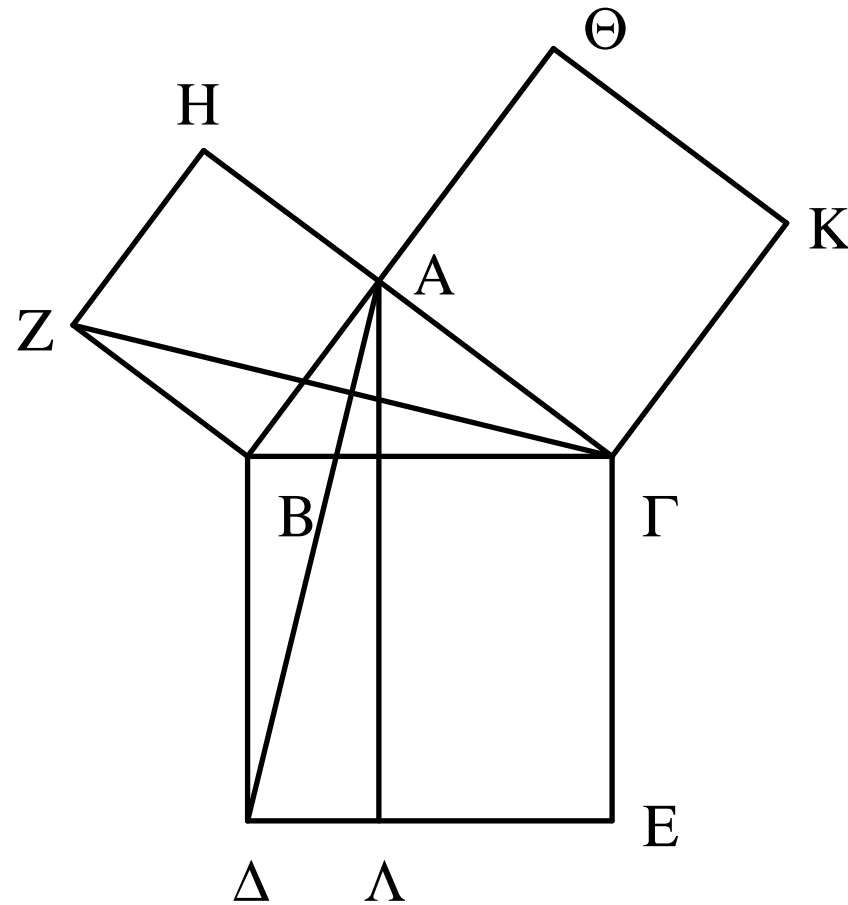


Géométrie classique



(Bellinzona, 26 sept. 2005)

Géométrie classique

“Die Entwicklung der abendländischen Naturwissenschaften beruht auf zwei grossen Leistungen: Der Erfindung des formal logischen Systems (in der euklidischen Geometrie) durch die griechischen Philosophen, und die Entdeckung der Möglichkeit, nach systematischen Experimenten kausale Beziehungen herzustellen.”

(A. Einstein, 1953)

Babylon, 1900 av.J.-C.



Babylon, 1900 av.J.-C.

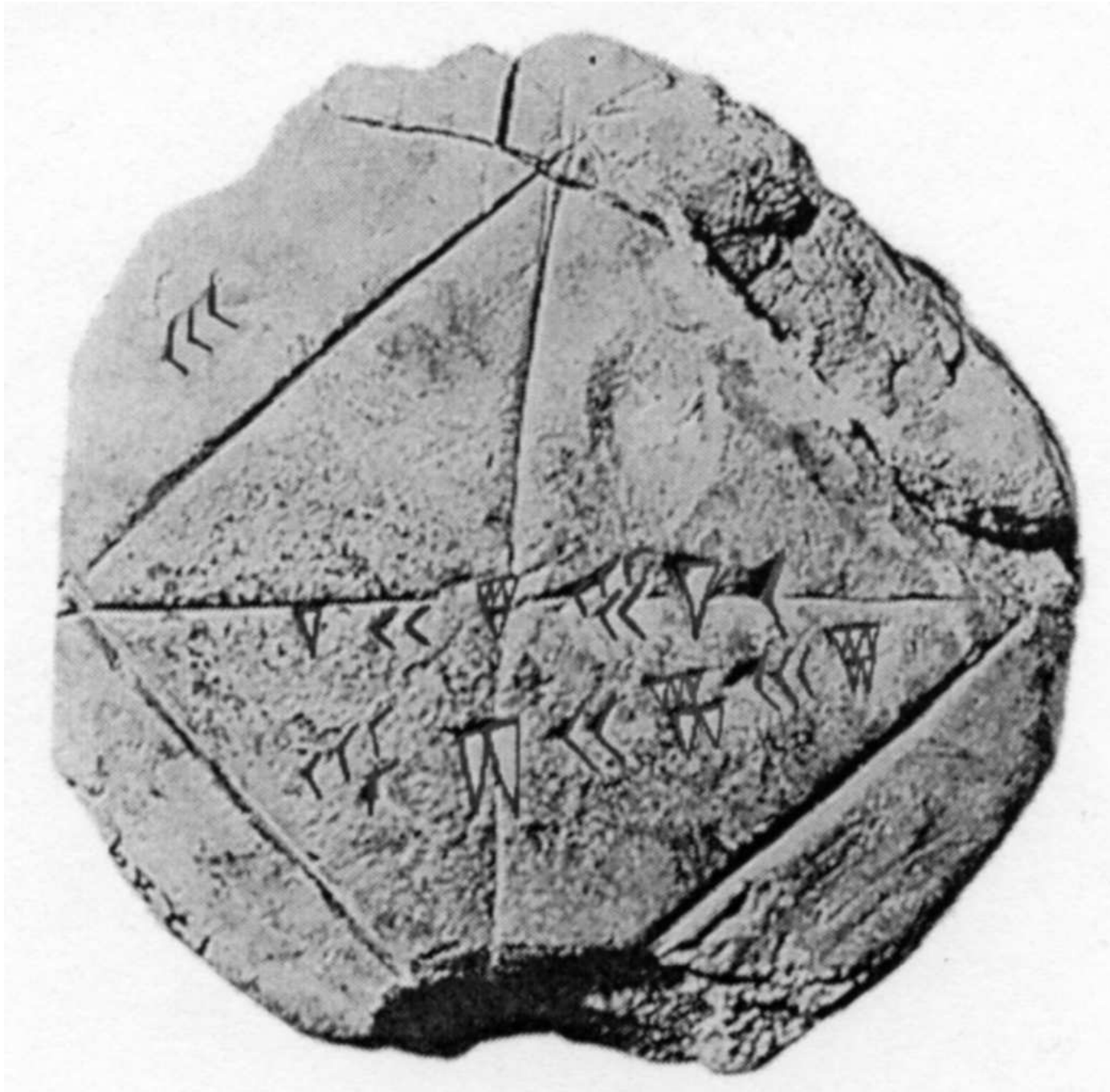


30

1, 24 51 10

42, 25 35

Babylon, 1900 av.J.-C.



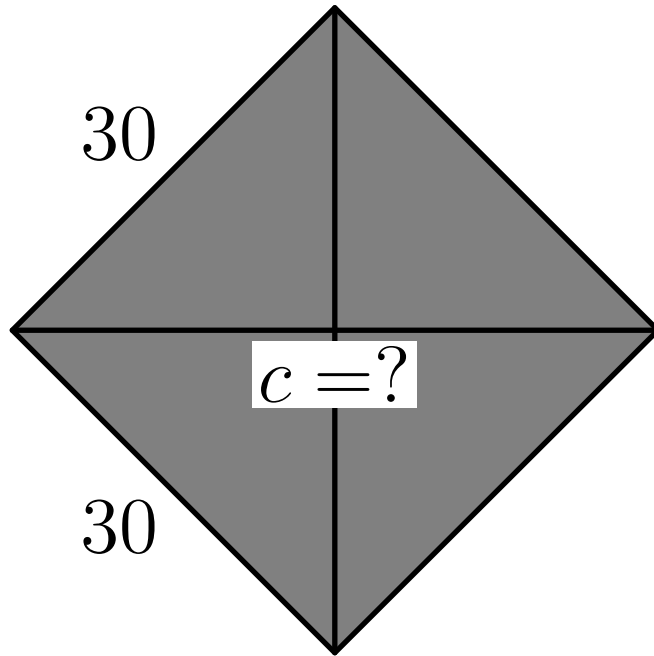
30

1, 24 51 10

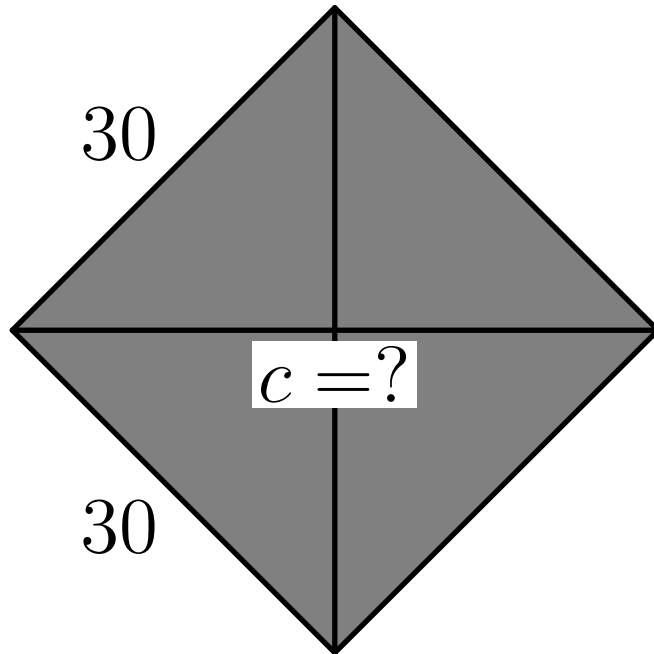
42, 25 35

comprendre ??

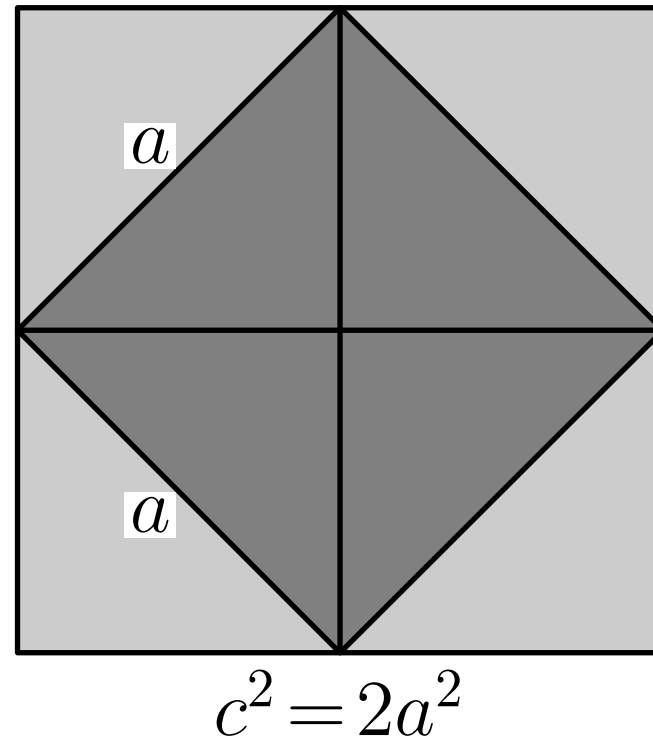
Problème:



Problème:



Solution:



$$\Rightarrow c = a\sqrt{2}$$

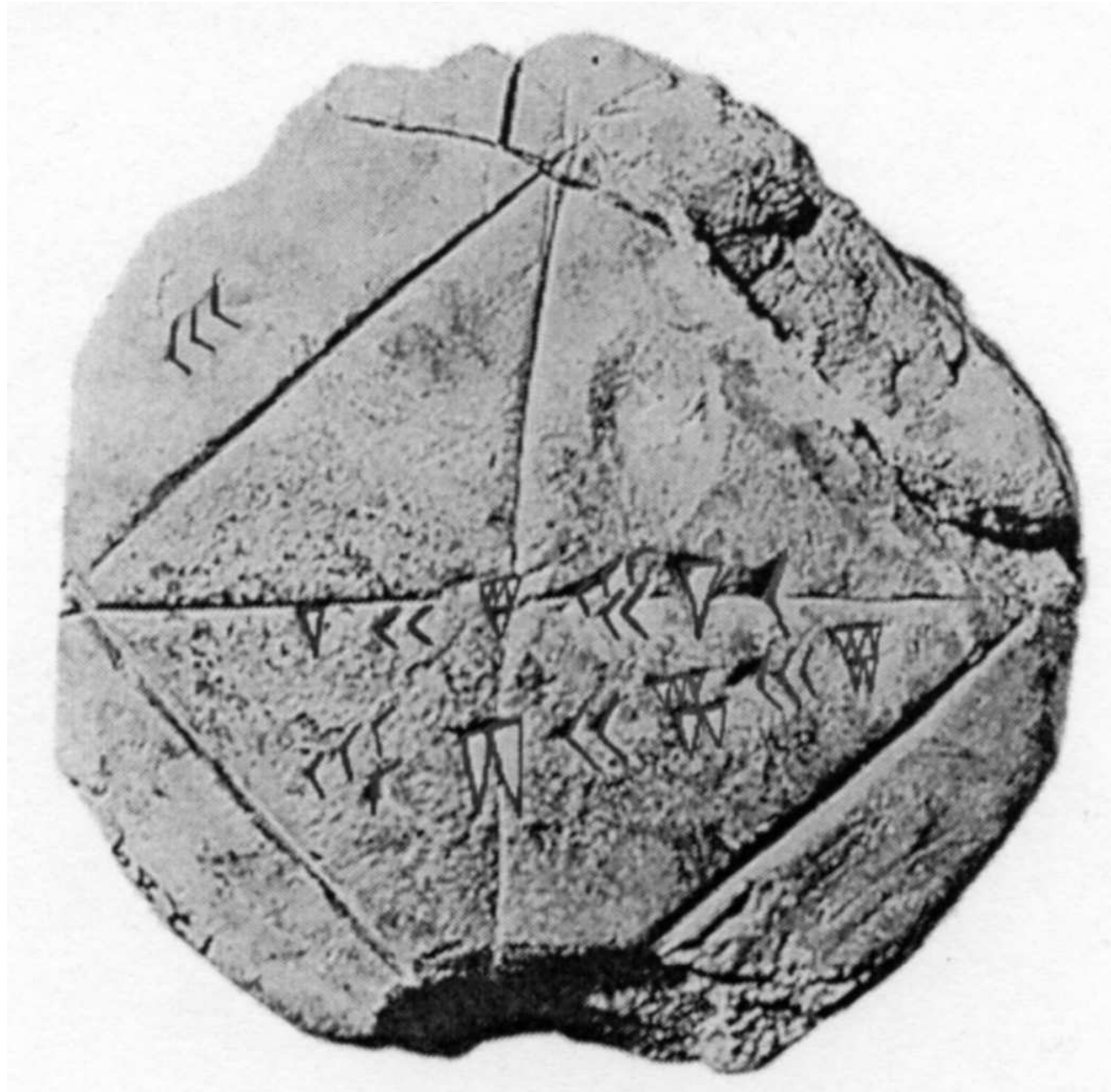
$$\sqrt{2} = 1.4142135623730950488016887242096939\dots$$

$$a = 30 \Rightarrow c = 42.426406871192851464050661726290670\dots$$

Eh bien, en base 60, nous avons les valeurs exactes

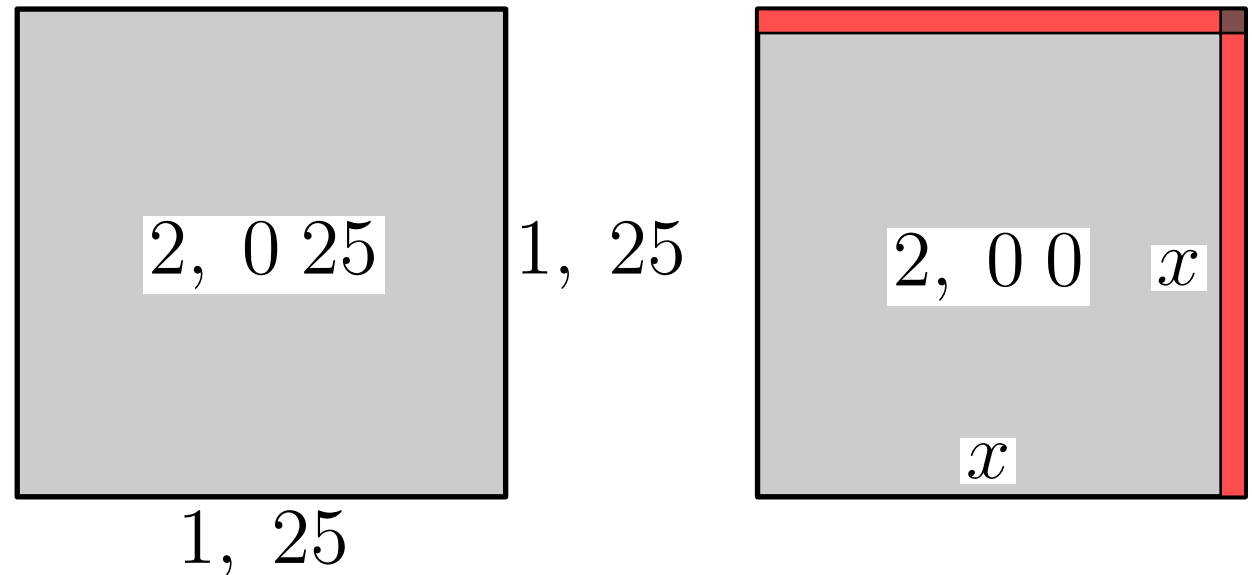
$$\sqrt{2} = 1, 24 51 10 7 46 6 4 \dots$$

$$30 \cdot \sqrt{2} = 42, 25 35 3 53 3 2 \dots$$



Comment les Babyloniens ont trouvé (probablement) cette valeur?

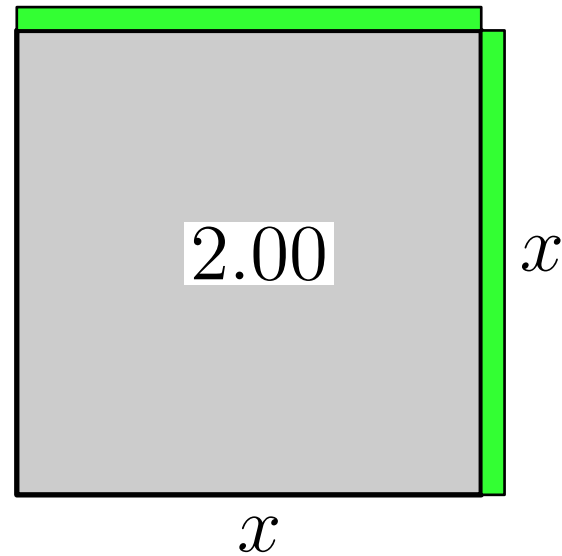
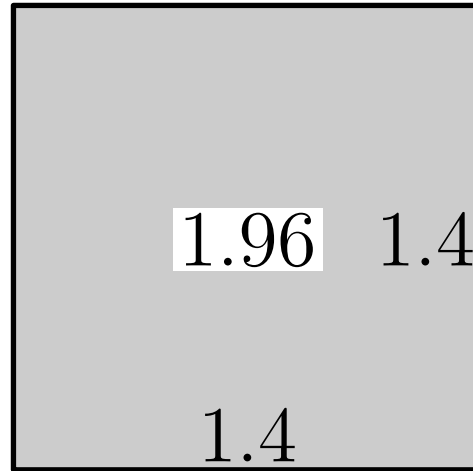
1 22	1 52 4
1 23	1 54 49
1 24	1 57 36
1 25	2 0 25
1 26	2 3 16
1 27	2 6 9
1 28	2 9 4



$$x = 1, 25 - \frac{0, 0 25}{2 \cdot (1, 25)} = 1, 24 51 10\dots$$

la “méthode babylonienne pour calculer la racine”.

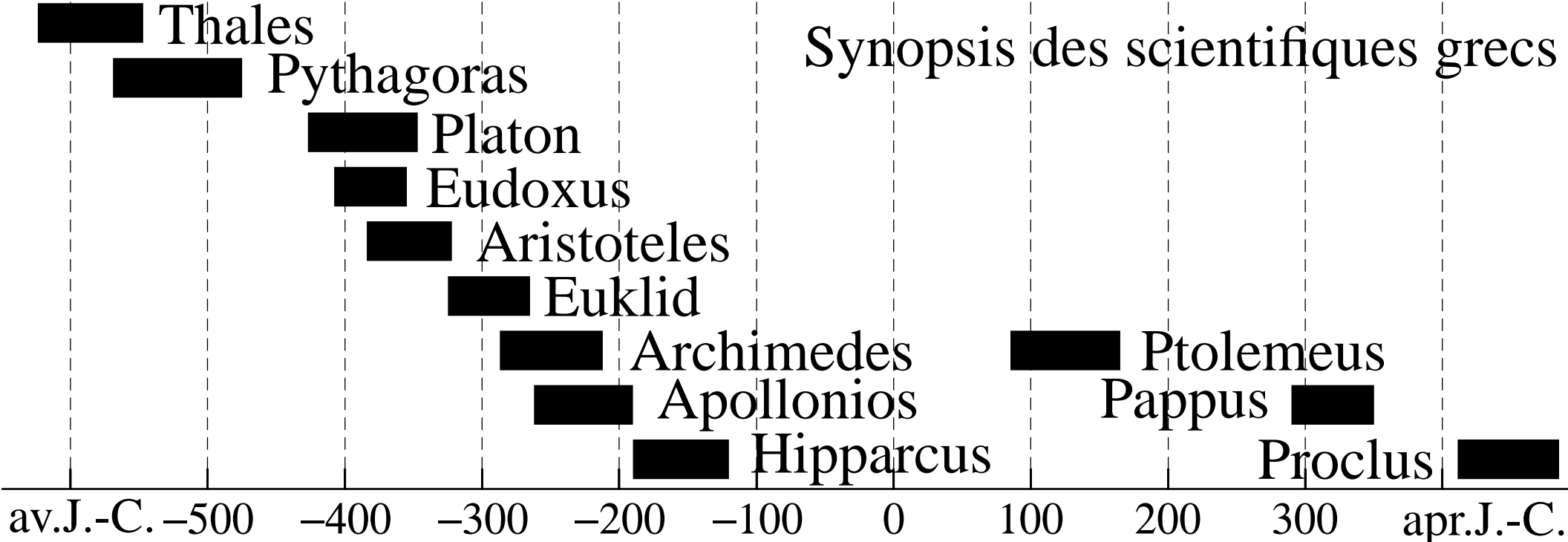
La même chose en base 10:

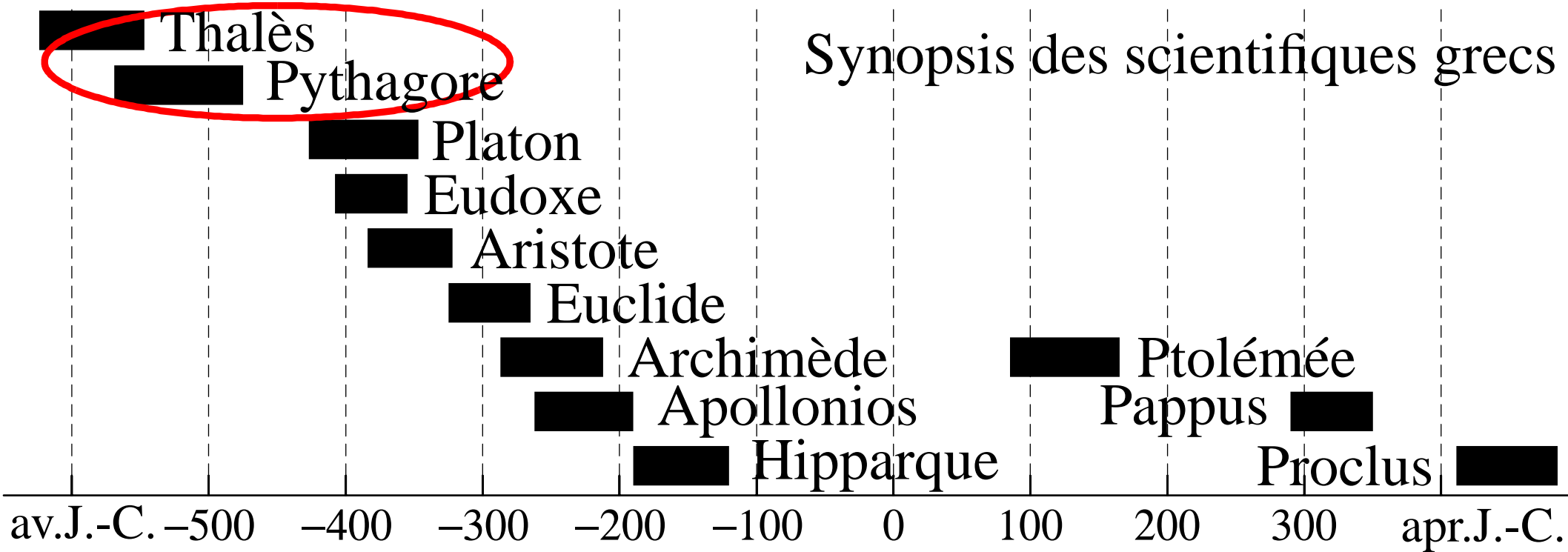


$$x = 1.4 + \frac{0.04}{2 \cdot 1.4} = 1.4 + 0.01428\dots = 1.41428\dots$$

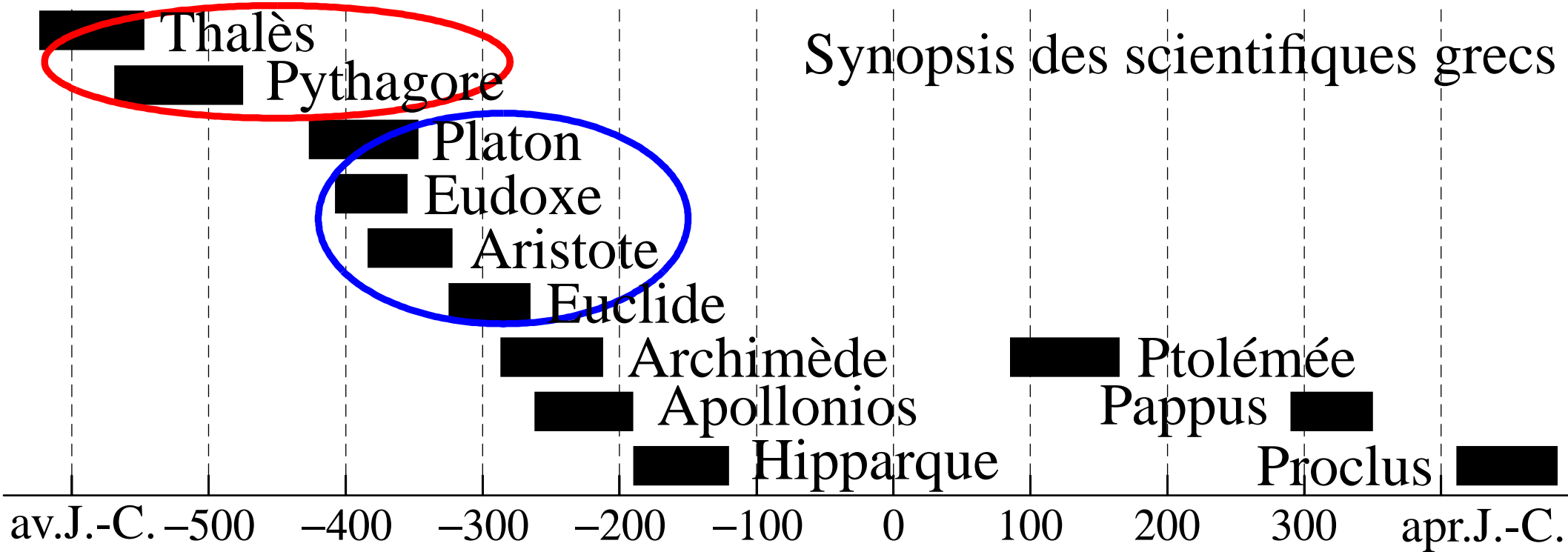
avec 4 décimales correctes.

Synopsis des scientifiques grecs





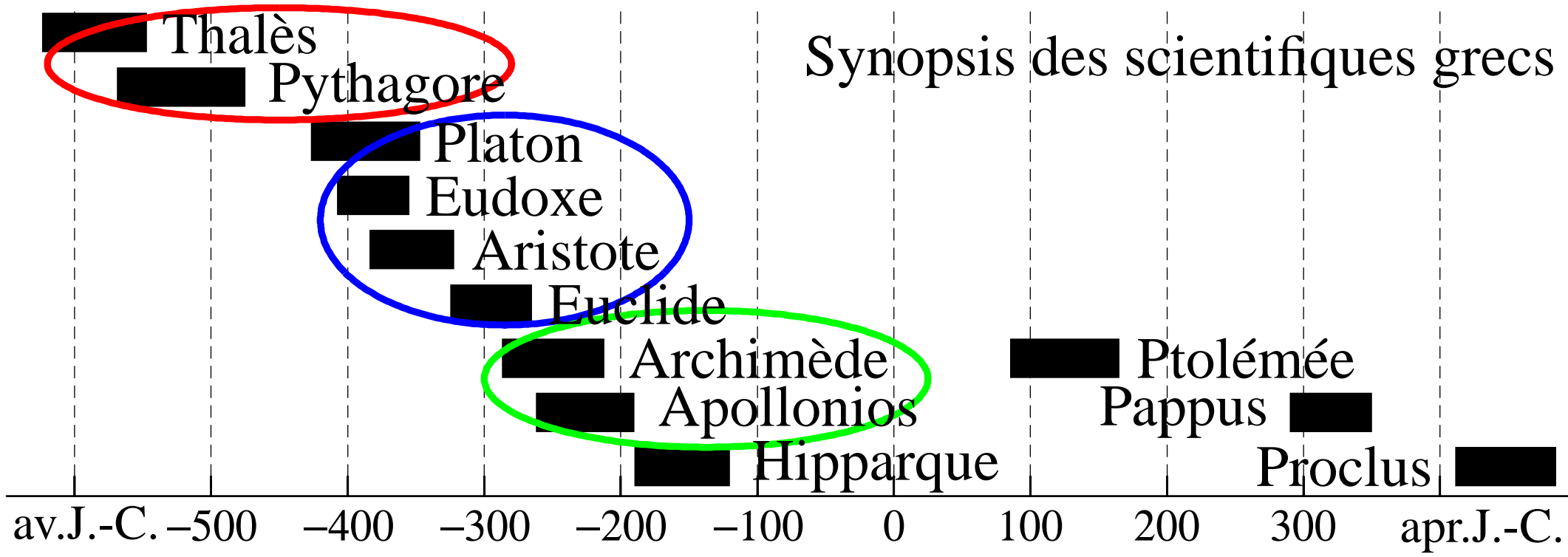
I.1 Thales et Pythagore



I.1 Thales et Pythagore

I.2 Euclide

Synopsis des scientifiques grecs

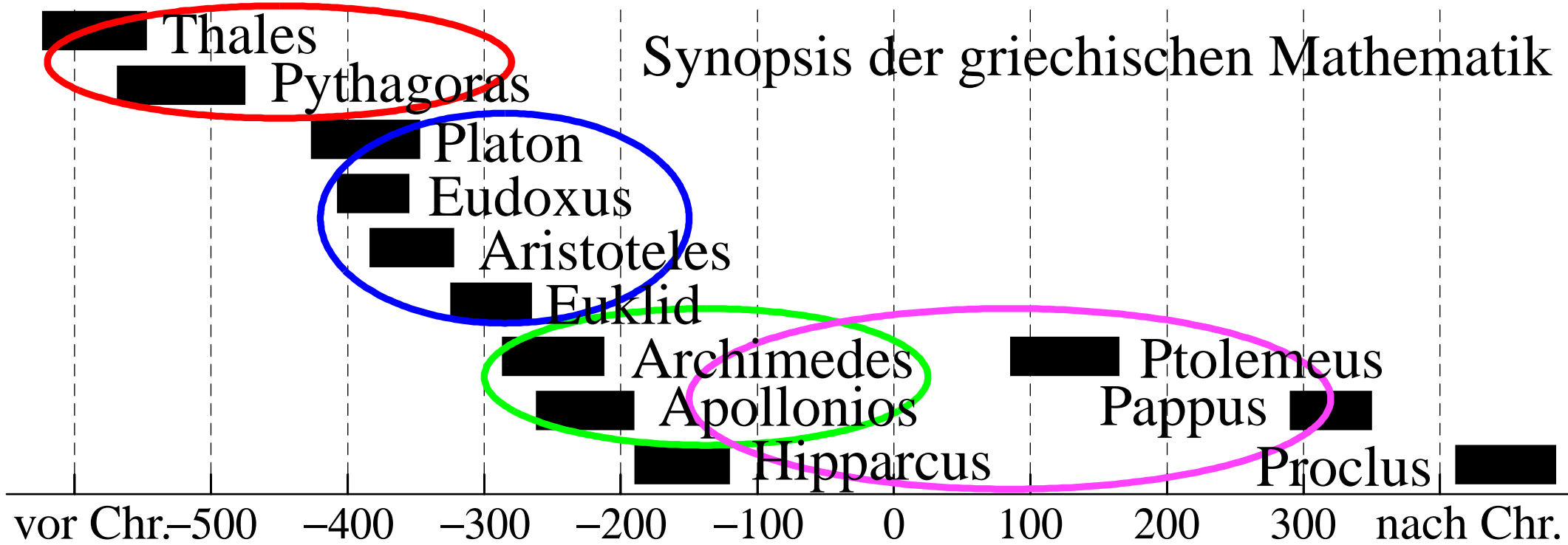


I.1 Thales e Pythagore

I.2 Euclide

I.3 Coniques, Archimède

Synopsis der griechischen Mathematik



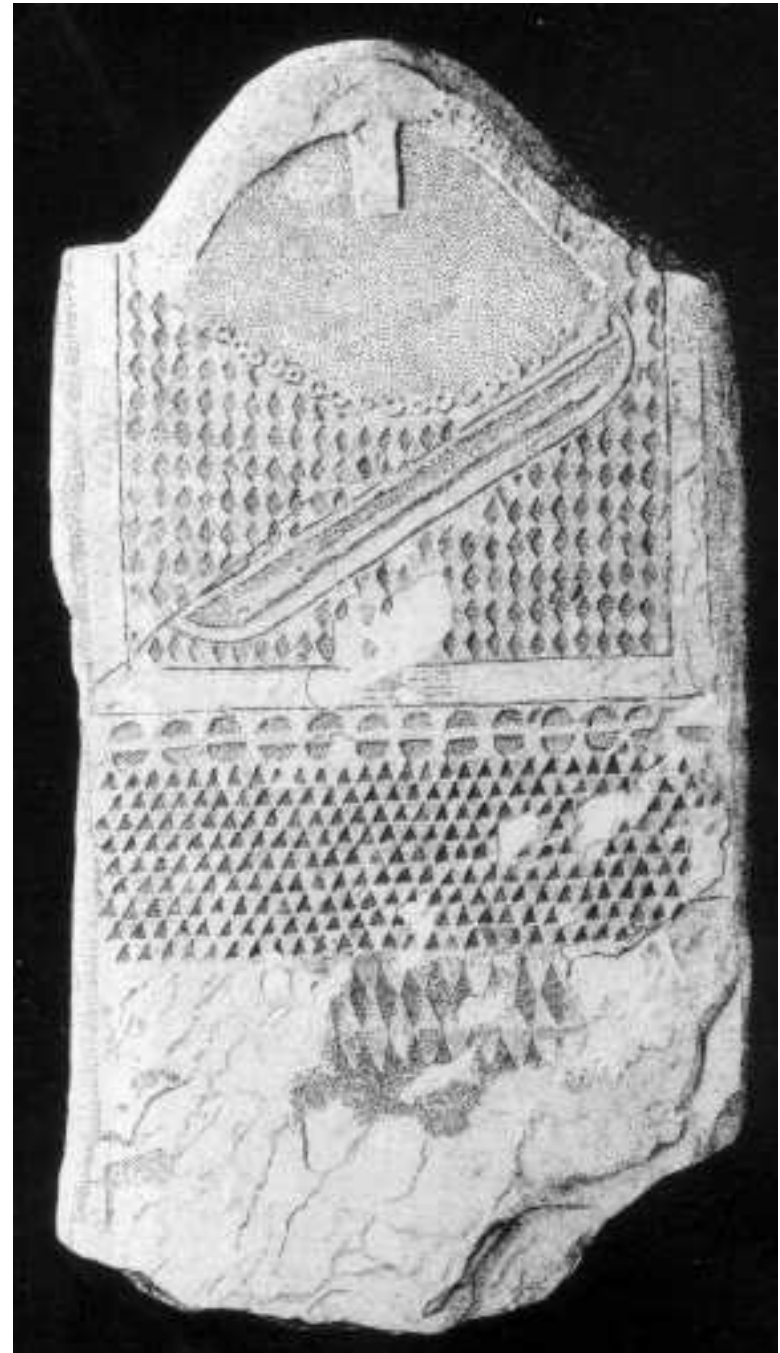
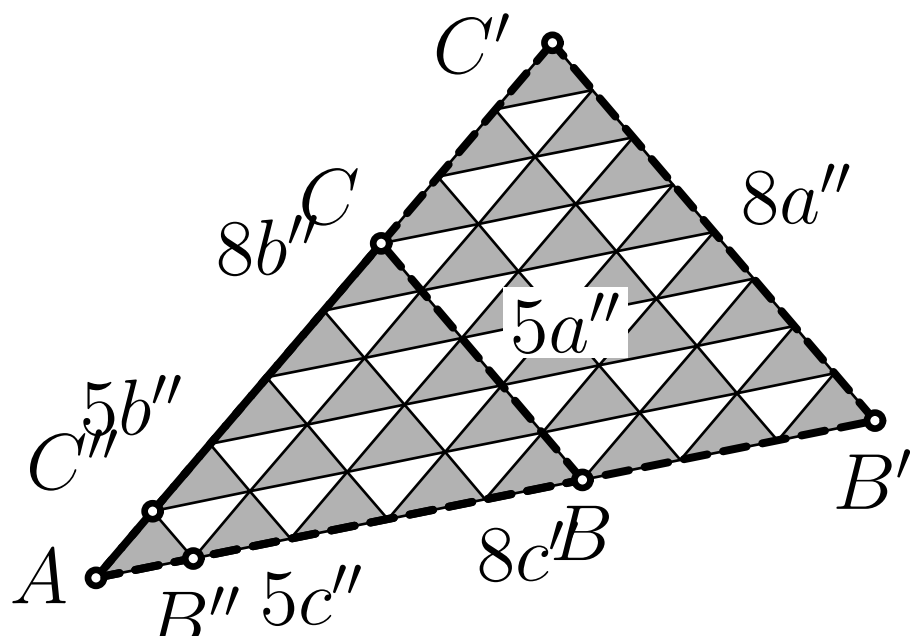
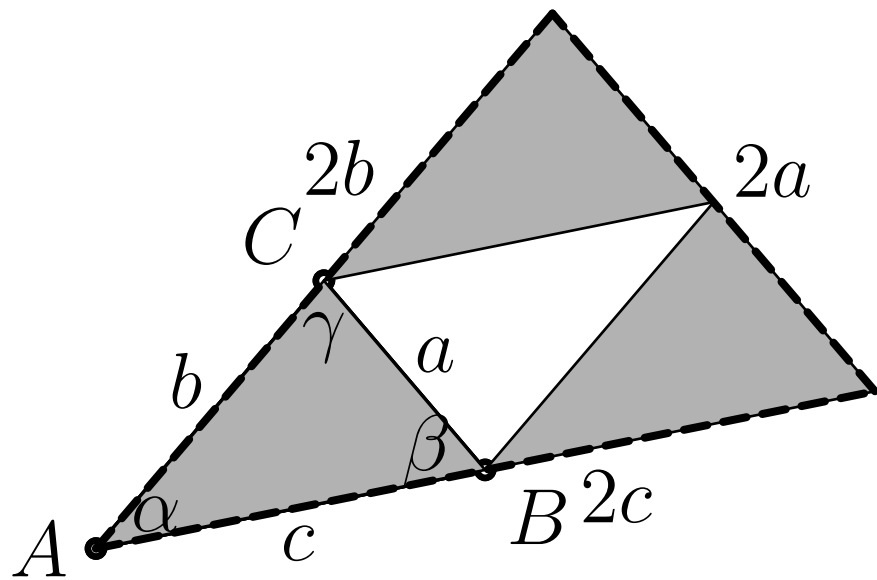
I.1 Thales et Pythagore

I.2 Euclide

I.3 Coniques, Archimède

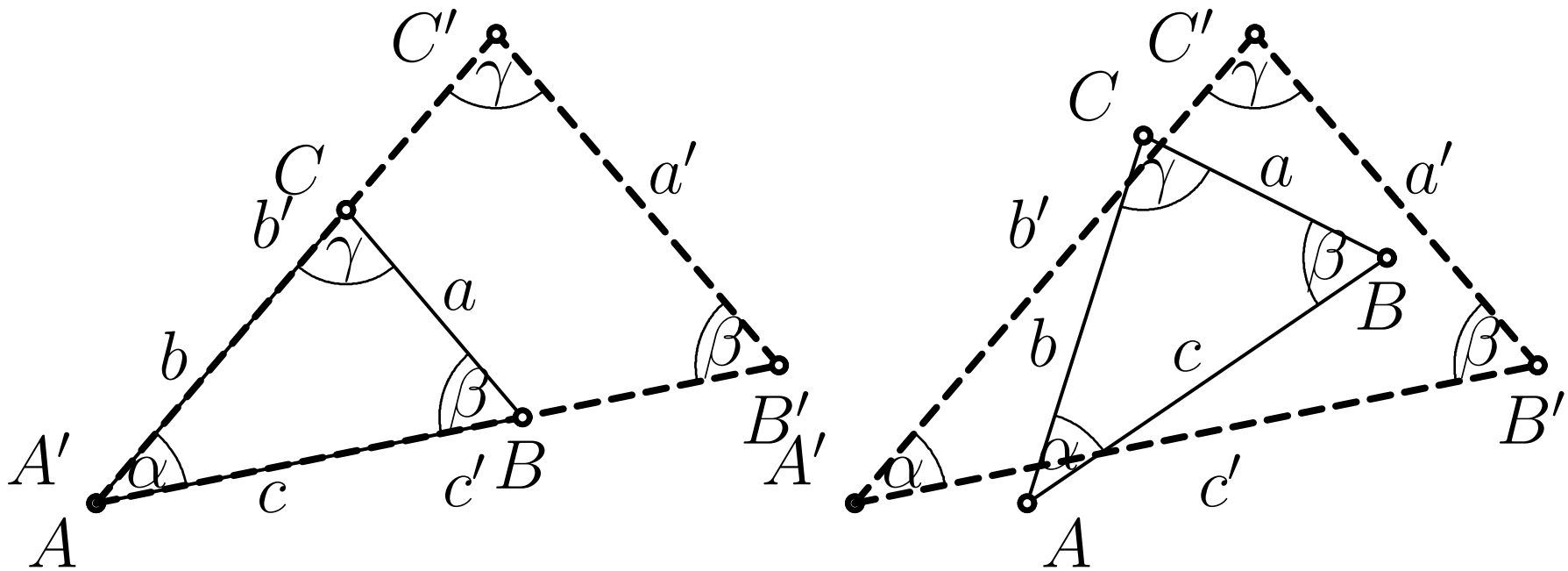
I.4 Trigonométrie

I.1 Thales et Pythagore



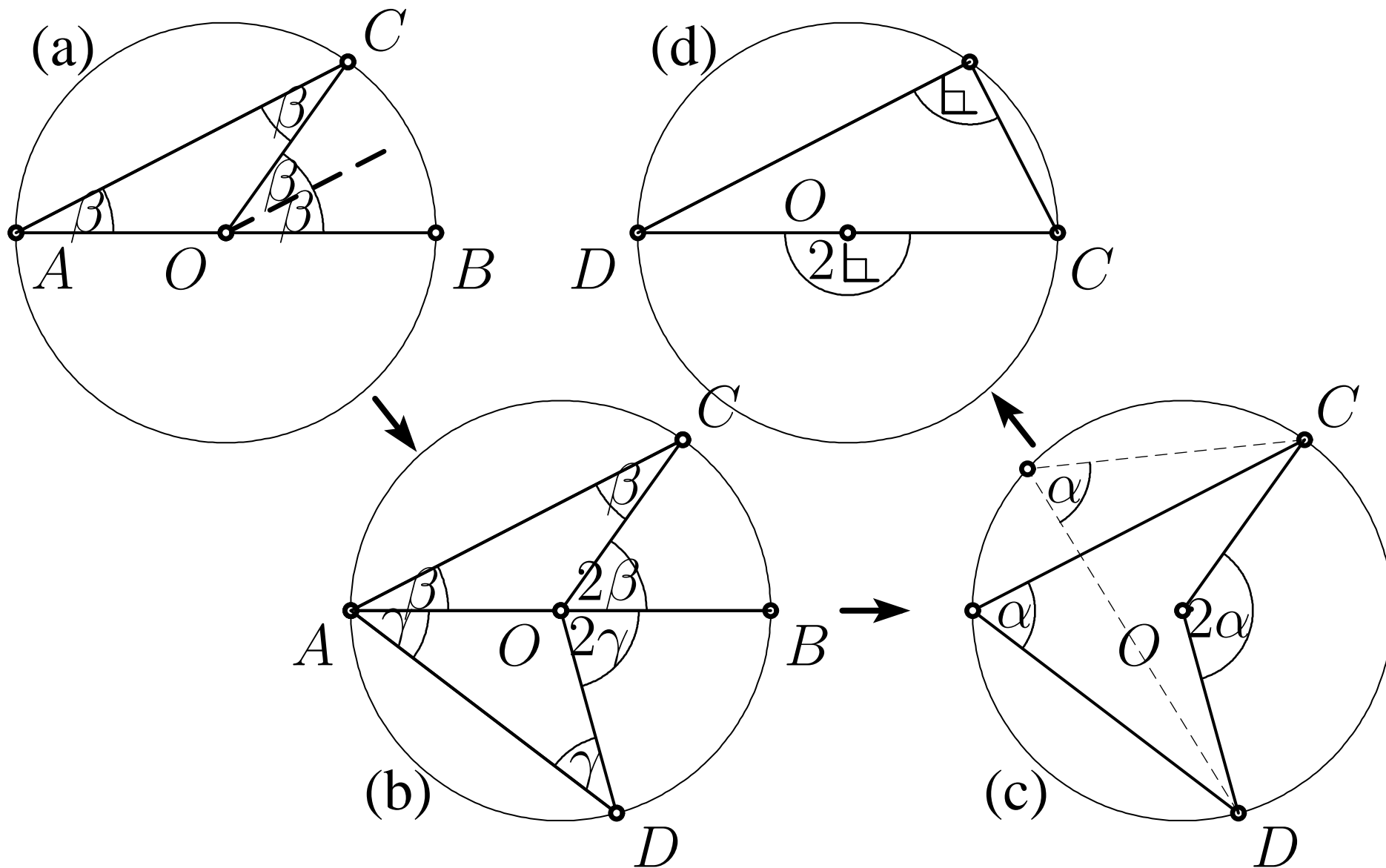
Thales. “... la théorie des lignes proportionnelles et la proposition de Pythagore, qui sont les bases de la Géométrie ...”

(Poncelet 1822, p. xxix)

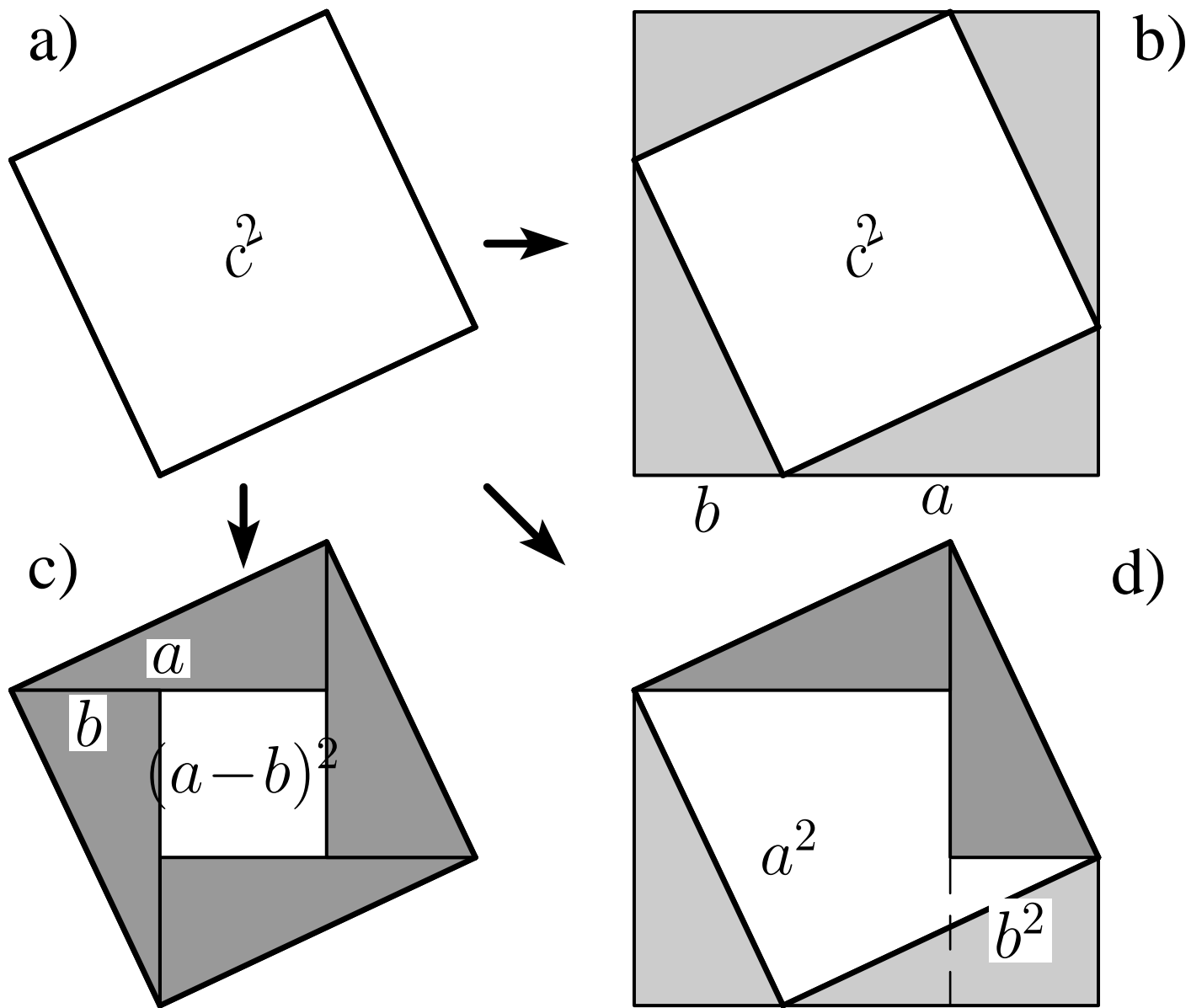


$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} \quad \text{oder} \quad \frac{a'}{c'} = \frac{a}{c}, \quad \frac{c'}{b'} = \frac{c}{b}, \quad \frac{b'}{a'} = \frac{b}{a}.$$

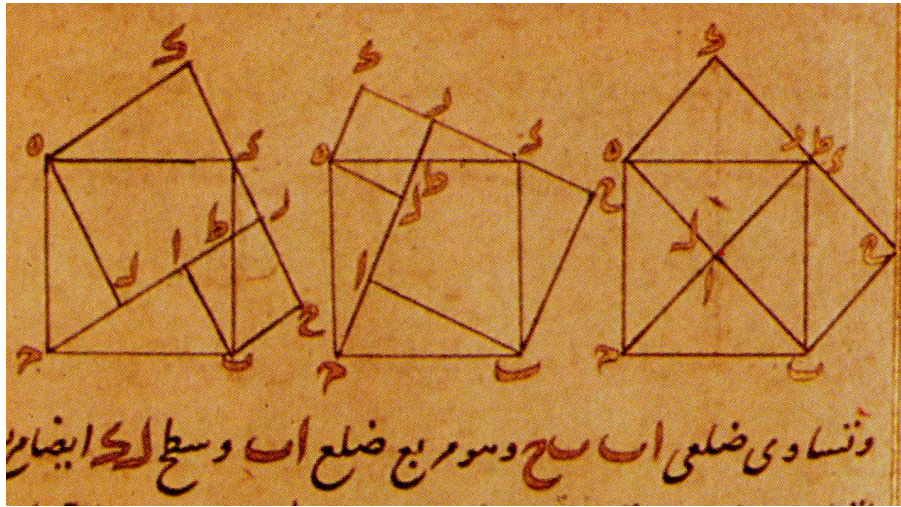
Angle au centre – Angle périphérique.



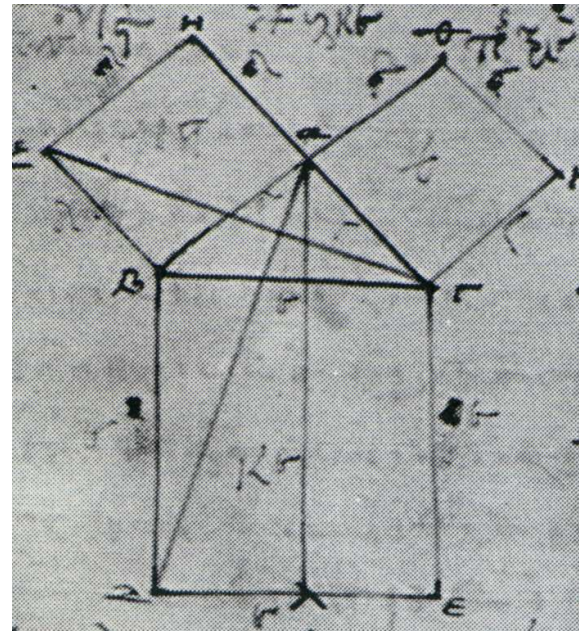
Th. Pythagore.



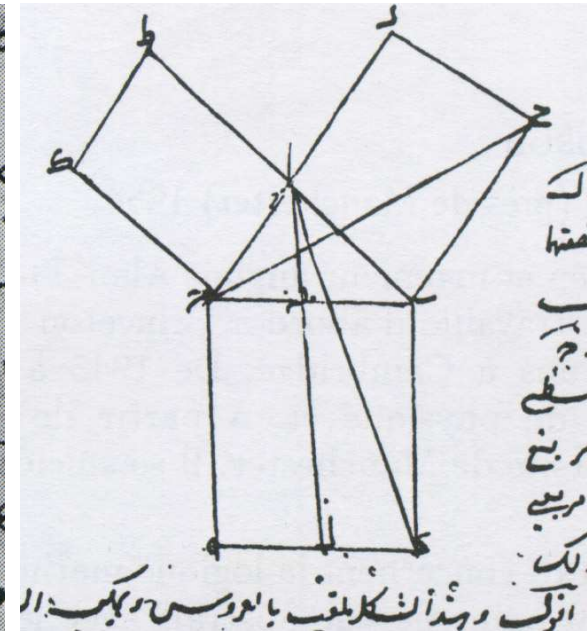
Th. Pythagore.



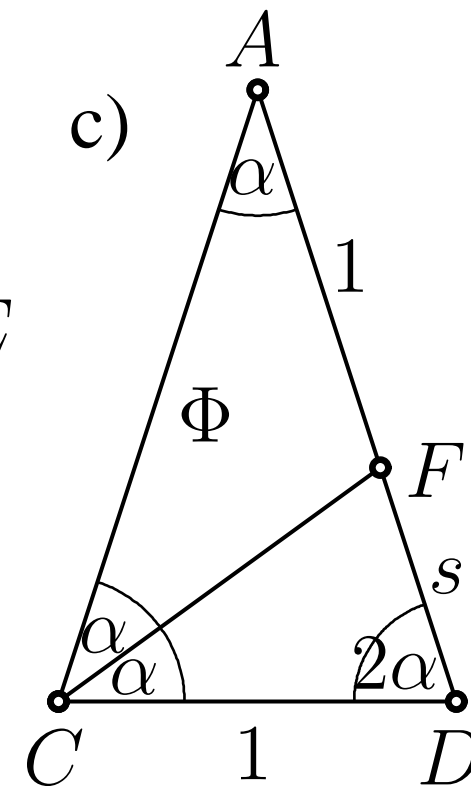
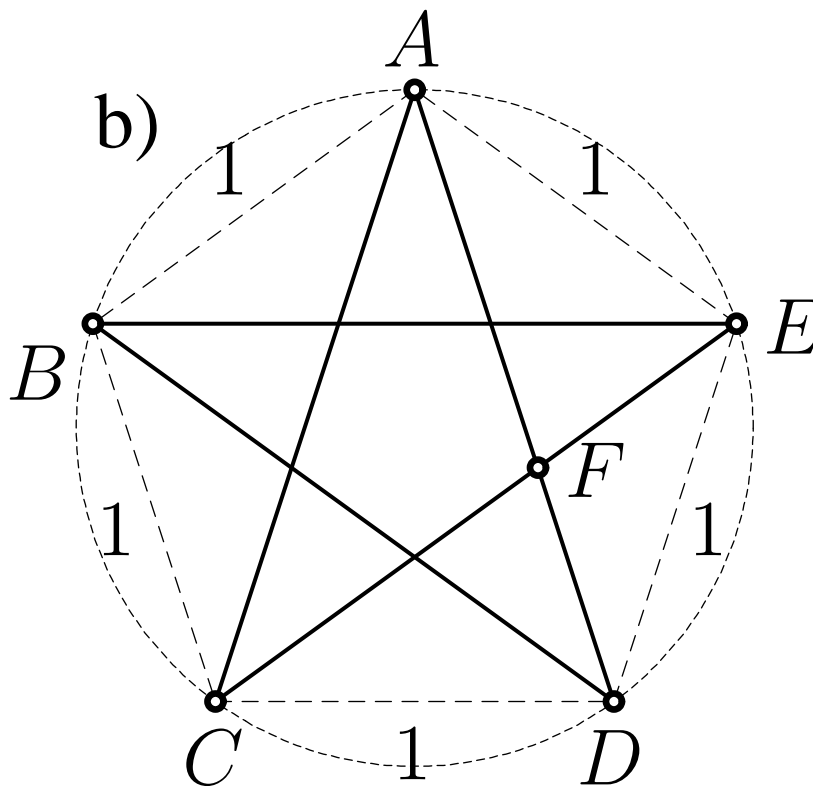
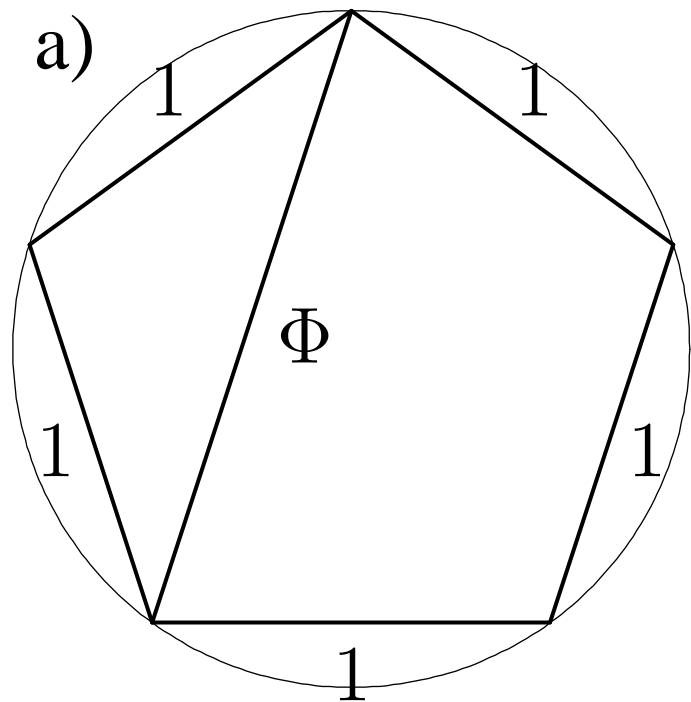
Thābit Ibn Qurra, 870 n. Chr.



Euklid 300 v. Chr.

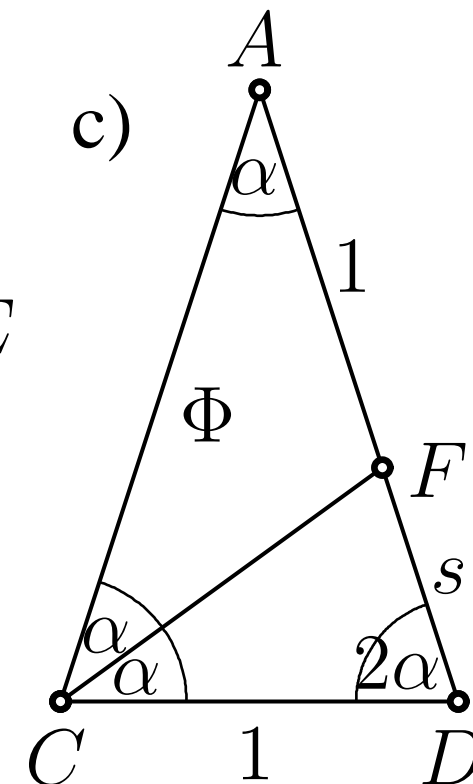
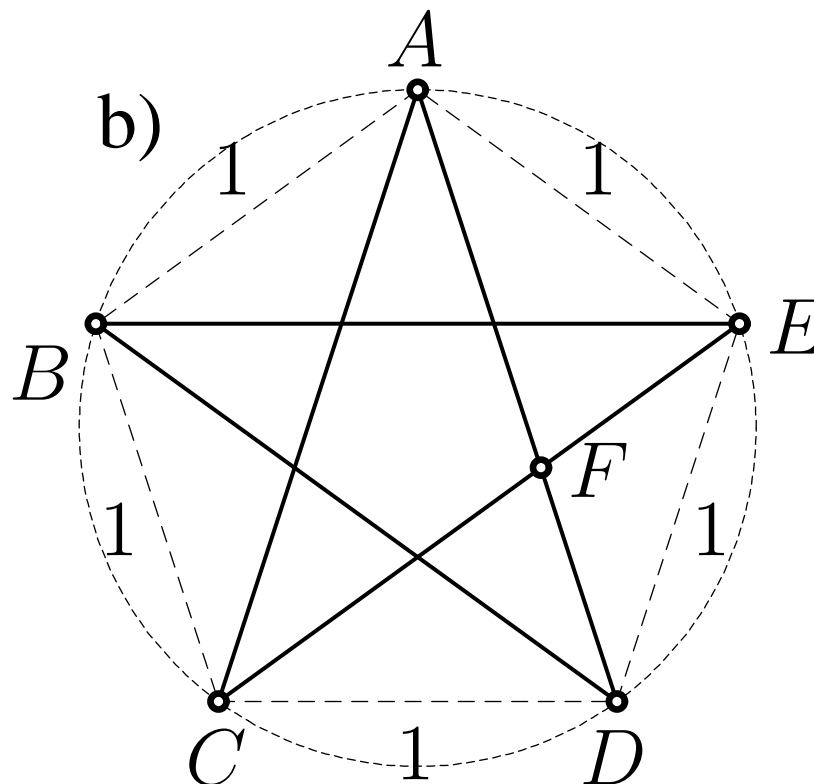
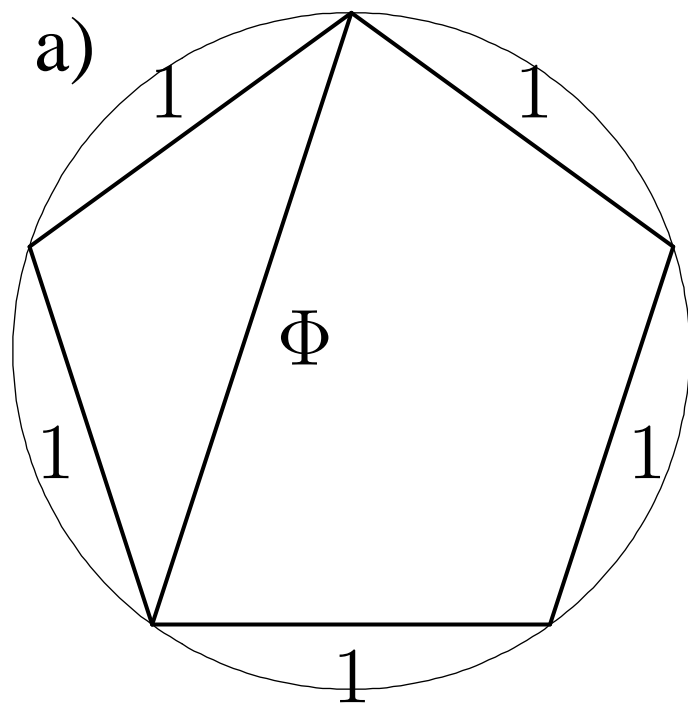


Le pentagone.



$$g = 1 + \frac{1}{g} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Le pentagone.

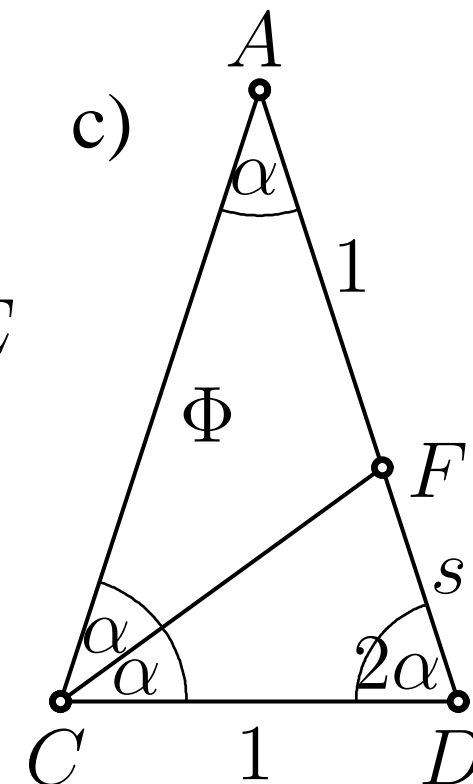
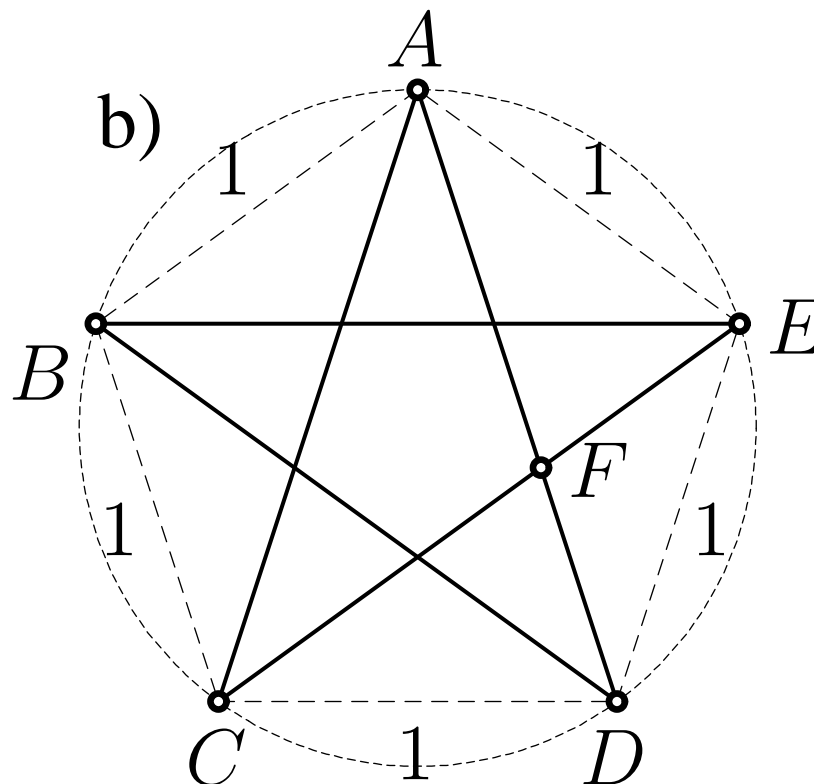
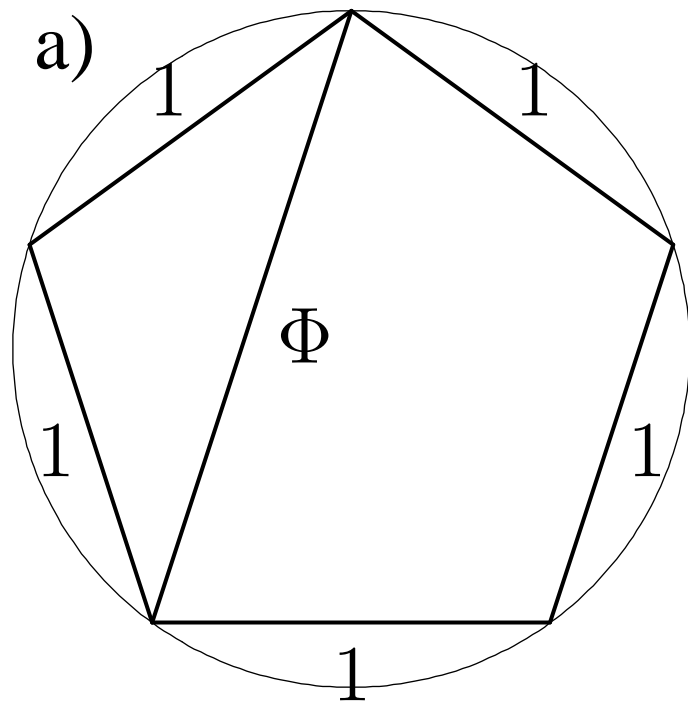


$$g = 1 + \frac{1}{g} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{m}{n} = 1 + \frac{1}{\frac{m}{n}} = 1 + \frac{n}{m} = \frac{m+n}{m}.$$

n'est pas rationnel !!

Le pentagone.



$$g = 1 + \frac{1}{g} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{m}{n} = 1 + \frac{1}{\frac{m}{n}} = 1 + \frac{n}{m} = \frac{m + n}{m}.$$

n'est pas rationnel !!

Gros choc : les preuves sont insuffisantes !!!

I.2 Les Éléments d'Euclide.

“La Géométrie d'Euclide a certainement de très-grands avantages, elle accoutume l'esprit à la rigueur, à l'élégance des démonstrations et à l'enchaînement méthodique des idées ...”

(Poncelet 1822, p. xxv)

“Pemberton ... avait entendu plusieurs fois [Newton](#) se plaindre de s'être livré tout entier aux ouvrages de Descartes et d'autres Algébristes avant d'avoir étudié et médité les Éléments d'Euclide.”

(Préface de *Œuvres d'Euclide* par F. Peyrard, 1819)

“Die Entwicklung der abendländischen Naturwissenschaften beruht auf zwei grossen Leistungen: Der Erfindung des formal logischen Systems (in der euklidischen Geometrie) durch die griechischen Philosophen, und die Entdeckung der Möglichkeit, nach systematischen Experimenten kausale Beziehungen herzustellen.”

([A. Einstein](#), 1953)

Définitions d'Euclide .

- [1.] Un point est ce dont il n'y a aucune partie.
(*Σημεῖόν ἔστιν, ὅν μέρος οὐθέν*)
- [2.] Une ligne est une longueur sans largeur.
- [3.] Les limites d'une ligne sont des points.
- [4.] Une ligne droite est celle qui est placée de manière égale par rapport aux points qui sont sur elle.
- [5.] Une surface est ce qui a seulement longueur et largeur.
- [6.] Les limites d'une surface sont des lignes.
- [7.] Une surface plane est celle qui est placée de manière égale par rapport aux droites qui sont sur elle.
- [8.] Un angle plan est l'inclinaison, l'une sur l'autre, dans un plan, de deux lignes qui se touchent l'une l'autre et ne sont pas placées en ligne droite.
- [9.] Et quand les lignes contenant l'angle sont droites, l'angle est appelé rectiligne.

- [10.] Et quand une droite, ayant été élevée sur une droite, fait les angles adjacents égaux entre eux, chacun de ces angles égaux est droit, et la droite qui a été élevée est appelée perpendiculaire à celle sur laquelle elle a été élevée.
- [11.] Un angle obtus est celui qui est plus grand qu'un droit.
- [12.] Un angle aigu celui qui est plus petit qu'un droit.
- [13.] Une frontière est ce qui est limite de quelque chose.
- [14.] Une figure est ce qui est contenu par quelque ou quelques frontière(s).
- [15.] Un cercle est une figure plane contenue par une ligne unique (celle appelée circonférence) par rapport à laquelle toutes les droites menées à sa rencontre à partir d'un unique point parmi ceux qui sont placés à l'intérieur de la figure, sont (jusqu'à la circonférence du cercle) égales entre elles.

- [16.] Et le point est appelé centre du cercle.
- [17.] Et un diamètre du cercle est n'importe quelle droite menée par le centre, limitée de chaque côté par la circonférence du cercle, laquelle coupe le cercle en deux parties égales.
- [18.] Un demi-cercle est la figure contenue par le diamètre et la circonférence découpée par lui; le centre du demi-cercle est le même que celui du cercle.
- [19.] Les figures rectilignes sont les figures contenues par des droites; trilatères (triangles) : celles qui sont contenues par trois droites, quadrilatères par quatre; multilatères par plus de quatre.
- [20.] Parmi les figures trilatères est un triangle équilatéral celle qui a les trois côtés égaux; isocèle celle qui a deux côtés égaux seulement; scalène celle qui a les trois côtés inégaux.

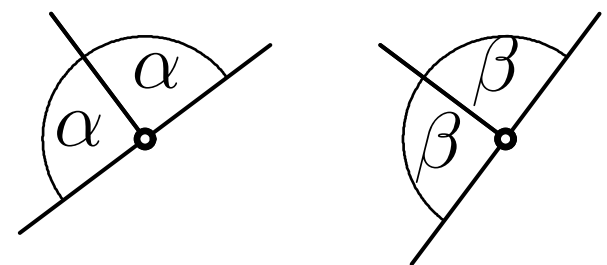
- [21.] De plus, parmi les figures trilatères est un triangle rectangle celle qui a un angle droit; obtusangle, celle qui a un angle obtus; acutangle, celle qui a les trois angles aigus.
- [22.] Parmi les figures quadrilatères est un carré celle qui est à la fois équilatérale et rectangle; est oblongue celle qui est rectangle mais non équilatérale; un losange, celle qui est équilatérale mais non rectangle; un rhomboïde (parallélogramme), celle qui a les côtés et les angles opposés égaux les uns aux autres mais qui n'est ni équilatérale ni rectangle; et que l'on appelle trapèzes les quadrilatères autres que ceux-là.
- [23.] Des droites parallèles sont celles qui étant dans le même plan et indéfiniment prolongées de part et d'autre, ne se rencontrent pas, ni d'un côté ni de l'autre.

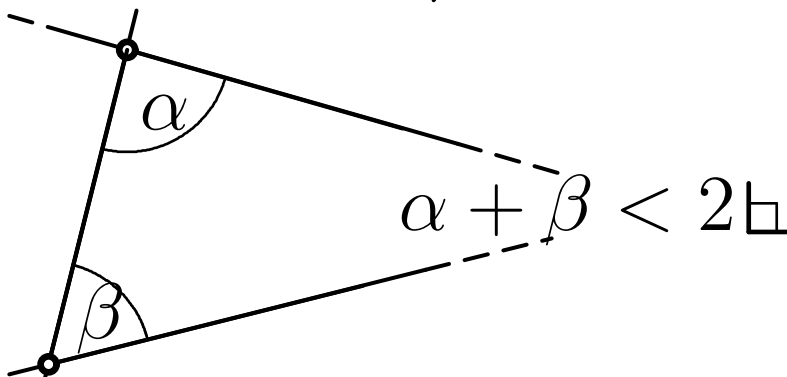
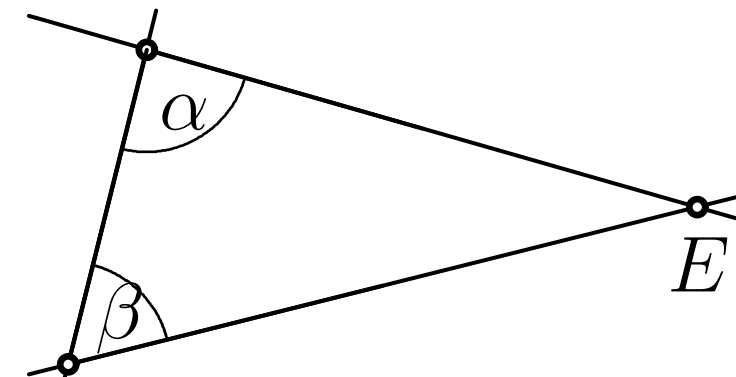
Les 5 postulats d'Euclide.

Post. 1. A  B \Rightarrow 

Post. 2.  \Rightarrow 

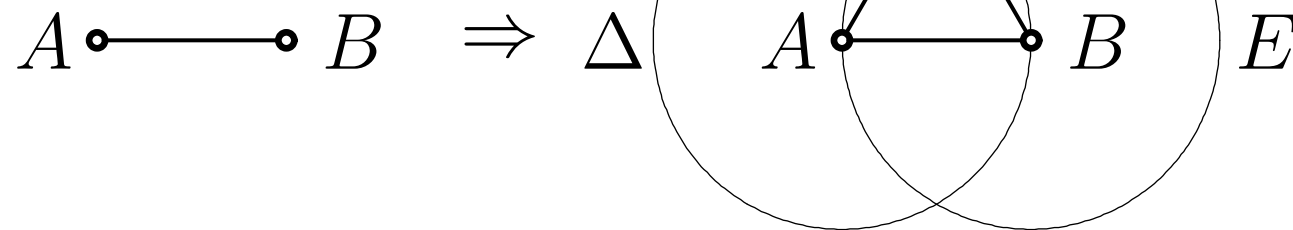
Post. 3. A  B \Rightarrow 

Post. 4.  \Rightarrow $\alpha = \beta = \perp$

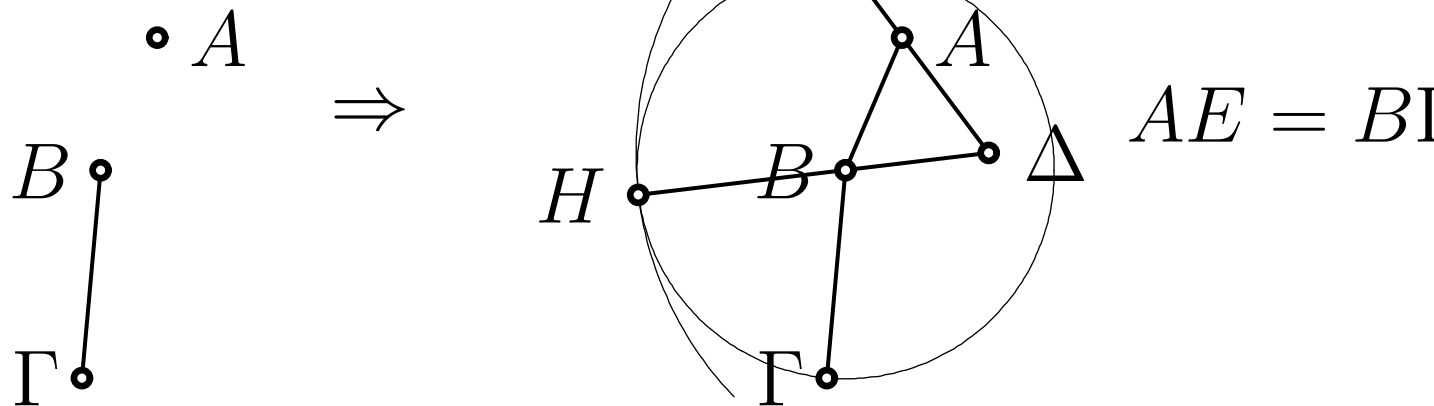
Post. 5.  $\alpha + \beta < 2\perp$ \Rightarrow 

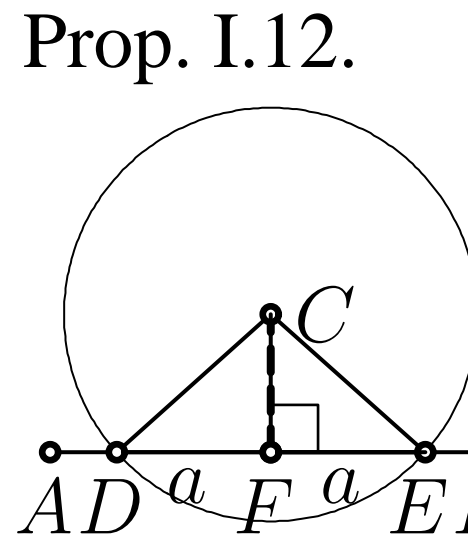
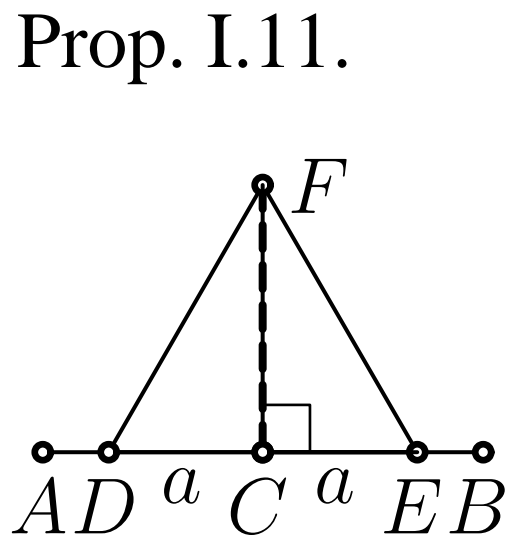
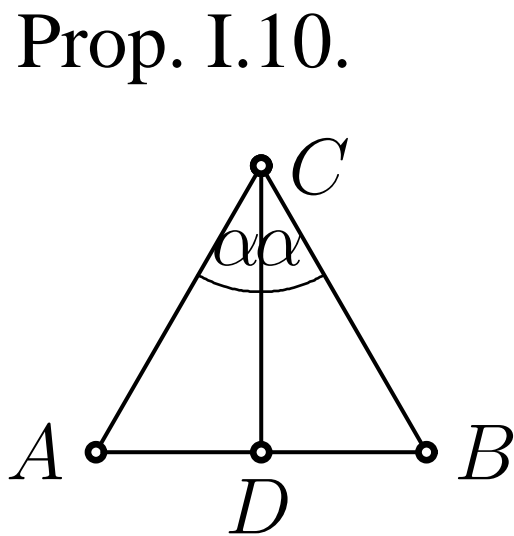
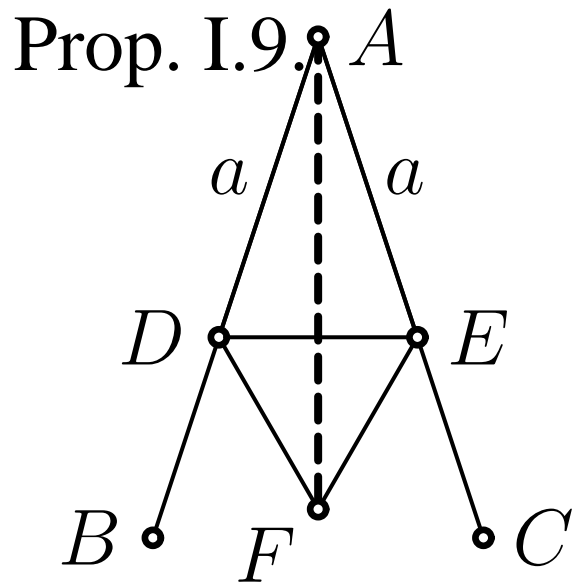
Les premiers propositions.

Prop. I.1.

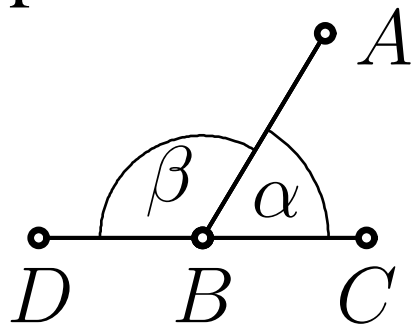


Prop. I.2.

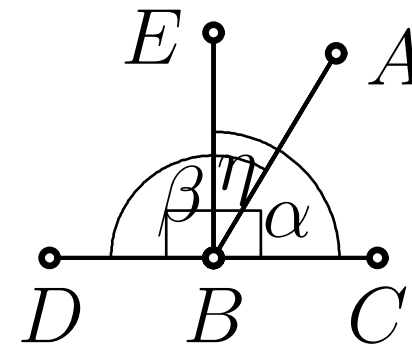




Prop. I.13.



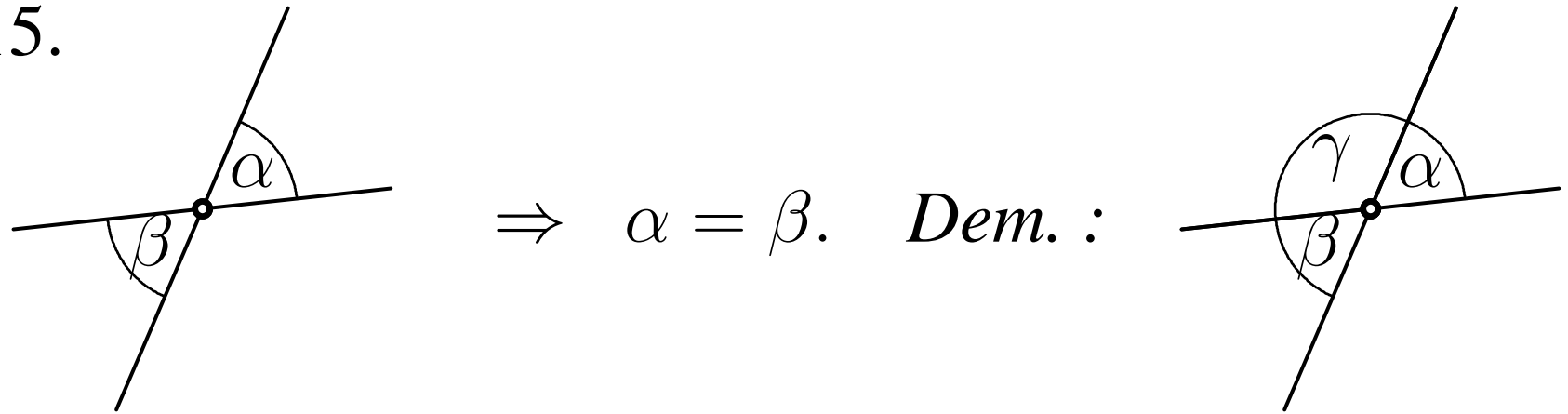
$$\Rightarrow \alpha + \beta = 2 \cdot \perp. \quad \text{Bew. :}$$



Entrée Postulat 4 :

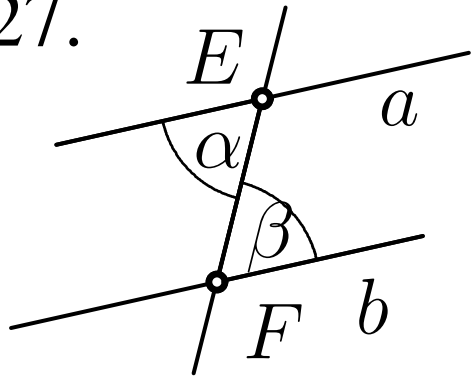
Prop. I.14. $\alpha + \beta = 2 \cdot \perp \Rightarrow DBC$ alignées. Dem. avec Post. 4.

Prop. I.15.

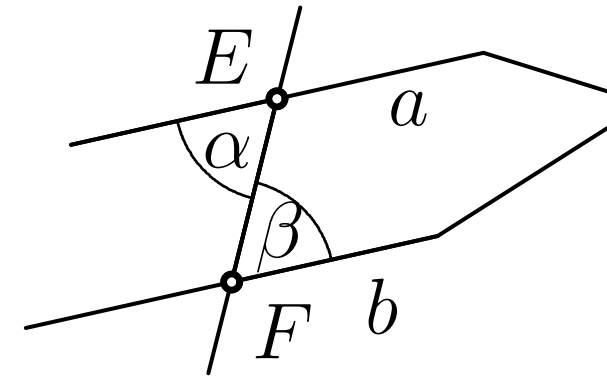


<p>Prop. I.4 SWS</p>	<p>Prop. I.7-8, 22 SSS</p>	<p>Prop. I.26 WSW</p>	<p>Prop. I.26 WWS</p>
--------------------------	--------------------------------	---------------------------	---------------------------

Prop. I.27.

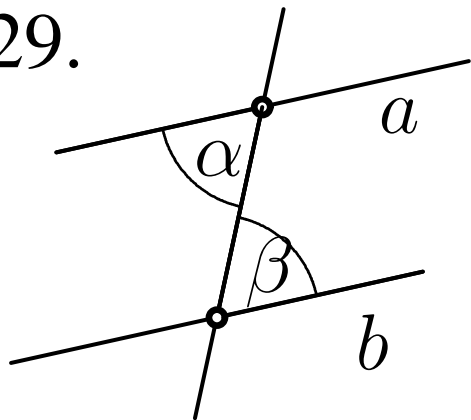


$\alpha = \beta \Rightarrow a \parallel b$. *Dem.* :

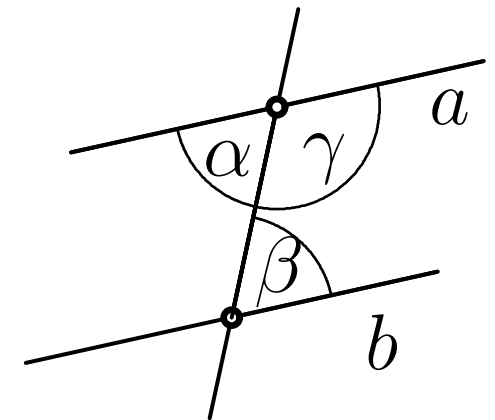


Entrée Postulat 5 :

Prop. I.29.

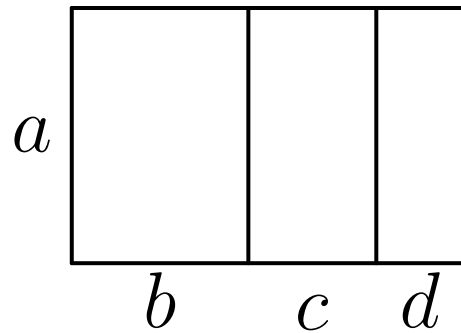


$a \parallel b \Rightarrow \alpha = \beta$. *Dem.* :



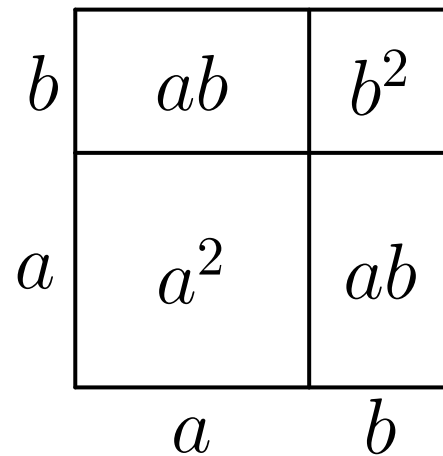
\Rightarrow Théorèmes sur angles parallèles, angles dans un triangle (I.32), parallélogrammes, rectangles, Thm. de Pythagore (I.47) et son réciproque. Fin Livre I.

Livre II. Identités algébriques.



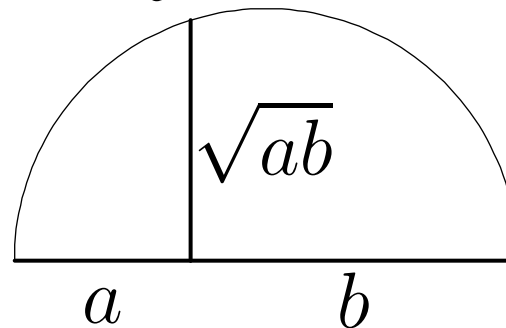
Prop. II.1

$$a(b + c + d) = ab + ac + ad$$



Prop. II.2

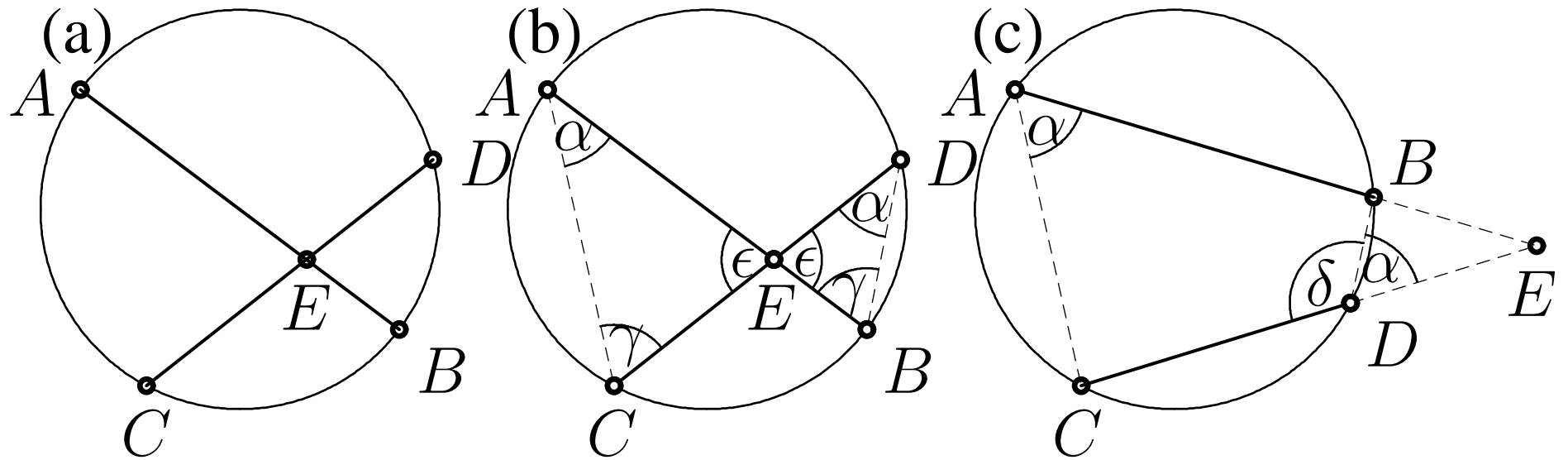
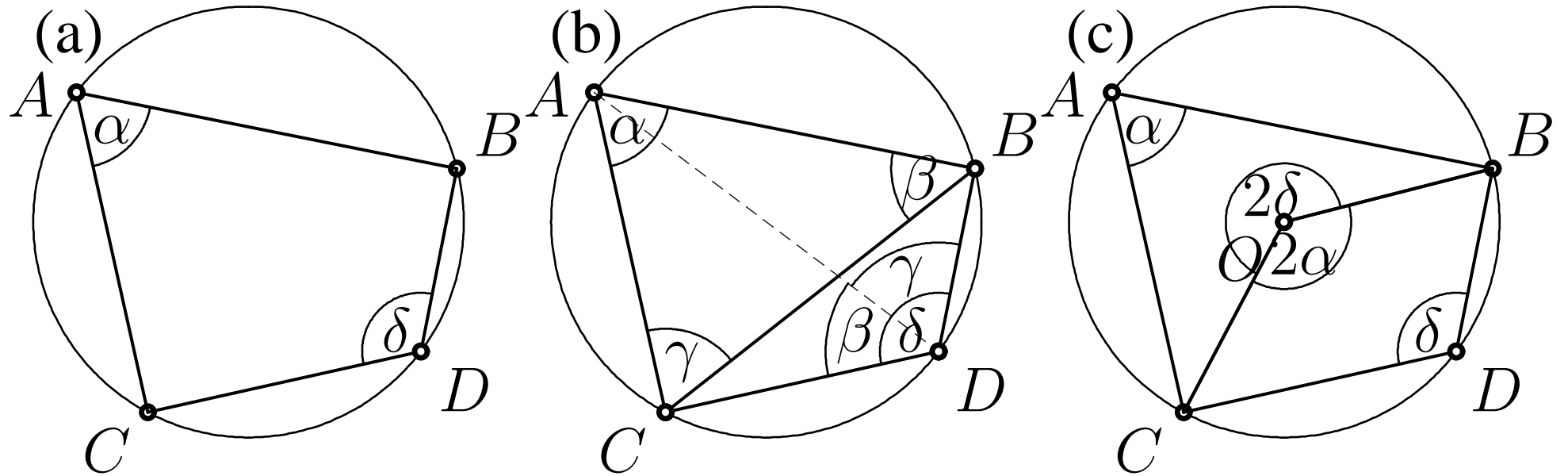
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$



Prop. II.14

Racine.

Livre III. Cercles et angles, potence d'un point; Prop. III.22:

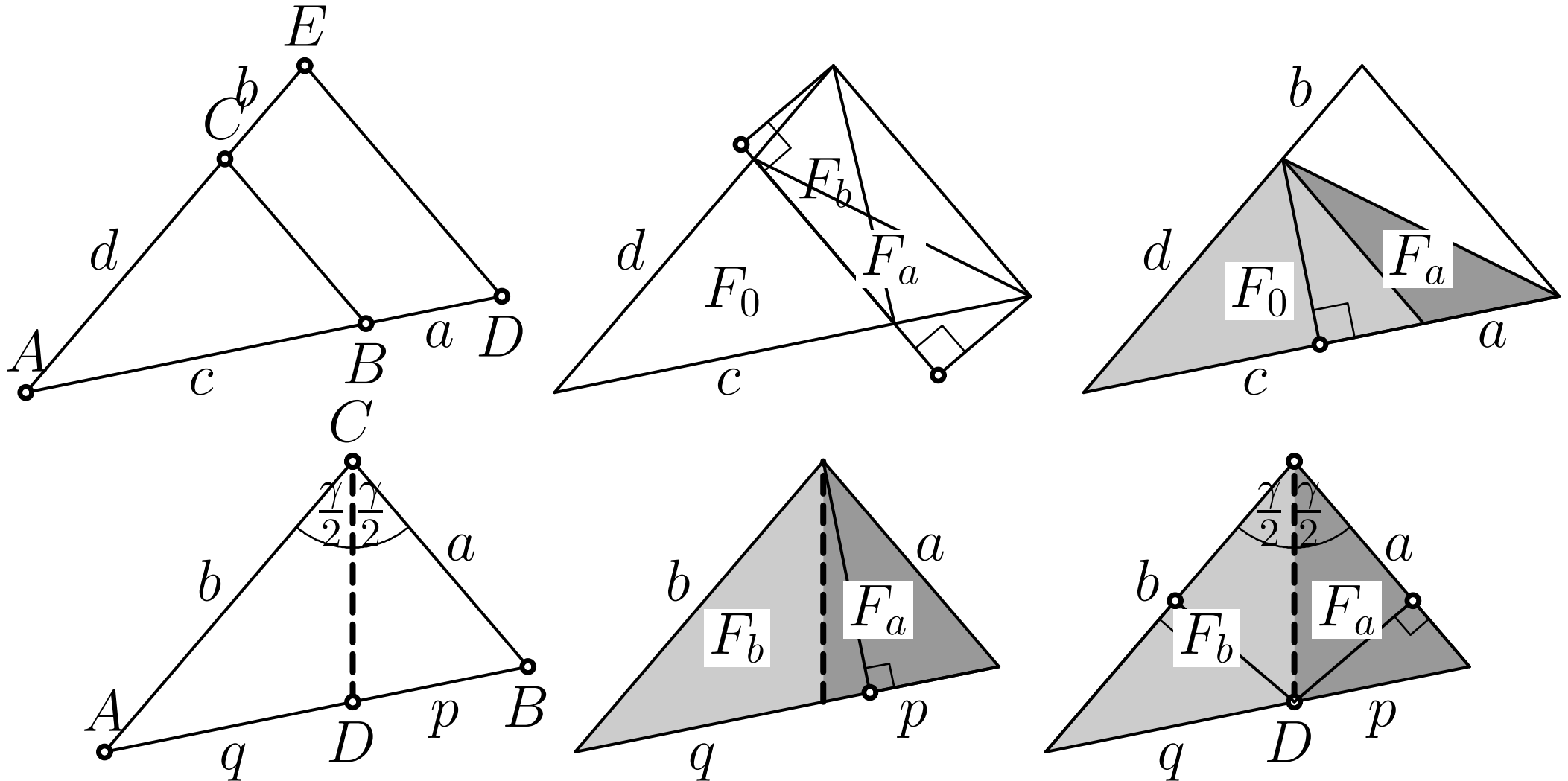


Prop. III.35: $AE \cdot EB = CE \cdot ED$.

Livre IV. Cercles et polygones réguliers de 3, 4, et 5 côtés.

Livre V. Théorie des proportions (nombres irrationnels, à la [Dedekind](#)).

Seulement dans le **Livre VI** arrive le [Thm. de Thales](#) :

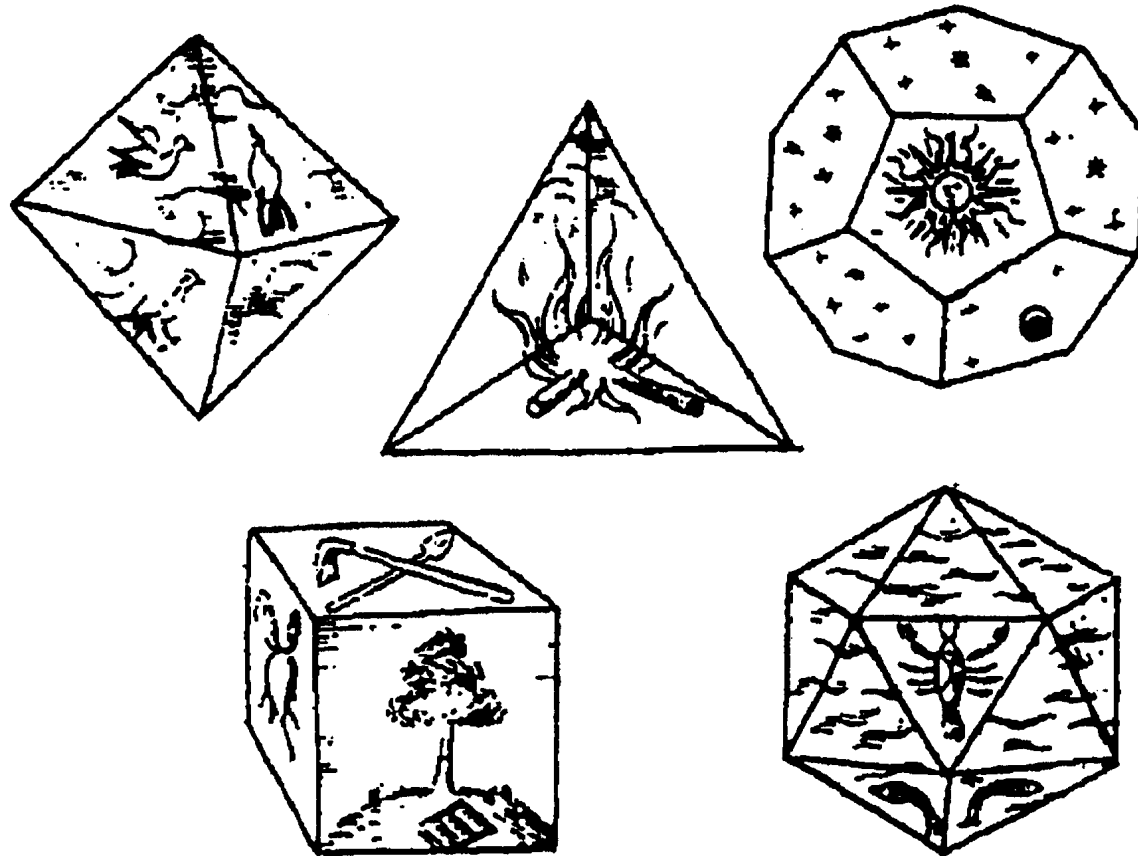


et seulement la proposition XIII.9 montre la preuve élégante pour le pentagone.

Livres VII, VIII, IX. Théorie des nombres (Alg. d'Euclide, nombres premiers)

Livre X. Classification des nombres irrationnels.

Livre XI. Géométrie de l'espace. Corps platoniciens:



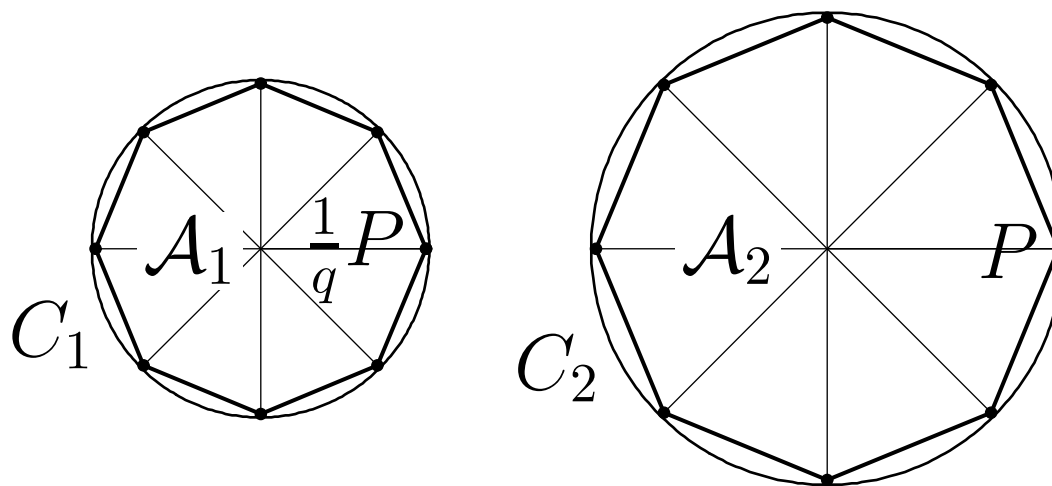
(dessins de Kepler).

Livre XII. Aires et volumes de cercles, pyramides, cônes et sphères.

Prop. XII.2. *Les aires A_1 et A_2 de deux cercles C_1 et C_2 de rayons r_1 et r_2 satisfont*

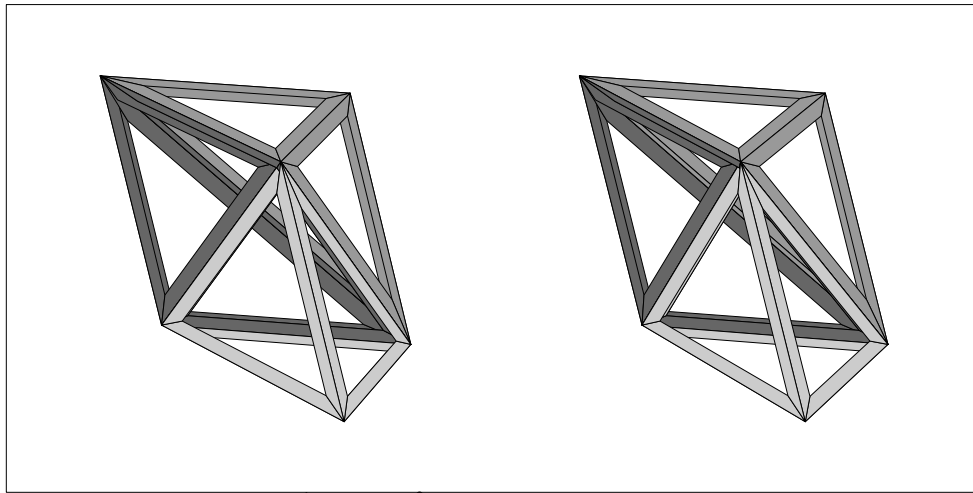
$$\frac{r_2}{r_1} = q \quad \Rightarrow \quad \frac{A_2}{A_1} = q^2.$$

Preuve:

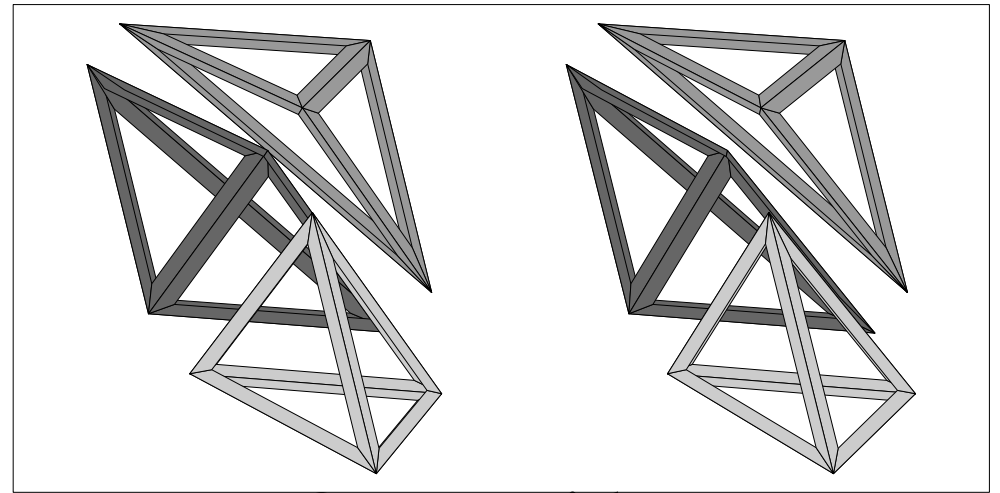


Propositions XII.3 – XII.9. Volumes de pyramides. $\mathcal{V} = \frac{A \cdot h}{3}$

Preuve (Euclide):

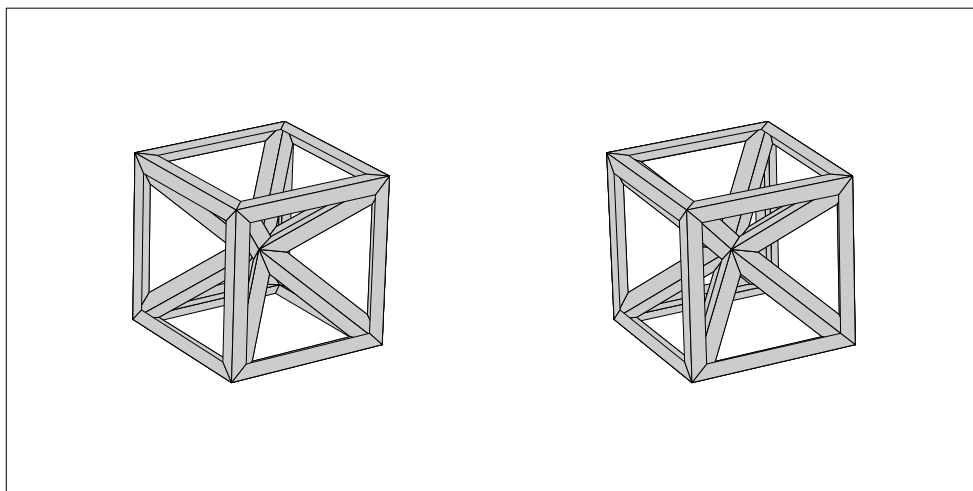


1 prisme =

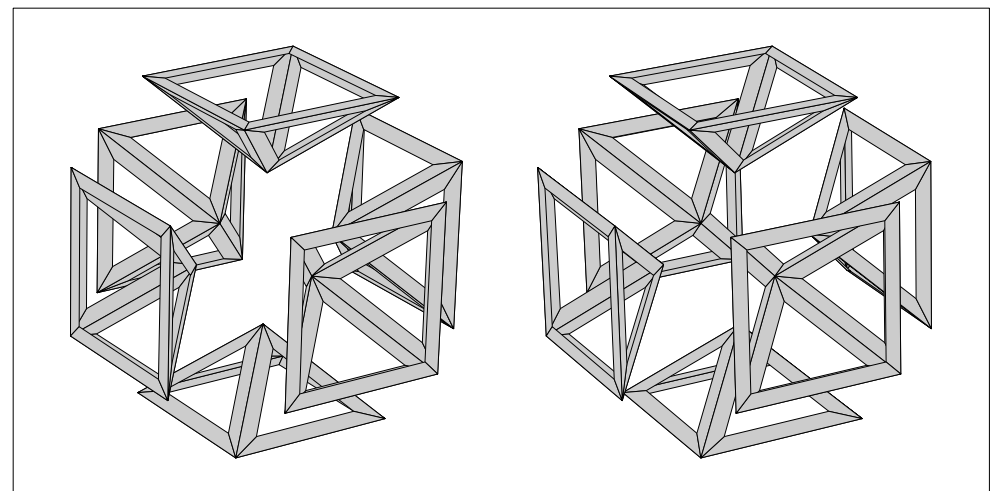


3 pyramides

Autre preuve (Clairaut 1741):



1 cube =

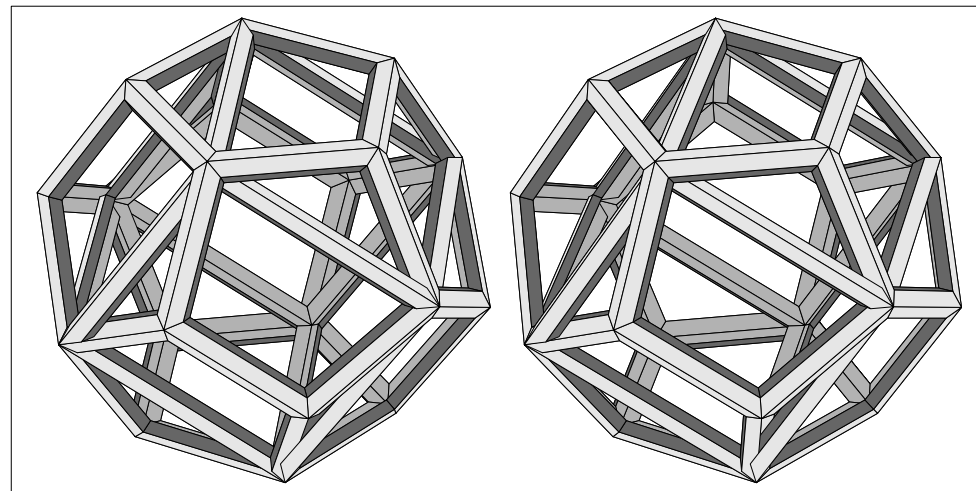


6 pyramides avec $h = \frac{1}{2}$

LIVRE XIII. Constructions et propriétés des corps platoniciens.

Propositions XIII.1 – XIII.12 concernent la section d'or, le pentagone régulier et le triangle isocèle.

Propositions XIII.13 – XIII.18. Tétraèdre, octaèdre, cube, icosaèdre, dodécaèdre. Euclide construit le dodécaèdre à partir du cube en y rajoutant des “toits de chalets valaisans” sur chaque face (voir figure).



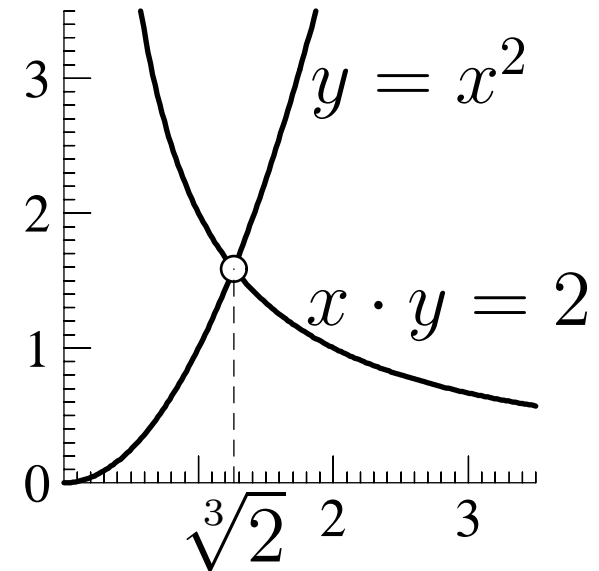
I.3 Apollonius e les coniques.

Origine des coniques. Épidémies de peste à Athènes en 430 et 428 av.J.-C.

Oracle de Delphes: doublez le cube de mon autel.

Hippocrates de Chios :

$$x \cdot \underbrace{x \cdot x}_y = 2 \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x \cdot y &= 2 \\ y &= x^2 \end{aligned}$$



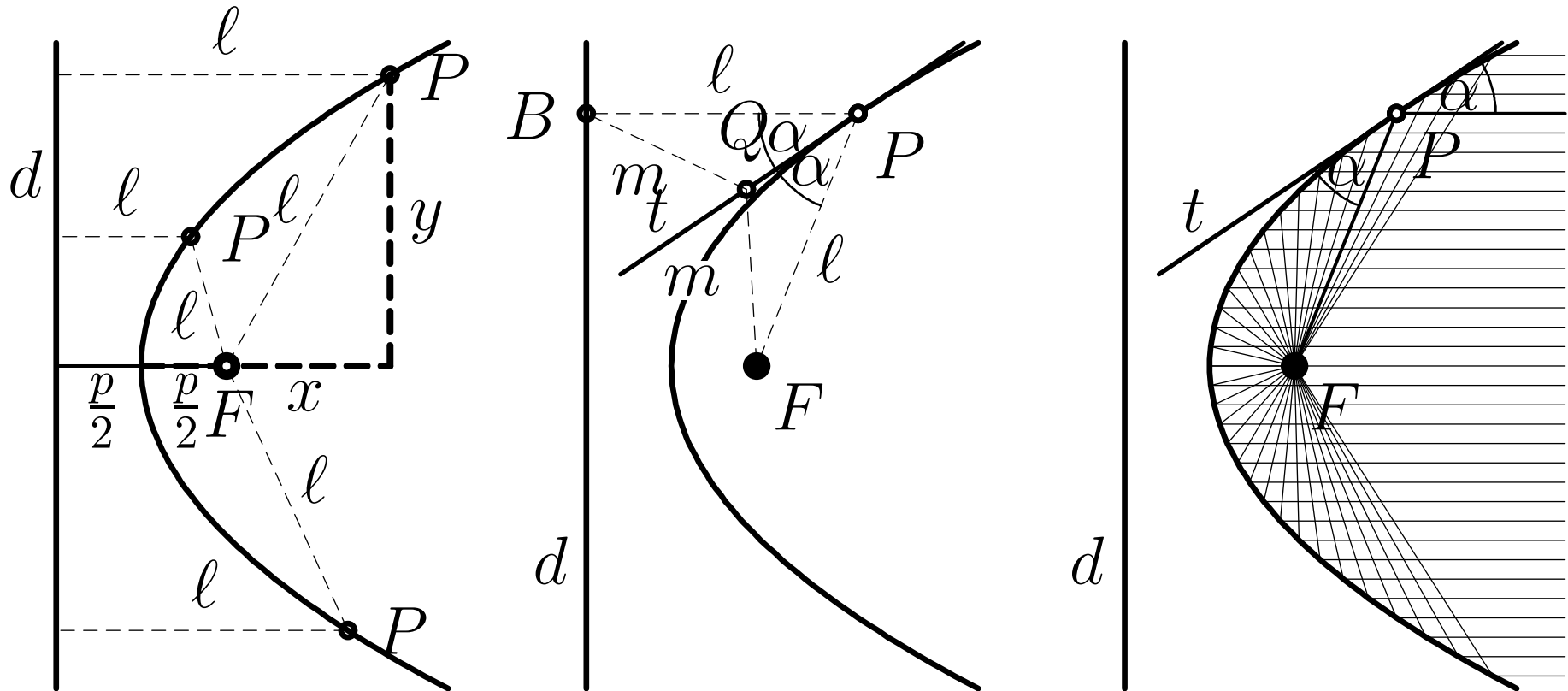
Menaechmus, élève d'Eudoxe et de Platon, découvre que ces courbes représentent l'intersection d'un plan et d'un cône.

\Rightarrow Apollonios.

La parabole.

παράβολή, comparaison, rapprochement, ressemblance,
discours allégorique ... (A. Bailly, *Dictionnaire Grec
Français*, Hachette 1950, p. 1458)

Déf. d'une parabole (Pappus, *Collect. math.*, Livre VII,
Prop. 238).



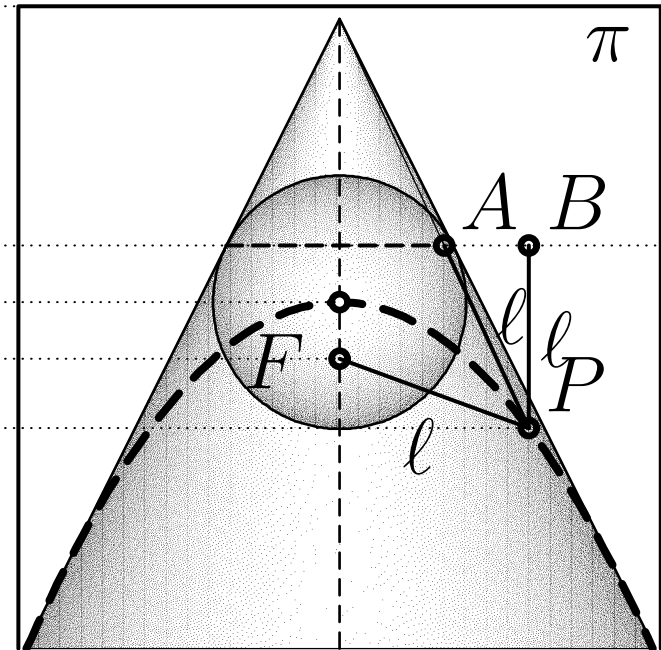
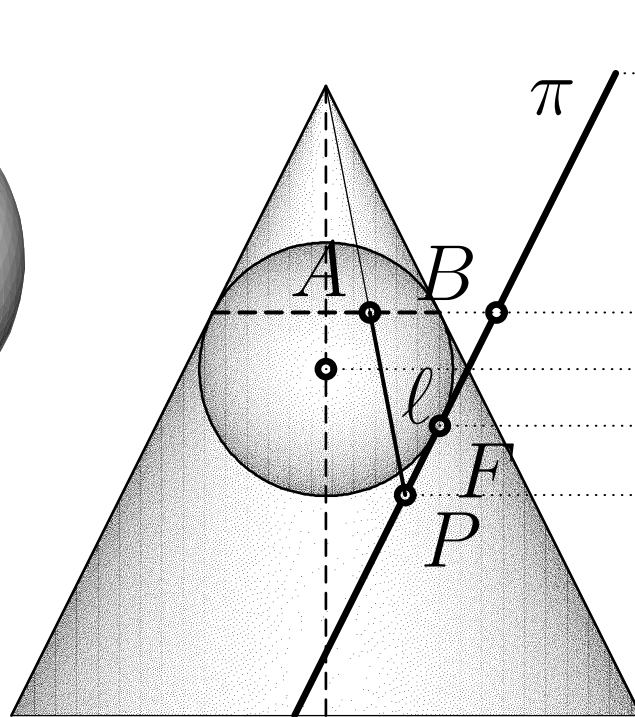
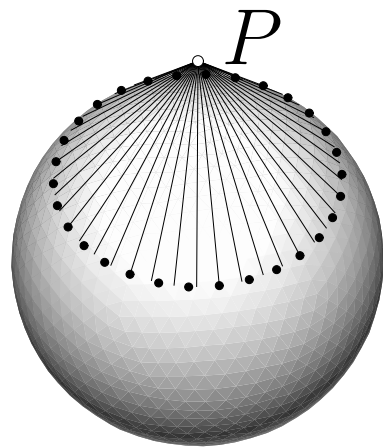
Pythagore :

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad y^2 = 2xp ,$$

i.e., l'aire d'un carré $y \cdot y$ est égale à l'aire d'un rectangle $x \cdot 2p$. Cette “comparaison, ressemblance...” est à l'origine du nom “parabole” (par Apollonios, voir citation).

Théorème (Apoll. Livre I, Prop. XI). *Si un cône est coupé par un plan π , qui a la même inclinaison que les génératrices, alors l'intersection est une parabole.*

La preuve élégante de G.P. Dandelin (1822) a rendu superflu une centaine de propositions d'Apollonios !!

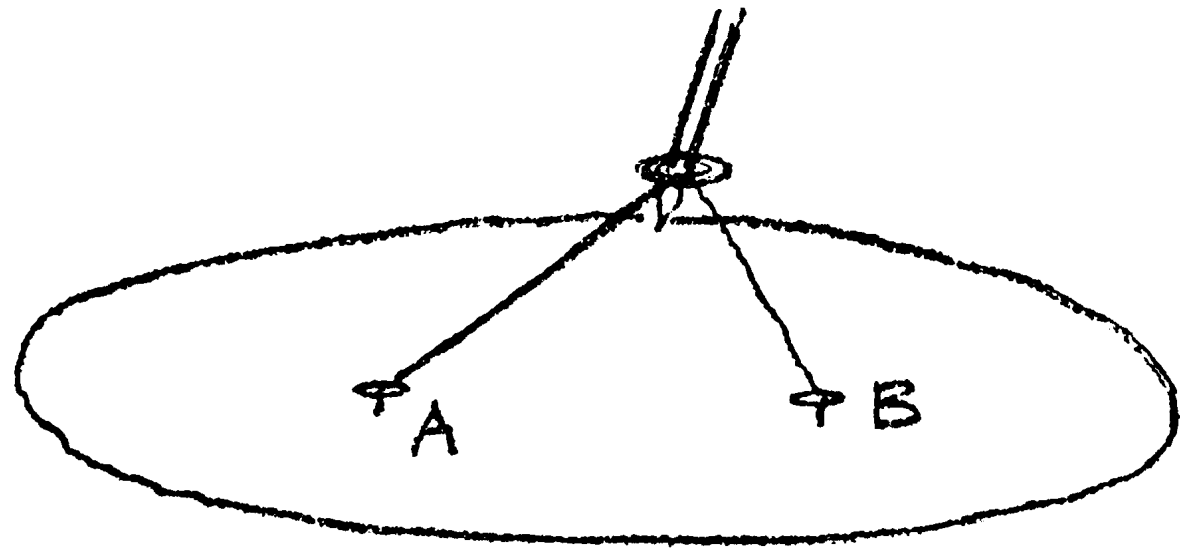
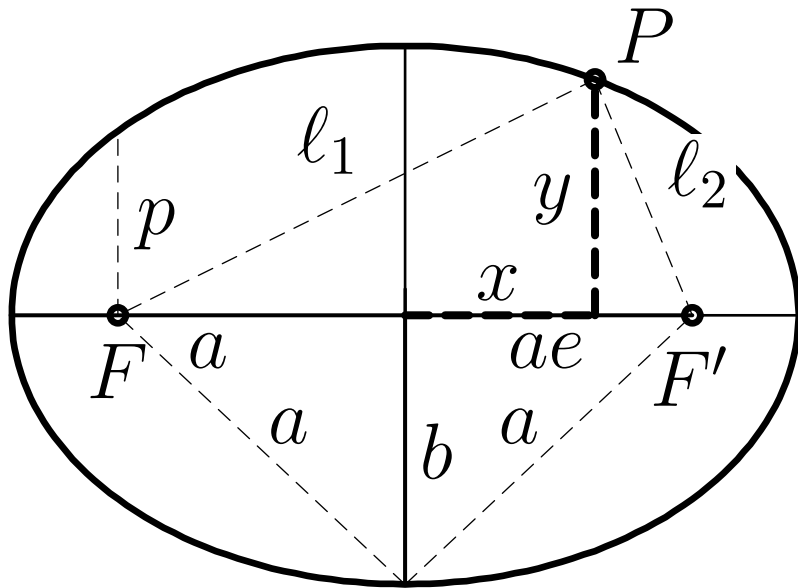


L'ellipse.

[᾽]ελλιπής, qui reste en arrière, incomplet, insuffisant, qui manque de ... (A. Bailly, *Dictionnaire Grec Français*, Hachette 1950, p. 649)

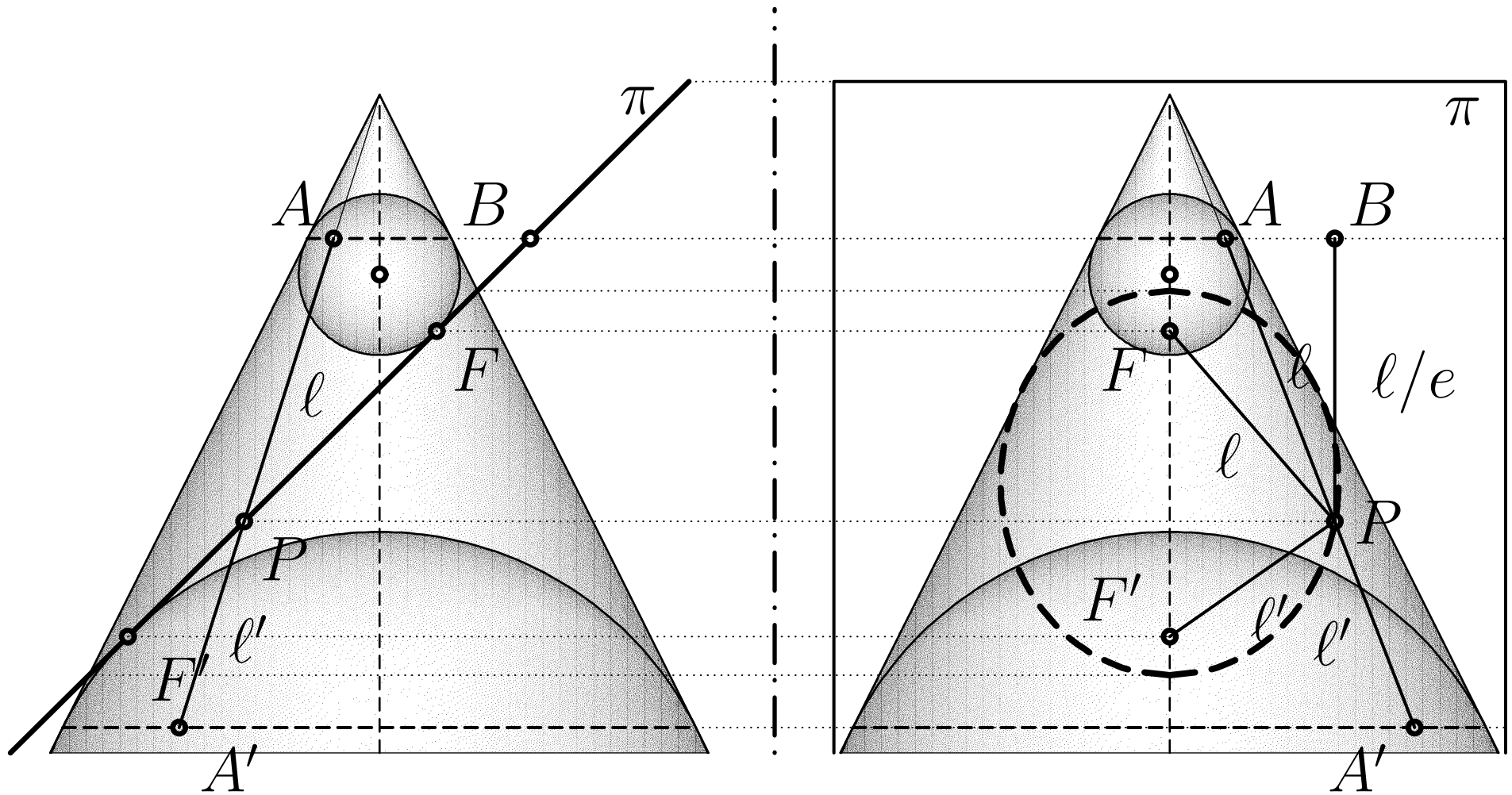
Apollonius, Livre III, Proposition LII :

$$l_1 + l_2 = 2a$$

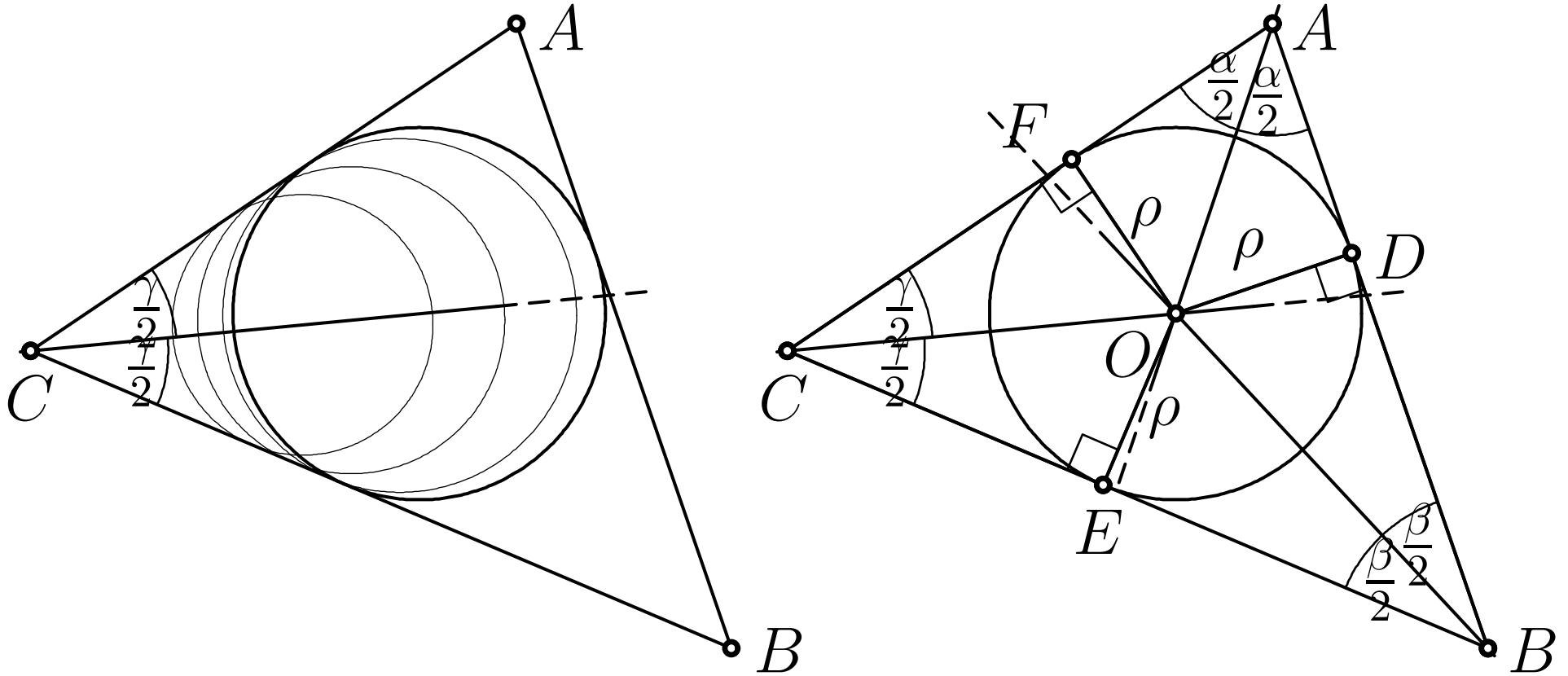


(à droite : dessin de R. Feynman, 1965).

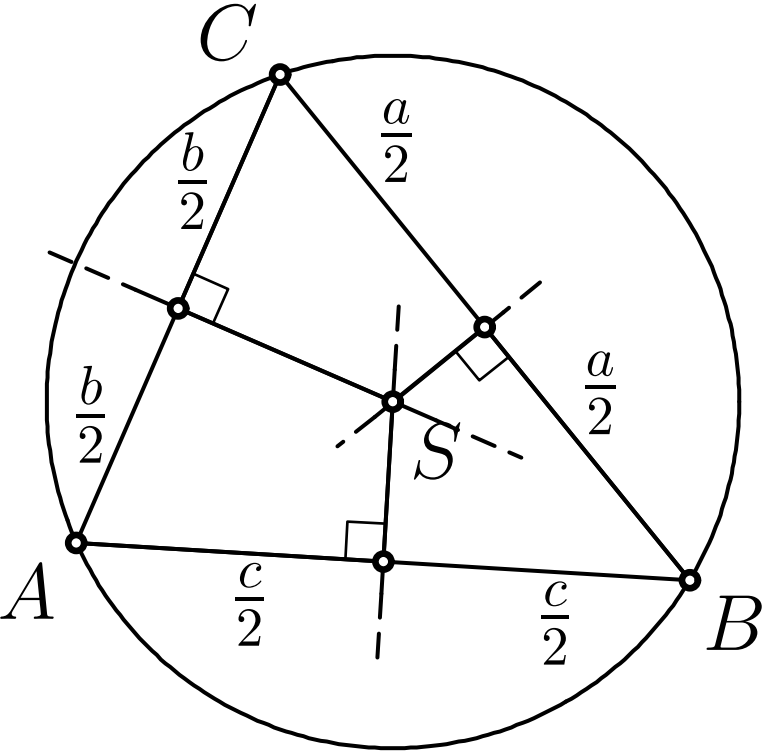
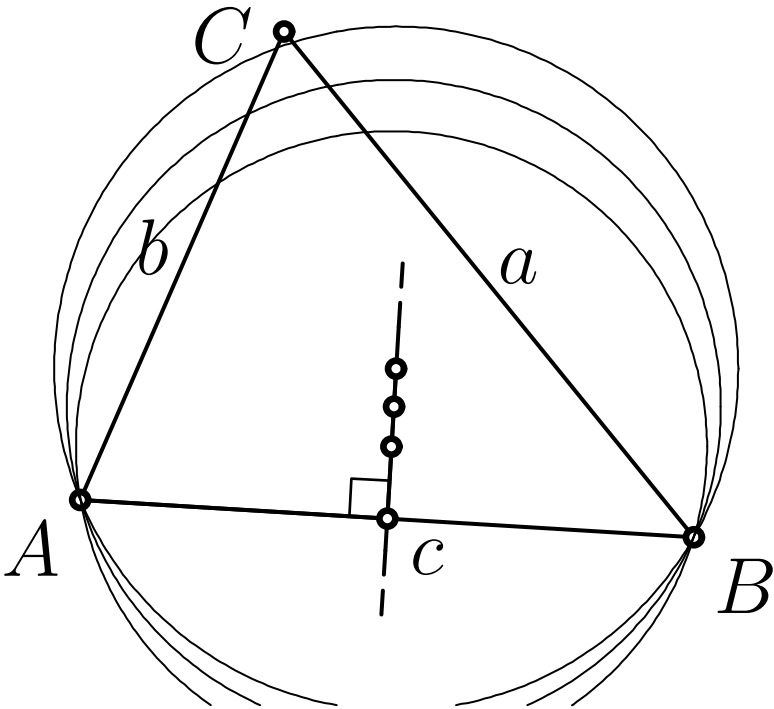
Preuve de G.P. Dandelin (1822) :



Triangle. Centre du cercle inscrit O . (Eucl. IV.4.)



Centre du cercle circonscrit S. (Eucl. IV.5.)

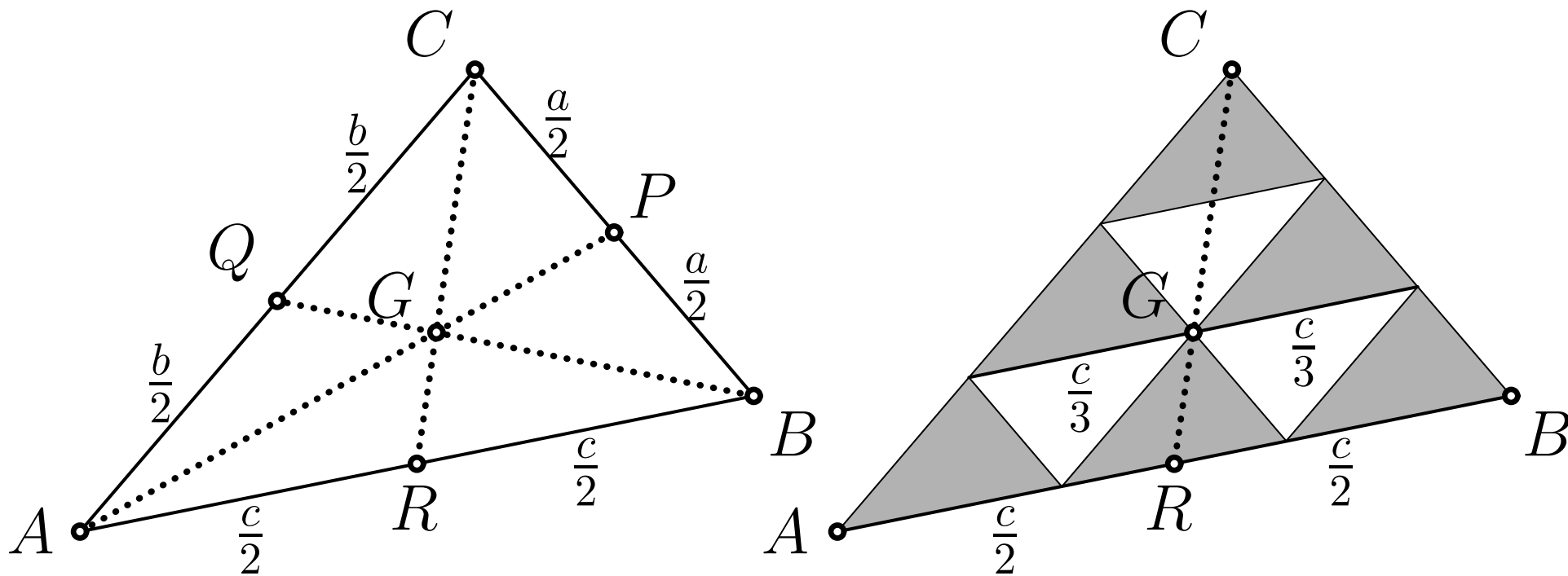


Le Barycentre G. (Archimedes)

$\beta\acute{\alpha}\rho\omicron\varsigma$, pesanteur, poids, charge, fardeau, ...

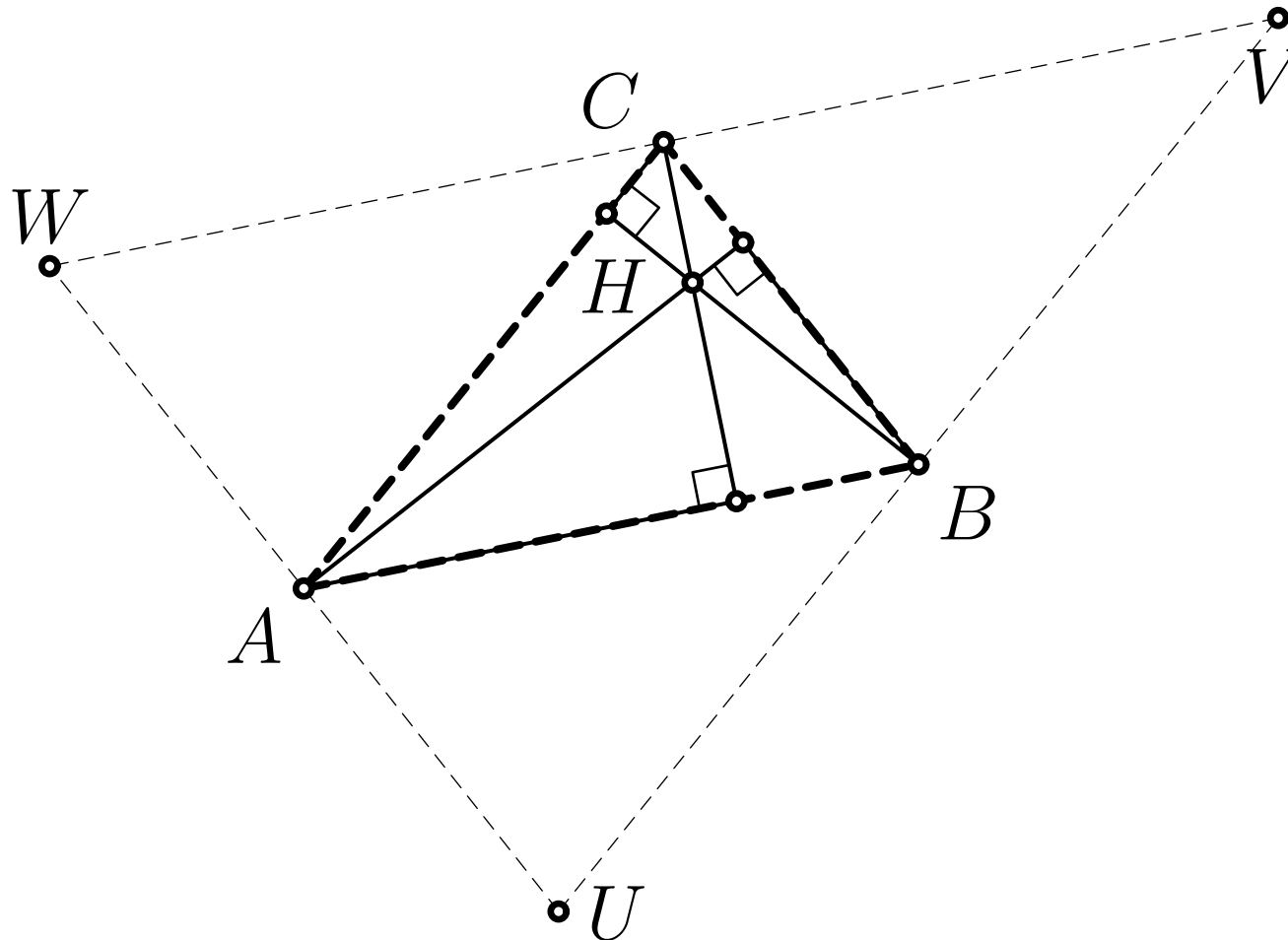
(A. Bailly,

Dictionnaire Grec Français, Hachette 1950, p. 348)



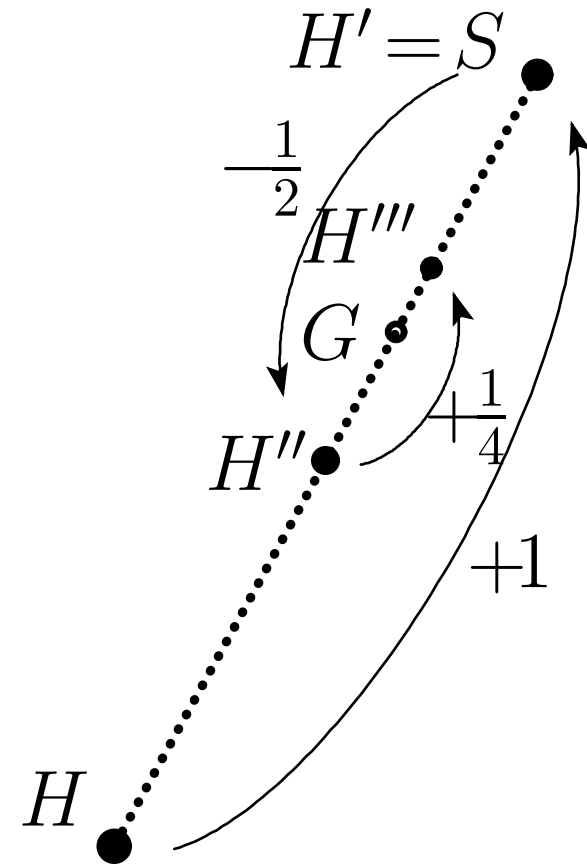
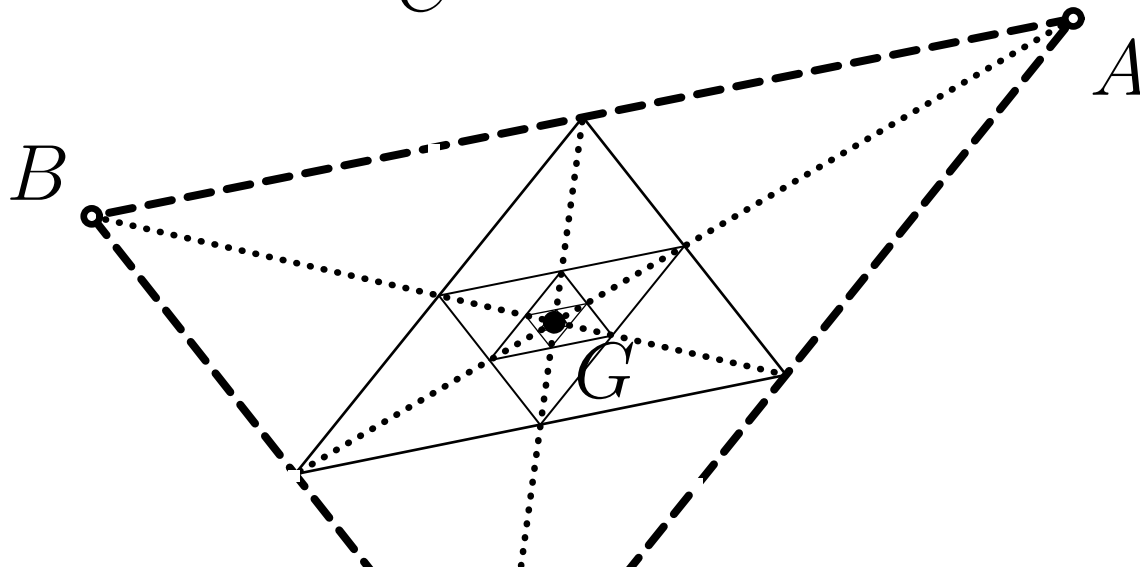
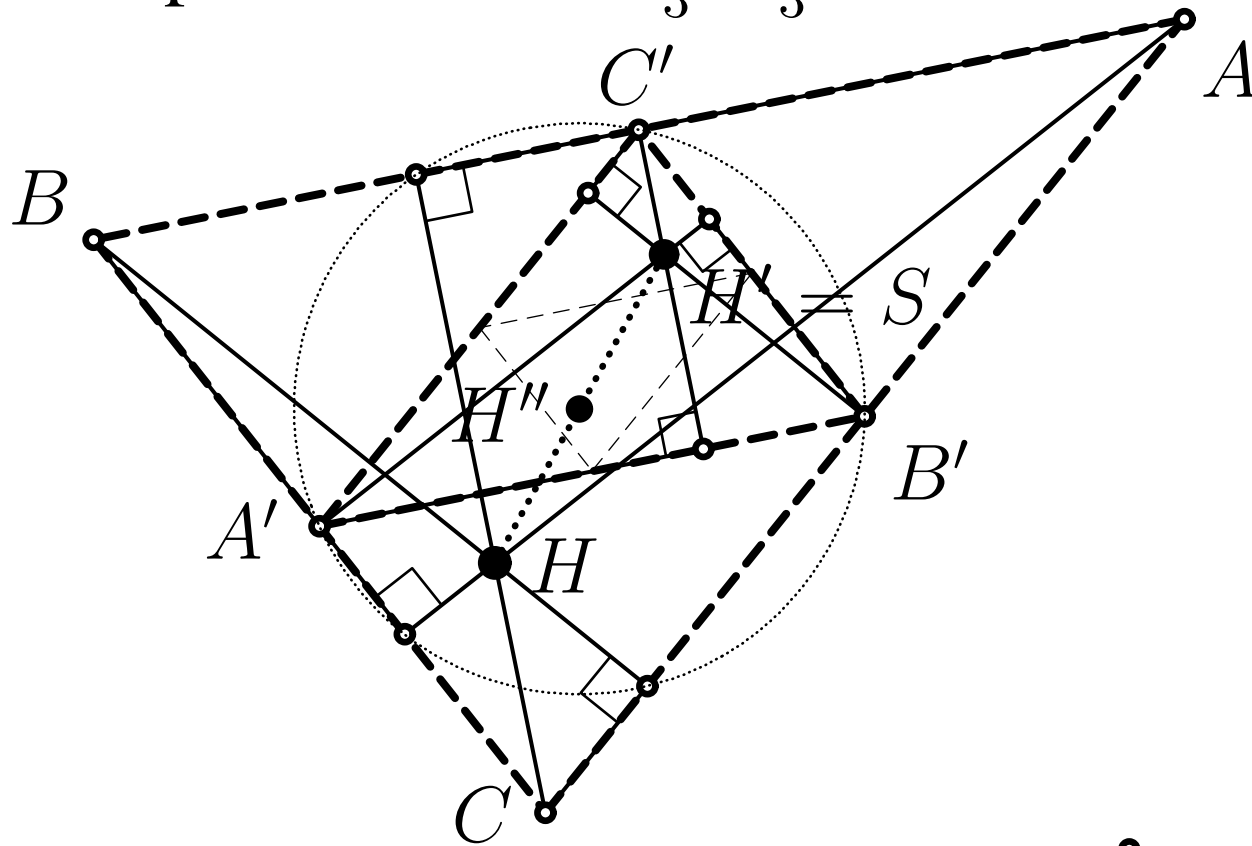
L'orthocentre H. (Proclus)

$\acute{\omicron}\rho\theta\iota\omicron\varsigma$, droit, qui se dresse, qui monte en ligne droite, à pic ...
(A. Bailly, *Dictionnaire Grec Français*, Hachette 1950, p. 1399)



(Preuve de Gauss 1810)

La droite d'Euler. Points H , G et S sur une droite;
 G coupe HS comme $\frac{2}{3}$ à $\frac{1}{3}$.



Théorème de Morley. (Morley 1904)

Une démonstration élémentaire de ce théorème n'est pas facile.

(J. Marchand, *L'Ens. Math.* XXIX (1930), p. 291)

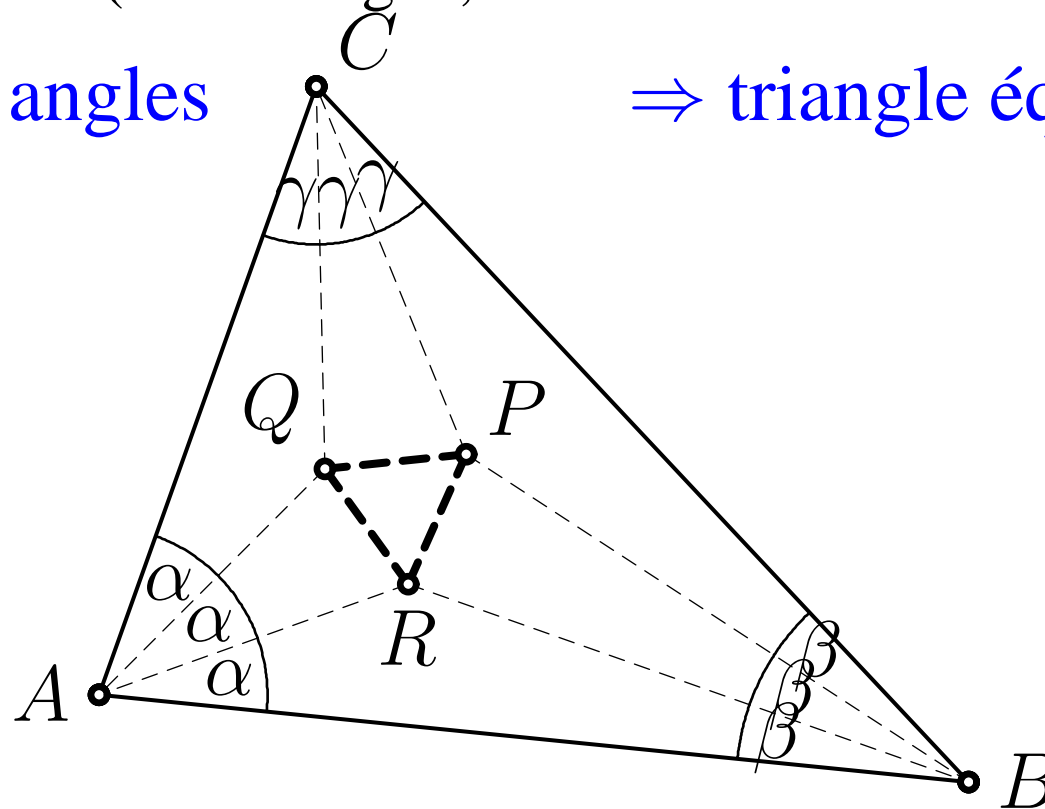
La méthode de Morley ressortissant à une géométrie analytique du plan de la variable complexe, on s'empressa ... de rechercher une démonstration aussi courte et aussi élégante que l'énoncé ...

A mon avis, de tels désirs ne sauraient être satisfaits.

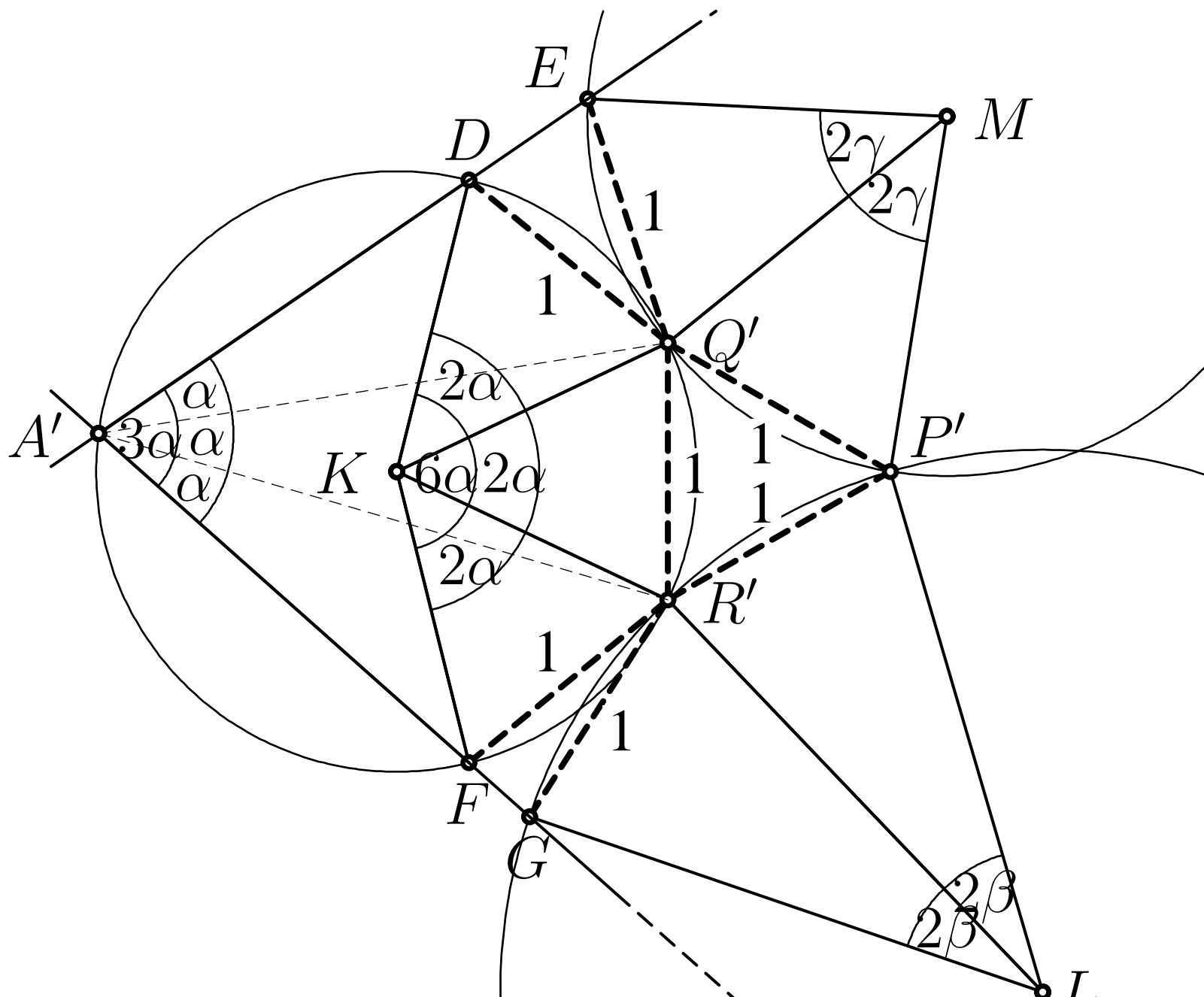
(H. Lebesgue, *L'Ens. Math.* XXXVIII (1939), p. 39)

Trisecteurs des angles

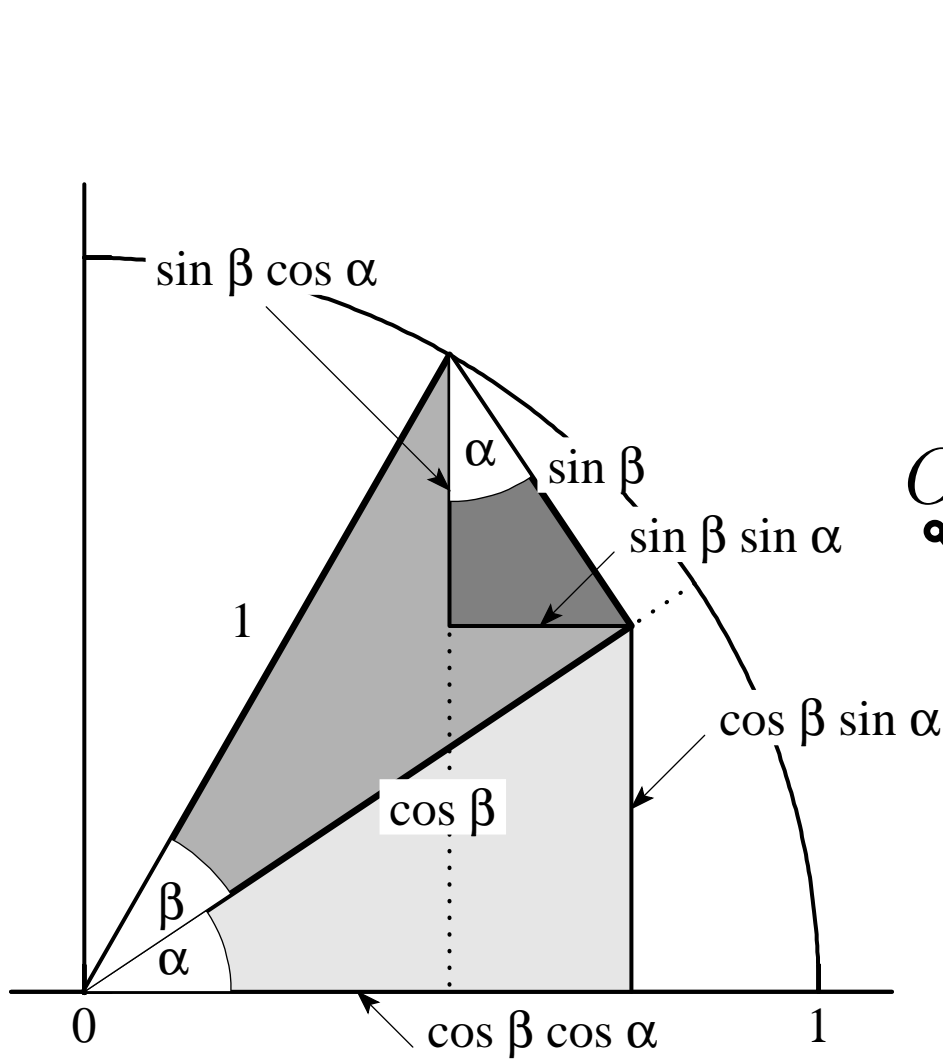
\Rightarrow triangle équilatéral.



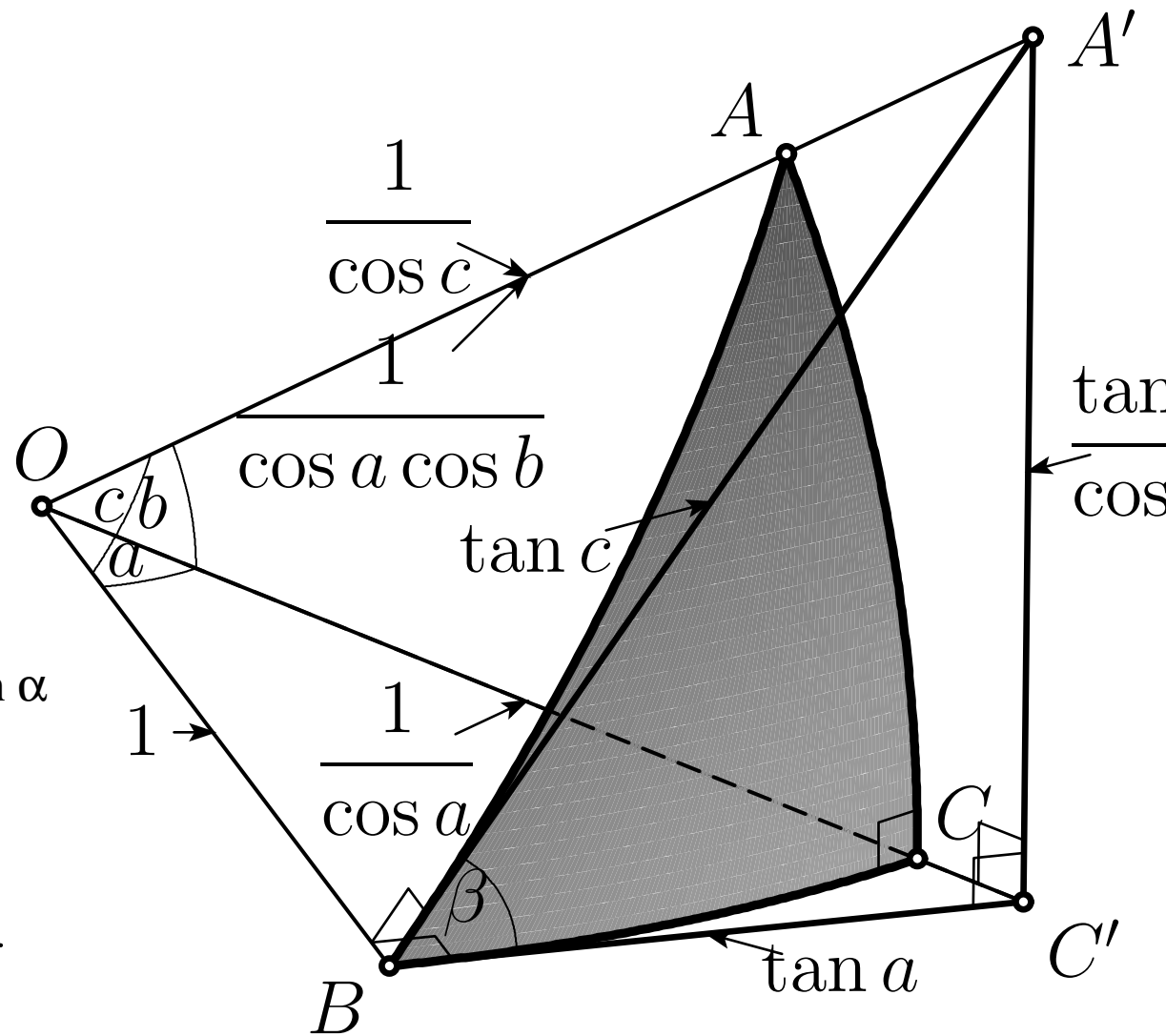
Preuve: supposons $\alpha + \beta + \gamma = 60^\circ$



Trigonométrie et Trigonométrie sphérique de Ptolémée :



(Regiomontanus 1533)



(Euler 1782)