
Delle quantità trascendenti derivanti
dal cerchio

*De quantitatibus transcendentibus ex
circulo ortis*

Commissione di Matematica della Svizzera Italiana

giugno 2008

Introduzione

In questo articolo è presentata la traduzione dal latino del capitolo VIII del tomo *Introductio analysin infinitorum* di Eulero (tale tomo è catalogato con E101; una versione online è consultabile sul sito <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k69587.image.r=euler+Introductio+analysin.langFR.f1.pagination>).

Non si tratta di una traduzione parola per parola ma di una presentazione con commenti e note, pensata per essere fruibile anche da allievi liceali.

Per alleggerire la parte matematica useremo le notazioni moderne, in particolare:

- al posto di Ang. scriveremo arc (per esempio al posto di Ang. tan scriveremo arctan);
- al posto di $l(x)$ scriveremo $\ln x$;
- al posto di xx scriveremo x^2 , al posto di tt scriveremo t^2 ;
- al posto di etc. scriveremo ...

Inoltre, per facilitare la lettura, sono state inserite delle note (esse sono riconoscibili poiché sono state scritte in corsivo e tra parentesi quadre); i titoli dei paragrafi sono nostri, i numeri dei paragrafi sono invece quelli originali.

La traduzione è stata rivista dal prof. Vittore Nason, docente di latino e greco del Liceo cantonale di Locarno.

Delle quantità trascendenti derivanti dal cerchio

126. Perché proprio archi, seni e coseni?

Dopo i logaritmi e le quantità esponenziali devono essere considerati gli archi circolari con il loro seno e il loro coseno, poiché non solo costituiscono un altro genere di quantità trascendenti, ma anche perché provengono dai logaritmi e dalle esponenziali quando si coinvolgono quantità immaginarie, cosa che apparirà più chiaramente in seguito.

Poniamo dunque il raggio del cerchio, o l'intero seno, uguale a 1, e poiché è evidente che la circonferenza di quel cerchio non può essere espressa esattamente con numeri razionali, è stato trovato per approssimazioni che la semicirconferenza di quel cerchio è uguale a 3.141592653589793238462643383279502884171693993751058209749445923078164062862089986280348253421170679821480865132723066470938446...¹, per il quale numero scriverò π così come è π la semicirconferenza del cerchio il cui raggio è 1 oppure la lunghezza dell'arco di 180 gradi².

127. Notazioni e riepilogo di valori e formule per seno, coseno, tangente e cotangente

Se z è un arco qualsiasi di quel cerchio, il cui raggio assumo essere sempre 1, possiamo considerarne in particolar modo il seno e il coseno. In seguito indicherò il seno dell'arco z con $\sin .A.z$ oppure con $\sin .z$. Il coseno lo indicherò con $\cos .A.z$ oppure con $\cos .z$ [per praticità nel seguito useremo le notazioni attuali, senza il puntino dopo il simbolo della funzione]. Così, essendo l'arco di 180° , sarà $\sin 0\pi = 0$ e $\cos 0\pi = 1$ e $\sin \frac{1}{2}\pi = 1$ e $\cos \frac{1}{2}\pi = 0$ e $\sin \pi = 0$ e $\cos \pi = -1$ e $\sin \frac{3}{2}\pi = -1$ e $\cos \frac{3}{2}\pi = 0$ e $\sin 2\pi = 0$ e $\cos 2\pi = 1$. Dunque tutti i seni e coseni sono compresi tra i limiti $+1$ e -1 .

Sarà poi anche $\cos z = \sin(\frac{1}{2}\pi - z)$ e $\sin z = \cos(\frac{1}{2}\pi - z)$, come pure $(\sin z)^2 + (\cos z)^2 = 1$. Oltre a queste denominazioni, sono da notare $\tan z$, che indica la tangente dell'arco z ; $\cot z$, la cotangente dell'arco z ; dalla trigonometria si sa che $\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$ e $\cot z = \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{1}{\tan z}$.

¹L'allineamento corretto è 3.1415926535897932384626433832795028841971693993751058209749445923078164062862089986280348253421170679821480865132⁸23066470938446... Nel testo stampato, al posto della cifra 8 c'è un 7. Nella traduzione in francese presente sul sito già citato, la cifra 7, errata, non è sottolineata. In "Hairer-Wanner, *L'analyse au fil de l'histoire*, Springer, 2001" a pagina 40 si legge che il valore riportato da Eulero è stato calcolato nel 1719 da T. F. de Lagny.

²Il simbolo π per la costante di Archimede è stato introdotto nel 1706 dal matematico inglese William Jones quando pubblicò "*A New Introduction to Mathematics*", benché lo stesso simbolo fosse stato utilizzato in precedenza per indicare la circonferenza del cerchio. La notazione diventò standard dopo che Eulero l'ebbe utilizzata. In entrambi i casi π è la prima lettera di *περιμετροσ* (*perimetros*), che significa "misura attorno" in greco. Inoltre il simbolo π venne usato all'inizio dallo stesso William Jones che, nel 1706 lo usò in onore di Pitagora (l'iniziale di Pitagora nell'alfabeto greco è appunto Π , ma, trattandosi di un numero, si preferisce usare la minuscola). Tuttavia, ancora nel 1739 Eulero usava il simbolo p . (http://it.wikipedia.org/wiki/Pi_greco#Storia).

128. Le formule di addizione e quelle che derivano dalle simmetrie

Si sa che se si hanno due archi y e z , sarà:

$$\sin(y + z) = \sin y \cdot \cos z + \cos y \cdot \sin z$$

$$\cos(y + z) = \cos y \cdot \cos z - \sin y \cdot \sin z$$

$$\sin(y - z) = \sin y \cdot \cos z - \cos y \cdot \sin z$$

$$\cos(y - z) = \cos y \cdot \cos z + \sin y \cdot \sin z$$

Sostituendo in queste formule alla y gli archi $\frac{1}{2}\pi, \pi, \frac{3}{2}\pi, \dots$ sarà:

$$\sin\left(\frac{1}{2}\pi + z\right) = +\cos z \qquad \sin\left(\frac{1}{2}\pi - z\right) = +\cos z$$

$$\cos\left(\frac{1}{2}\pi + z\right) = -\sin z \qquad \cos\left(\frac{1}{2}\pi - z\right) = +\sin z$$

$$\sin(\pi + z) = -\sin z \qquad \sin(\pi - z) = +\sin z$$

$$\cos(\pi + z) = -\cos z \qquad \cos(\pi - z) = -\cos z$$

$$\sin\left(\frac{3}{2}\pi + z\right) = -\cos z \qquad \sin\left(\frac{3}{2}\pi - z\right) = -\cos z$$

$$\cos\left(\frac{3}{2}\pi + z\right) = +\cos z \qquad \cos\left(\frac{3}{2}\pi - z\right) = -\cos z$$

$$\sin(2\pi + z) = +\sin z \qquad \sin(2\pi - z) = -\sin z$$

$$\cos(2\pi + z) = +\cos z \qquad \cos(2\pi - z) = +\cos z$$

Se dunque n indica un numero intero qualsiasi, sarà [all'argomento aggiunge un numero intero di giri, cioè $2n\pi$]:

$$\sin\left(\frac{4n+1}{2}\pi + z\right) = +\cos z \qquad \sin\left(\frac{4n+1}{2}\pi - z\right) = +\cos z$$

$$\cos\left(\frac{4n+1}{2}\pi + z\right) = -\sin z \qquad \cos\left(\frac{4n+1}{2}\pi - z\right) = +\sin z$$

$$\sin\left(\frac{4n+2}{2}\pi + z\right) = -\sin z \qquad \sin\left(\frac{4n+2}{2}\pi - z\right) = +\sin z$$

$$\cos\left(\frac{4n+2}{2}\pi + z\right) = -\cos z \qquad \cos\left(\frac{4n+2}{2}\pi - z\right) = -\cos z$$

$$\sin\left(\frac{4n+3}{2}\pi + z\right) = -\cos z \qquad \sin\left(\frac{4n+3}{2}\pi - z\right) = -\cos z$$

$$\cos\left(\frac{4n+3}{2}\pi + z\right) = +\cos z \qquad \cos\left(\frac{4n+3}{2}\pi - z\right) = -\cos z$$

$$\sin\left(\frac{4n+4}{2}\pi + z\right) = +\sin z \qquad \sin\left(\frac{4n+4}{2}\pi - z\right) = -\sin z$$

$$\cos\left(\frac{4n+4}{2}\pi + z\right) = +\cos z \qquad \cos\left(\frac{4n+4}{2}\pi - z\right) = +\cos z$$

Queste formule sono vere sia per un numero intero n positivo sia per uno negativo.

129. Formula ricorsiva per seni e coseni di archi in progressione aritmetica

Se $\sin z = p$ e $\cos z = q$ sarà $pp + qq = 1$; sia $\sin y = m$ e $\cos y = n$ in modo che valga anche $mm + nn = 1$; il seno e il coseno di archi composti con essi si ottengono così:

$$\begin{aligned}\sin z &= p \\ \sin(y+z) &= mq + np \\ \sin(2y+z) &= 2mnq + (nn - mm)p \\ \sin(3y+z) &= (3nm^2 - m^3)q + (n^3 - 3m^2n)p \\ &\dots\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\cos z &= q \\ \cos(y+z) &= nq - mp \\ \cos(2y+z) &= (nn - mm)q - 2mnp \\ \cos(3y+z) &= (n^3 - 3m^2n)q - (3mn^2 - m^3)p \\ &\dots\end{aligned}$$

Gli archi $z, y+z, 2y+z, 3y+z, \dots$ sono in progressione aritmetica; mentre i loro seni e coseni costituiscono una successione per ricorrenza³ simile a quella originata dal denominatore $1 - 2nx + (m^2 + n^2)x^2$; è infatti

$$\sin(2y+z) = 2n \cdot \sin(y+z) - (mm + nn) \sin z$$

³Cioè una formula ricorsiva (per ricorrenza) che esprime un elemento in funzione dei due precedenti. Nel capitolo IV dell'*Introductio — "De explicatione Functionum per series infinitas"* — Eulero presenta un metodo (che sostituisce quello per divisione continua, "*cum autem sit tediosa*") per esprimere una funzione fratta in una serie di potenze con esponente intero e con un numero infinito di termini: consiste nel considerare lo sviluppo con coefficienti generici, liberare dal denominatore e applicare il principio dell'uguaglianza dei coefficienti. Sia

$$\frac{N(z)}{D(z)} = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \dots + Pz^n + Qz^{n+1} + Rz^{n+2} + Sz^{n+3} + \dots$$

con il grado del numeratore minore di quello del denominatore. Eulero applica il procedimento dapprima a $\frac{a}{\alpha+\beta z}$, poi a $\frac{a+bz}{\alpha+\beta z+\gamma z^2}$ e all'esempio $\frac{1+2z}{1-z-z^2}$. Ne ricava la constatazione (paragrafo 62) che le serie infinite che derivano dalle funzioni fratte obbediscono alla legge seguente: ogni termine (coefficiente) può essere determinato conoscendo alcuni termini (coefficienti) già calcolati. Così per lo sviluppo di $\frac{a}{\alpha+\beta z}$ basta conoscere il primo coefficiente $A = \frac{a}{\alpha}$ (termine noto) perché due coefficienti consecutivi P e Q sono legati dalla relazione $\alpha Q + \beta P = 0$; per lo sviluppo della funzione $\frac{a+bz}{\alpha+\beta z+\gamma z^2}$ basta conoscere i primi due coefficienti $A = \frac{a}{\alpha}$ e $B = \frac{b}{\alpha} - \frac{a\beta}{\alpha^2}$ perché tre coefficienti consecutivi P, Q e R sono legati dalla relazione $\alpha R + \beta Q + \gamma P = 0$; per lo sviluppo di una funzione che ha a denominatore un quadrimio $\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3$ basta conoscere i primi tre coefficienti A, B, C perché un coefficiente S può essere calcolato conoscendo i tre che lo precedono grazie alla relazione $\alpha S + \beta R + \gamma Q + \delta P = 0$; e così di seguito.

La legge che permette di determinare ogni termine conoscendone alcuni che lo precedono è facilmente deducibile dal denominatore della frazione che produce la serie.

[...] Queste serie sono state chiamate, dal celebre de Moivre che ne ha studiato più particolarmente la natura, *ricorrenti*, poiché è necessario ricorrere ai termini che precedono se si vogliono conoscere quelli che seguono.

Da quanto precede, avendo trovato che $\sin(2y+z) = 2n \sin(y+z) - (m^2 + n^2) \sin z$, cioè che $1 \cdot \sin(2y+z) - 2n \sin(y+z) + (m^2 + n^2) \sin z = 0$, Eulero fa risaltare la ricorrenza, analoga a quella che si avrebbe sviluppando una frazione con denominatore $1 - 2nx + (m^2 + n^2)x^2$.

o piuttosto

$$\sin(2y + z) = 2 \cos y \cdot \sin(y + z) - \sin z$$

e in modo analogo

$$\cos(2y + z) = 2 \cos y \cdot \cos(y + z) - \cos z.$$

Allo stesso modo sarà poi

$$\sin(3y + z) = 2 \cos y \cdot \sin(2y + z) - \sin(y + z)$$

$$\cos(3y + z) = 2 \cos y \cdot \cos(2y + z) - \cos(y + z)$$

e anche

$$\sin(4y + z) = 2 \cos y \cdot \sin(3y + z) - \sin(2y + z)$$

$$\cos(4y + z) = 2 \cos y \cdot \cos(3y + z) - \cos(2y + z)$$

eccetera.

Grazie a queste leggi, chiunque lo desideri può ricavare velocemente seno e coseno di archi in progressione aritmetica.

130. Ricaviamo le formule di bisezione

Poiché

$$\sin(y + z) = \sin y \cos z + \cos y \sin z \quad \text{e} \quad \sin(y - z) = \sin y \cos z - \cos y \sin z,$$

aggiungendo o sottraendo membro a membro si ha:

$$\sin y \cdot \cos z = \frac{\sin(y + z) + \sin(y - z)}{2} \quad \text{e} \quad \cos y \cdot \sin z = \frac{\sin(y - z) - \sin(y + z)}{2}.$$

Inoltre, essendo

$$\cos(y + z) = \cos y \cos z - \sin y \sin z \quad \text{e} \quad \cos(y - z) = \cos y \cos z + \sin y \sin z,$$

si avrà anche

$$\cos y \cos z = \frac{\cos(y - z) + \cos(y + z)}{2} \quad \text{e} \quad \frac{\cos(y - z) - \cos(y + z)}{2}.$$

Ponendo ora $y = z = \frac{1}{2}v$, dalle ultime due formule si ricava:

$$(\cos \frac{1}{2}v)^2 = \frac{1 + \cos v}{2}, \quad \text{cioè} \quad \cos \frac{1}{2}v = \sqrt{\frac{1 + \cos v}{2}}$$

e

$$(\sin \frac{1}{2}v)^2 = \frac{1 - \cos v}{2}, \quad \text{cioè} \quad \sin \frac{1}{2}v = \sqrt{\frac{1 - \cos v}{2}}$$

per cui, noto il coseno di un angolo qualsiasi, si possono trovare seno e coseno della sua metà [“... unde, ex dato Cosinu cujusque anguli reperiuntur ejus semissis Sinus & Cosinus.”].

131. Formule di prostaferesi e altre

Si ponga l'arco $y + z = a$ e $y - z = b$; sarà $y = \frac{a+b}{2}$ e $z = \frac{a-b}{2}$; introducendoli nelle formule precedenti si avranno le seguenti uguaglianze:

$$\begin{aligned}\sin a + \sin b &= 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} & \sin a - \sin b &= 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2} \\ \cos a + \cos b &= 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} & \cos a - \cos b &= 2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}\end{aligned}$$

da qui, poi, dividendo, nascono i teoremi seguenti:

$$\begin{aligned}\frac{\sin a + \sin b}{\sin a - \sin b} &= \tan \frac{a+b}{2} \cot \frac{a-b}{2} = \frac{\tan \frac{a+b}{2}}{\tan \frac{a-b}{2}} \\ \frac{\sin a + \sin b}{\cos a + \cos b} &= \tan \frac{a+b}{2} & \frac{\sin a + \sin b}{\cos b - \cos a} &= \cot \frac{a-b}{2} \\ \frac{\sin a - \sin b}{\cos a + \cos b} &= \tan \frac{a-b}{2} & \frac{\sin a - \sin b}{\cos b - \cos a} &= \cot \frac{a+b}{2} \\ \frac{\cos a + \cos b}{\cos b - \cos a} &= \cot \frac{a+b}{2} \cot \frac{a-b}{2}.\end{aligned}$$

Da questi si deducono poi i teoremi seguenti:

$$\begin{aligned}\frac{\sin a + \sin b}{\cos a + \cos b} &= \frac{\cos b - \cos a}{\sin b - \sin a} \\ \frac{\sin a + \sin b}{\sin a - \sin b} \cdot \frac{\cos a + \cos b}{\cos b - \cos a} &= \cot^2 \frac{a-b}{2} \\ \frac{\sin a + \sin b}{\sin a - \sin b} \cdot \frac{\cos b - \cos a}{\cos a + \cos b} &= \tan^2 \frac{a+b}{2}.\end{aligned}$$

132. Se si introducono i numeri complessi...

Poiché $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$, scomponendo in fattori sarà

$$(\cos z + \sqrt{-1} \sin z)(\cos z - \sqrt{-1} \sin z) = 1;$$

questi fattori, anche se immaginari, sono di grande utilità per combinare e moltiplicare gli archi.

Se infatti si calcola il prodotto di fattori di questo tipo

$$(\cos z + \sqrt{-1} \sin z)(\cos y - \sqrt{-1} \sin y)$$

si ottiene

$$\cos y \sin z - \sin y \sin z + (\cos y \sin z + \sin y \cos z) \sqrt{-1}.$$

Essendo però

$$\cos y \sin z - \sin y \sin z = \cos(y+z) \quad \text{e} \quad \cos y \sin z + \sin y \cos z = \sin(y+z),$$

quel prodotto diventerà

$$(\cos y + \sqrt{-1} \sin y)(\cos z + \sqrt{-1} \sin z) = \cos(y+z) + \sqrt{-1} \sin(y+z)$$

e, analogamente,

$$(\cos y - \sqrt{-1} \sin y)(\cos z - \sqrt{-1} \sin z) = \cos(y+z) - \sqrt{-1} \sin(y+z).$$

Allo stesso modo si avrà anche

$$\begin{aligned} & (\cos x \pm \sqrt{-1} \sin x)(\cos y \pm \sqrt{-1} \sin y)(\cos z \pm \sqrt{-1} \sin z) = \\ & = \cos(x+y+z) \pm \sqrt{-1} \sin(x+y+z). \end{aligned}$$

133. La formula di de Moivre e sviluppi in serie

Da quanto precede, segue anche che [*i due fattori sono uguali*]:

$$(\cos z \pm \sqrt{-1} \sin z)^2 = \cos 2z \pm \sqrt{-1} \sin 2z$$

e

$$(\cos z \pm \sqrt{-1} \sin z)^3 = \cos 3z \pm \sqrt{-1} \sin 3z$$

e, più in generale;

$$(\cos z \pm \sqrt{-1} \sin z)^n = \cos nz \pm \sqrt{-1} \sin nz$$

[*è questa la formula di de Moivre, di cui però egli stesso scrisse nel 1698 che era nota a Newton perlomeno dal 1676.*]. Sommando le due formule riassunte nella precedente, si ottiene

$$\cos nz = \frac{(\cos z + \sqrt{-1} \sin z)^n + (\cos z - \sqrt{-1} \sin z)^n}{2}$$

e sottraendole

$$\sin nz = \frac{(\cos z + \sqrt{-1} \sin z)^n - (\cos z - \sqrt{-1} \sin z)^n}{2\sqrt{-1}}.$$

Sviluppando i binomi in serie [*per il coseno, le potenze dispari di i si annullano e le potenze pari valgono alternativamente -1 e 1*] sarà:

$$\begin{aligned} \cos nz &= (\cos z)^n - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} (\cos z)^{n-2} (\sin z)^2 + \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} (\cos z)^{n-4} (\sin z)^4 + \\ &- \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} (\cos z)^{n-6} (\sin z)^6 + \dots \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \sin nz &= \frac{n}{1} (\cos z)^{n-1} \sin z - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} (\cos z)^{n-3} (\sin z)^3 + \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} (\cos z)^{n-5} (\sin z)^5 - \dots \end{aligned}$$

[Secondo Hairer–Wanner, p. 45, questa formula è stata trovata da de Moivre nel 1730; con Eulero siamo nel 1748.].

134. Sviluppi in serie di sin e cos e applicazione al calcolo

Sia l'arco z infinitamente piccolo, sarà $\sin z = z$ e $\cos z = 1$; sia poi n un numero infinitamente grande scelto in modo che nz sia di grandezza finita, per esempio $nz = v$; poiché $\sin z = z = \frac{v}{n}$, sarà [inserendo negli sviluppi precedenti $nz = v$ e le approssimazioni $\sin z = z$ e $\cos z = 1$ le potenze di \cos sono 1; nei fattori con \sin , le frazioni $\frac{n(n-1)}{n^2}$, $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{n^4}$, ... vengono poste uguali a 1, che è il limite se $n \rightarrow \infty$]

$$\cos v = 1 - \frac{v^2}{1 \cdot 2} + \frac{v^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{v^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \dots$$

e

$$\sin v = v - \frac{v^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{v^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{v^7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \dots$$

Dato dunque l'arco v , per mezzo di queste serie se ne possono trovare il seno e il coseno; per rendere più chiaro l'uso di queste formule, supponiamo che l'arco v stia al quadrante, cioè a 90° [Eulero scrive 90° , ma sostituisce il valore di π], come m sta a n , cioè che sia $v = \frac{m}{n} \cdot \frac{\pi}{2}$. Poiché il valore di π è noto, se lo sostituiamo dappertutto otteniamo:

$$\begin{aligned} \sin \frac{m}{n} 90^\circ &= \frac{m}{n} \cdot 1.5707963267948966192313216916 \\ &- \frac{m^3}{n^3} \cdot 0.6459640975062462536557565636 \\ &+ \frac{m^5}{n^5} \cdot 0.0796926262461670451205055488 \\ &- \frac{m^7}{n^7} \cdot 0.0046817541353186881006854632 \\ &+ \frac{m^9}{n^9} \cdot 0.0001604411847873598218726605 \\ &- \frac{m^{11}}{n^{11}} \cdot 0.0000035988432352120853404580 \\ &+ \frac{m^{13}}{n^{13}} \cdot 0.0000000569217292196792681171 \\ &- \frac{m^{15}}{n^{15}} \cdot 0.0000000006688035109811467224 \\ &+ \frac{m^{17}}{n^{17}} \cdot 0.0000000000060669357311061950 \\ &- \frac{m^{19}}{n^{19}} \cdot 0.000000000000437706546731370 \\ &+ \frac{m^{21}}{n^{21}} \cdot 0.000000000000002571422892856 \\ &- \frac{m^{23}}{n^{23}} \cdot 0.000000000000000012538995403 \\ &+ \frac{m^{25}}{n^{25}} \cdot 0.00000000000000000051564550 \\ &- \frac{m^{27}}{n^{27}} \cdot 0.0000000000000000000181239 \\ &+ \frac{m^{29}}{n^{29}} \cdot 0.00000000000000000000000549 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\cos \frac{m}{n}90^\circ &= 1.00000000000000000000000000000000 \\ &- \frac{m^2}{n^2} \cdot 1.2337005501361698273543113745 \\ &+ \frac{m^4}{n^4} \cdot 0.2536695079010480136365633659 \\ &- \frac{m^6}{n^6} \cdot 0.0208634807633529608730516364 \\ &+ \frac{m^8}{n^8} \cdot 0.0009192602748394265802417158 \\ &- \frac{m^{10}}{n^{10}} \cdot 0.0000252020423730606054810526 \\ &+ \frac{m^{12}}{n^{12}} \cdot 0.0000004710874778818171503665 \\ &- \frac{m^{14}}{n^{14}} \cdot 0.0000000063866030837918522408 \\ &+ \frac{m^{16}}{n^{16}} \cdot 0.0000000000656596311497947230 \\ &- \frac{m^{18}}{n^{18}} \cdot 0.0000000000005294400200734620 \\ &+ \frac{m^{20}}{n^{20}} \cdot 0.0000000000000034377391790981 \\ &- \frac{m^{22}}{n^{22}} \cdot 0.0000000000000000183599165212 \\ &+ \frac{m^{24}}{n^{24}} \cdot 0.000000000000000000820675327 \\ &- \frac{m^{26}}{n^{26}} \cdot 0.000000000000000000003115285 \\ &+ \frac{m^{28}}{n^{28}} \cdot 0.000000000000000000000010165 \\ &- \frac{m^{30}}{n^{30}} \cdot 0.000000000000000000000000026\end{aligned}$$

[Poiché nell'originale in latino l'impaginazione è infelice (su due pagine e con righe non orizzontali per via della riproduzione), i calcoli per il seno e il coseno sono stati ricavati dalla traduzione in francese presente sul sito <http://www.math.dartmouth.edu/~euler/>].

Poiché basta conoscere seno e coseno degli angoli fino a 45° [sul cerchio goniometrico si può vedere molto bene, grazie alle simmetrie rispetto agli assi e alla prima bisettrice: vedi anche la disposizione grafica della tavola per i rapporti trigonometrici di angoli particolari.], la frazione $\frac{m}{n}$ sarà sempre minore di $\frac{1}{2}$ e, poiché lo stesso vale per le potenze della frazione $\frac{m}{n}$, la convergenza delle serie mostrate è rapida [“... Series exhibitae maxime convergent... ”], al punto che bastano spesso pochi termini, soprattutto se per il seno e il coseno non si desiderano tante cifre.

135. E per tangente e cotangente?

Trovati seni e coseni, si possono trovare tangenti e cotangenti per mezzo delle consuete relazioni ma poiché in quel modo grande è la molestia di moltiplicare e dividere numeri grandi [“... at quia hujusmodi ingentibus numeris multiplicatio & divisio vehementer est molesta... ”], conviene esprimere queste [tangenti

e cotangenti] in un modo particolare. Sarà dunque:

$$\tan v = \frac{v - \frac{v^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{v^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{v^7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \dots}{1 - \frac{v^2}{1 \cdot 2} + \frac{v^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{v^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \dots}$$

e

$$\cot v = \frac{1 - \frac{v^2}{1 \cdot 2} + \frac{v^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{v^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \dots}{v - \frac{v^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{v^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{v^7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \dots}.$$

[Siccome queste formule sono pesanti da usare, Eulero propone un altro metodo di calcolo che dimostrerà più tardi; nella traduzione in francese presente sul sito si legge: "On expliquera plus au long dans la suite la formation de ces dernières séries. Voyez art. 197 et suiv.". Ed ecco l'altro metodo.]

Se ora prendiamo un arco $v = \frac{m}{n}90^\circ$, allo stesso modo di prima si avrà:

$$\begin{aligned} \tan \frac{m}{n}90^\circ &= \frac{2mn}{n^2 - m^2} \cdot 0.6366197723675 \\ &+ \frac{m}{n} \cdot 0.2975567820597 \\ &+ \frac{m^3}{n^3} \cdot 0.0186886502773 \\ &+ \frac{m^5}{n^5} \cdot 0.0018424752034 \\ &+ \frac{m^7}{n^7} \cdot 0.0001975800714 \\ &+ \frac{m^9}{n^9} \cdot 0.0000216977245 \\ &+ \frac{m^{11}}{n^{11}} \cdot 0.0000024011370 \\ &+ \frac{m^{13}}{n^{13}} \cdot 0.0000002664132 \\ &+ \frac{m^{15}}{n^{15}} \cdot 0.0000000295864 \\ &+ \frac{m^{17}}{n^{17}} \cdot 0.0000000032867 \\ &+ \frac{m^{19}}{n^{19}} \cdot 0.0000000003651 \\ &+ \frac{m^{21}}{n^{21}} \cdot 0.0000000000405 \\ &+ \frac{m^{23}}{n^{23}} \cdot 0.0000000000045 \\ &+ \frac{m^{25}}{n^{25}} \cdot 0.0000000000005 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\cot \frac{m}{n} 90^\circ &= \frac{n}{m} \cdot 0.6366197723675 \\
&- \frac{4mn}{4n^2 - m^2} \cdot 0.3183098861837 \\
&+ \frac{m}{n} \cdot 0.2052888894145 \\
&+ \frac{m^3}{n^3} \cdot 0.0065510747882 \\
&+ \frac{m^5}{n^5} \cdot 0.0003450292554 \\
&+ \frac{m^7}{n^7} \cdot 0.0000202791060 \\
&+ \frac{m^9}{n^9} \cdot 0.0000012366527 \\
&+ \frac{m^{11}}{n^{11}} \cdot 0.0000000764959 \\
&+ \frac{m^{13}}{n^{13}} \cdot 0.0000000047597 \\
&+ \frac{m^{15}}{n^{15}} \cdot 0.0000000002969 \\
&+ \frac{m^{17}}{n^{17}} \cdot 0.0000000000185 \\
&+ \frac{m^{19}}{n^{19}} \cdot 0.0000000000011
\end{aligned}$$

La ragione [*formazione*] di queste serie viene esposta più diffusamente in seguito [*nella traduzione in francese: vedi punto 197 e seguenti. Ma il punto 197 rimanda al punto 181, e questo risale ancora più indietro*].

136–137. Ancora artifici per ridurre i calcoli

Da quanto precede si sa che, se fossero conosciuti seno e coseno di tutti gli angoli minori di un semiretto [45°], si avrebbero contemporaneamente seno e coseno di tutti gli angoli maggiori. È altrettanto vero che, avendo il seno e il coseno degli angoli minori di 30° , si possono trovare, usando solo addizioni e sottrazioni, seno e coseno di tutti gli angoli maggiori. Essendo infatti

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2},$$

posto $y = 30^\circ$, dal paragrafo **130** si otterrà

$$\cos z = \sin(30^\circ + z) + \sin(30^\circ - z)$$

e

$$\sin z = \cos(30^\circ - z) - \cos(30^\circ + z)$$

e perciò [*ideoque*] dai seni e coseni degli angoli z e $30^\circ - z$ si trovano

$$\sin(30^\circ + z) = \cos z - \sin(30^\circ - z)$$

e

$$\cos(30^\circ + z) = \cos(30^\circ - z) - \sin z,$$

cioè vengono definiti il seno e il coseno degli angoli da 30° a 30° , e da qui tutti i maggiori.

Similmente si procede per le tangenti e le cotangenti. Essendo infatti

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b'}$$

sarà

$$\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan a \cdot \tan a'}$$

e

$$\cot 2a = \frac{\cot a - \tan a}{2},$$

per cui, dalle tangenti e cotangenti degli archi minori di 30° si ricavano le cotangenti fino a 60° .

Se infatti è $a = 30^\circ - b$, sarà $2a = 60^\circ - 2b$ e $\cot 2a = \tan(30^\circ + 2b)$; dunque sarà

$$\cot 2a = \tan(30^\circ + 2b) = \frac{\cot(30^\circ - b) - \tan(30^\circ - b)}{2}$$

da cui otteniamo le tangenti degli angoli maggiori di 30° .

Secanti e cosecanti si possono trovare dalle tangenti unicamente mediante sottrazioni; è infatti

$$\csc z = \cot \frac{1}{2}z - \cot z$$

e quindi

$$\sec z = \cot(45^\circ - \frac{1}{2}z) - \tan z.$$

Da qui dunque si può vedere perfettamente in che modo possono essere costruite le tavole dei seni.

138. Seni e coseni di archi reali e quantità esponenziali immaginarie

Si ponga di nuovo nelle formule del paragrafo 133,

$$\cos nz = \frac{(\cos z + \sqrt{-1} \sin z)^n + (\cos z - \sqrt{-1} \sin z)^n}{2}$$

e

$$\sin nz = \frac{(\cos z + \sqrt{-1} \sin z)^n - (\cos z - \sqrt{-1} \sin z)^n}{2\sqrt{-1}}$$

l'arco z infinitamente piccolo e per n un numero infinitamente grande i in modo che iz abbia un valore finito v . Sarà dunque $nz = v$ e $z = \frac{v}{i}$, da cui $\sin z = \frac{v}{i}$ e $\cos z = 1$; sostituendo:

$$\cos v = \frac{\left(1 + \frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i + \left(1 - \frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i}{2}$$

e

$$\sin v = \frac{\left(1 + \frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i - \left(1 - \frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i}{2\sqrt{-1}}.$$

Ma nel capitolo precedente⁴ abbiamo visto essere $(1 + \frac{z}{i})^i = e^z$, in cui e indica la base dei logaritmi iperbolici [sono i logaritmi naturali]: scritto dunque per z una volta $+v\sqrt{-1}$ e una volta $-v\sqrt{-1}$, si avrà:

$$\cos v = \frac{e^{+v\sqrt{-1}} + e^{-v\sqrt{-1}}}{2}$$

e

$$\sin v = \frac{e^{+v\sqrt{-1}} - e^{-v\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}.$$

Da qui si capisce in che modo quantità esponenziali immaginarie si riconducano al seno e al coseno di archi reali.⁵

139. Seni e coseni di archi reali e logaritmi immaginari

In quelle stesse formule del paragrafo 133 [nel testo, erroneamente paragrafo 130, corretto nella versione francese],

$$\cos nz = \frac{(\cos z + \sqrt{-1} \sin z)^n + (\cos z - \sqrt{-1} \sin z)^n}{2}$$

e

$$\sin nz = \frac{(\cos z + \sqrt{-1} \sin z)^n - (\cos z - \sqrt{-1} \sin z)^n}{2\sqrt{-1}},$$

sia ora n un numero infinitamente piccolo, ad esempio $n = \frac{1}{i}$, dove i è un numero infinitamente grande; sarà $\cos nz = \cos \frac{z}{i} = 1$ e $\sin nz = \sin \frac{z}{i} = \frac{z}{i}$; infatti per l'arco che tende a zero il seno è uguale all'arco e il coseno è uguale a 1 ["*Arcus enim evanescentis $\frac{z}{i}$ Sinus est ipsi aequalis, Cosinus vero = 1*"]. Si avrà allora:

$$1 = \frac{(\cos z + \sqrt{-1} \cdot \sin z)^{1/i} + (\cos z - \sqrt{-1} \cdot \sin z)^{1/i}}{2}$$

e

$$\frac{1}{i} = \frac{(\cos z + \sqrt{-1} \cdot \sin z)^{1/i} - (\cos z - \sqrt{-1} \cdot \sin z)^{1/i}}{2\sqrt{-1}}.$$

Ma introducendo i logaritmi iperbolici, prima (vedi paragrafo 125) abbiamo mostrato che

$$\ln(1+x) = i \cdot (1+x)^{1/i} - i$$

oppure, messo y al posto di $1+x$, che

$$y^{1/i} = 1 + \frac{1}{i} \ln y.$$

⁴Paragrafo 115: $a^z = (1 + \frac{kz}{i})^j$; e paragrafo 122: "scegliendo la base dei logaritmi in modo tale che sia $k = 1$ ".

⁵Combinando le due formule si ottiene $\cos v + \sqrt{-1} \sin v = e^{v\sqrt{-1}}$, cioè la ben nota formula $\cos z + i \cdot \sin z = e^{iz}$, da cui si ricava, nel caso particolare $z = \pi$, la relazione $e^{i\pi} = -1$, o se si preferisce $e^{i\pi} + 1 = 0$, in cui i è l'unità immaginaria.

Ora dunque, ponendo al posto di y una volta $\cos z + \sqrt{-1} \cdot \sin z$ e una volta $\cos z - \sqrt{-1} \cdot \sin z$, si ha

$$1 = \frac{1 + \frac{1}{i} \ln(\cos z + \sqrt{-1} \cdot \sin z) + 1 + \frac{1}{i} \ln(\cos z - \sqrt{-1} \cdot \sin z)}{2};$$

ma siccome i logaritmi tendono a zero [*“ob Logarithmos evanescentes”*] si ottiene $1 = 1$ e non si può concludere niente. In realtà, basta l'altra relazione, quella per il seno, che dà

$$\frac{z}{i} = \frac{\frac{1}{i} \ln(\cos z + \sqrt{-1} \cdot \sin z) - \frac{1}{i} \ln(\cos z - \sqrt{-1} \cdot \sin z)}{2\sqrt{-1}}$$

e perciò⁶

$$z = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \ln \frac{\cos z + \sqrt{-1} \cdot \sin z}{\cos z - \sqrt{-1} \cdot \sin z}.$$

Da qui appare chiaramente in che modo i logaritmi immaginari siano riconducibili agli archi circolari.

140. La serie dell'arcotangente e una serie di trovata da Leibniz

Essendo $\frac{\sin z}{\cos z} = \tan z$, l'arco z può essere espresso attraverso la sua tangente come segue:

$$z = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \ln \frac{1 + \sqrt{-1} \cdot \tan z}{1 - \sqrt{-1} \cdot \tan z}$$

[basta dividere per $\cos z$ numeratore e denominatore nell'espressione indicata sopra]. Poiché in precedenza [paragrafo 123] abbiamo visto che

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = \frac{2x}{1} + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \frac{2x^7}{7} + \dots,$$

posto $x = \sqrt{-1} \cdot \tan z$, si otterrà

$$\begin{aligned} \ln \frac{1 + \sqrt{-1} \cdot \tan z}{1 - \sqrt{-1} \cdot \tan z} &= \frac{2\sqrt{-1} \cdot \tan z}{1} + \frac{-2\sqrt{-1} \cdot (\tan z)^3}{3} + \frac{2\sqrt{-1} \cdot (\tan z)^5}{5} + \\ &+ \frac{-2(\sqrt{-1} \cdot \tan z)^7}{7} + \dots \end{aligned}$$

Dividendo per $2\sqrt{-1}$ si ottiene dunque

$$z = \frac{\tan z}{1} - \frac{(\tan z)^3}{3} + \frac{(\tan z)^5}{5} - \frac{(\tan z)^7}{7} + \dots$$

Se dunque poniamo $\tan z = t$, dove z è l'arco la cui tangente è t , che indicheremo con $\arctan t$, sarà $z = \arctan t$. Dunque, nota la tangente t , l'arco corrispondente sarà

$$\arctan t = z = \frac{t}{1} - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + \frac{t^9}{9} + \dots$$

⁶Moltiplicando per i e applicando un teorema sui logaritmi.

Poiché, se la tangente t è uguale al raggio 1 è $\arctan z = \arctan 45^\circ$ ossia $z = \frac{\pi}{4}$, la serie diventa

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots,$$

che è la serie che fu prodotta per primo da Leibniz per esprimere il valore della circonferenza.

141, 142. Dalle preoccupazioni per una convergenza rapida ad una nuova serie per π

Ma affinché con serie di questo genere si possa definire rapidamente la lunghezza di un arco di circonferenza, è evidente che alla tangente t si debbano sostituire frazioni abbastanza piccole⁷. Così, per mezzo di quella serie, si determina facilmente la lunghezza dell'arco z la cui tangente vale $\frac{1}{10}$, che sarebbe $z = \frac{1}{10} - \frac{1}{3000} + \frac{1}{50000} + \dots$, e il valore di tale serie può essere approssimato con dei decimali senza troppa difficoltà. Ma in verità, dalla conoscenza di un tale arco non è lecito concludere alcunché per la lunghezza dell'intera circonferenza, poiché il rapporto tra l'arco la cui tangente è $= \frac{1}{10}$ e l'intera circonferenza non è assegnabile.

Per questo motivo, per cercare il contorno [*del cerchio*] occorre cercare un arco che sia nello stesso tempo una parte aliquota del contorno e che abbia una tangente abbastanza piccola da poter essere espressa comodamente. Di solito si sceglie l'arco di 30° , la cui tangente è $\frac{1}{\sqrt{3}}$, poiché le tangenti di archi più piccoli commisurabili con il contorno risultano troppo irrazionali [*"nimis fiunt irrationales"*]. Perciò, per l'arco di $30^\circ = \frac{\pi}{6}$, sarà

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3 \cdot 3\sqrt{3}} + \frac{1}{5 \cdot 3^2\sqrt{3}} - \dots,$$

e

$$\pi = \frac{2\sqrt{3}}{1} - \frac{2\sqrt{3}}{3 \cdot 3} + \frac{2\sqrt{3}}{5 \cdot 3^2} - \frac{2\sqrt{3}}{7 \cdot 3^3} + \dots$$

Ed è facendo uso di questa serie che è stato determinato, con una fatica incredibile [*"incredibili labore"*], il valore di π indicato in precedenza [*vedi il paragrafo 126, il primo di questo capitolo*].

La fatica è stata tanto più grande poiché in primo luogo tutti i termini sono irrazionali, poi perché ogni termine non è molto più piccolo del precedente, ma è circa la sua terza parte.

Ma a questo inconveniente si può ovviare: si assuma l'arco di 45° o $\frac{\pi}{4}$, il cui valore, anche se espresso attraverso la serie a malapena convergente

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots,$$

può essere tuttavia ritenuto e ripartito su due archi a e b con

$$a + b = \frac{\pi}{4} = 45^\circ.$$

⁷La serie dell'arcotangente converge se $|z| \leq 1$.

Poiché è

$$\tan(a + b) = 1 = \frac{\tan a + \tan b}{1 + \tan a \cdot \tan b},$$

sarà

$$1 - \tan a \cdot \tan b = \tan a + \tan b$$

e

$$\tan b = \frac{1 - \tan a}{1 + \tan a}.$$

Sia ora $\tan a = \frac{1}{2}$; sarà $\tan b = \frac{1}{3}$, quindi entrambi gli archi a e b saranno espressi con una serie razionale molto più convergente di quella sopra, e la somma delle due darà il valore dell'arco di $\frac{\pi}{4}$. Sarà dunque

$$\pi = 4 \cdot \begin{cases} \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} - \frac{1}{7 \cdot 2^7} + \frac{1}{9 \cdot 2^9} - \dots \\ \frac{1}{1 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} - \frac{1}{7 \cdot 3^7} + \frac{1}{9 \cdot 3^9} - \dots \end{cases}$$

La lunghezza della semicirconferenza π può dunque essere trovata molto più speditamente in questo modo di quanto non sia stato fatto servendosi della serie ricordata prima.