Nochmals Kugelstossen: eine Korrektur

Urs Oswald und Hans Rudolf Schneebeli

Mehrere Kollegen haben uns freundlicherweise darauf aufmerksam gemacht, dass eine Verringerung der Stossweite durch den Luftwiderstand um volle 76 cm (bei Verwendung der Runge-Kutta-Methode) wohl kaum der Realität entsprechen könne (vgl. „Mathematische Modelle zum Kugelstossen“ von Nummer 94). In der Tat hat sich in die Berechnung der Querschnittsfläche A ein Fehler eingeschlichen: Diese Fläche ist viermal zu gross geraten. (Für den Grund dieses Malheurs bieten sich zwei Hypothesen an.) Bei Verwendung des Wertes

$$A = 0.0114\,\mathrm{m}^2$$

anstelle von $0.0456\,\mathrm{m}^2$ sowie der (unveränderten) Werte $c_w = 0.47$, $m = 7.2\,\mathrm{kg}$, $\rho = 1.3\,\mathrm{kg/m}^3$ und $h = 2\,\mathrm{m}$, $v_0 = 15\,\mathrm{m/s}$, $\varepsilon = 45°$ ergibt sich mit der Runge-Kutta-Methode auf dem **voyage 200**:

n	t_n	x_n	y_n
2332	2.332	24.56595	0.008145
2333	2.333	24.57641	−0.004116

Lineare Interpolation ergibt, dass $y = 0$ für $t \approx 2.3327$ bei $x \approx 24.573$ angenommen wird. Dabei wurde für `diftol` die Standardeinstellung 0.001 benützt. (Diesen Toleranzparameter benützt die Runge-Kutta-Methode zur Berechnung der Schrittlänge.) Mit der Euler-Methode ergibt sich, bei genügend kleiner Schrittlänge, derselbe Wert (24.574 bei $\Delta t = 0.0001$). Allerdings ist hier eine Rechenzeit von über zwei Stunden erforderlich, während bei Runge-Kutta eine halbe Minute genügt.

Im Vakuum hat das Problem bei $\varepsilon = 45°$ die exakte Lösung

$$\left\{\begin{array}{lcl} t_e & = & \dfrac{v_0 + \sqrt{v_0^2 + 4gh}}{g\sqrt{2}} \approx 2.3369, \\[2ex] x_e & = & \dfrac{v_0 \cdot t_e}{\sqrt{2}} \approx 24.786. \end{array}\right.$$

Der Luftwiderstand bewirkt somit auf Meereshöhe eine Verkürzung der Stossweite um gut 21 cm und der Flugzeit um etwa vier Tausendstelsekunden.