règles sont résumées par :

$$\begin{array}{c|cccc} X & A & B & C & D \\ \hline m(X) & B & A & D & C \end{array}$$

De même, la seconde $p : S \rightarrow S$ associe au clan paternel Y le clan $p(Y)$ de son enfant. D'après les règles,

$$\begin{array}{c|cccc} X & A & B & C & D \\ \hline p(X) & D & C & B & A \end{array}$$

En fait, on a $m \circ f = p$: en effet, considérons un homme du clan X ; son épouse appartient au clan $f(X)$; par suite, le clan de leurs enfants est $m(f(X))$ mais aussi $p(X)$. D'où l'égalité annoncée.

On vérifie également que $f \circ m = p$: en effet,

$$\begin{array}{c|cccc} X & A & B & C & D \\ \hline m(X) & B & A & D & C \\ \hline f(m(X)) & D & C & B & A \end{array}$$

Enfin, $p \circ p = m \circ m = \text{Id}_S$.

Soit alors $G = \{\text{Id}_S, f, m, p\}$, qui est un sous-groupe des permutations de S , et soit $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{(0,0), (1,0), (0,1), (1,1)\}$ le groupe de Klein. Si $\phi : G \rightarrow \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ envoie Id_S sur $(0,0)$, f sur $(1,0)$, m

sur $(0, 1)$ et p sur $(1, 1)$, on vérifie que ϕ est un isomorphisme. Ainsi, les règles d'appartenance clanique chez les Kariëka possèdent une structure de groupe (en fait, de groupe abélien)!

Conséquences

(1) Le fait que $m(m(X)) = X = p(p(X))$ pour tout X implique que tout enfant appartient au clan de sa grand'mère maternelle, mais également au clan de son grand-père paternel.

(2) On interprète les égalités $f \circ m = m \circ f = p$ ainsi : la fille d'un homme peut épouser le fils de la sœur

de l'homme. En effet, soit X le clan d'un homme (et de sa sœur). Alors $Y = p(X)$ est le clan de la fille de l'homme et $m(X)$ est le clan du fils de la sœur. Comme $f(m(X)) = p(X)$, on a $Y = f(m(X))$, ce qui signifie que la fille de l'homme et le fils de sa sœur appartiennent à des clans dont les membres peuvent se marier.

Lycée cantonal de Porrentruy
Place Blarer-de-Wartensee
2900 Porrentruy
paul.jolissaint@jura.ch