Eulero e il calcolo di π

Series maxime idoneae pro circuli quadratura proxime invenienda

Commissione di Matematica della Svizzera Italiana
2008

Pi greco

È degno di ammirazione il Pi greco
tre virgola uno quattro uno.
Anche tutte le sue cifre successive sono iniziali,
cinque nove due, poiché non finisce mai.
Non si lascia abbracciare *sei cinque tre cinque* dallo sguardo,
otto nove, dal calcolo,
sette nove dall'immaginazione,
e nemmeno *tre due tre otto* dallo scherzo, ossia dal paragone
quattro sei con qualsiasi cosa
due sei quattro tre al mondo.
Il serpente più lungo della terra dopo vari metri s'interrompe.
Lo stesso, anche se un po' dopo, fanno i serpenti delle fiabe.
Il corteo di cifre che compongono il Pi greco
non si ferma sul bordo della pagina,
è capace di srotolarsi sul tavolo, nell'aria,
attraverso il muro, la foglia, il nido, le nuvole, diritto fino al cielo,
per quanto è gonfio e senza fondo il cielo.
Quanto è corta la treccia della cometa, proprio un codino!
Com'è tenue il raggio della stella, che si curva a ogni spazio!
E invece qui *due tre quindici trecentodiciannove*
il mio numero di telefono il tuo numero di collo
l'anno millenovecentosettantatré sesto piano
il numero degli inquilini sessantacinque centesimi
la misura dei fianchi due dita sciarada e cifra
in cui *vola e canta usignolo mio*
oppure *si prega di mantenere la calma*,
e *anche la terra e il cielo passeranno*,
ma non il Pi greco, oh no, niente da fare,
esso sta lì con il suo *cinque* ancora passabile,
un *otto* niente male,
un *sette* non ultimo,
incitando, ah, incitando l'indolente
eternità
a durare.

WISŁAWA SZYMBORSKA*

*Wisława Szymborska, nata il 2 luglio 1923 a Bnin (Kórnik, Polonia), premio Nobel per la letteratura nel 1996: "*Per la capacità poetica che con ironica precisione permette al contesto storico e ambientale di venire alla luce in frammenti di umana realtà*". La poesia risale al 1976 ed è tratta dal libro di poesie *Vista con granello di sabbia* (Adelphi, Milano, 1998, pp. 143–144).

Introduzione

Nel capitolo VIII dell'*Introductio analysin infinitorum*, ai paragrafi 141 e 142 (vedi la scheda sul capitolo VIII), Eulero ha esposto le difficoltà che derivano dall'uso tradizionale della serie dell'arcotangente[1] per la determinazione di π (e cioè l'applicazione al caso $x = \frac{\pi}{6}$) e suggerito uno stratagemma per evitarle.

In questo documento, catalogato come E809 e intitolato *Series maxime idoneae pro circuli quadratura proxime invenienda*[2], che si può leggere in originale nel sito `http://www.math.dartmouth.edu/~euler/`, Eulero spiega per esteso le sue riserve e illustra con un certo qual vanto le sue proposte di miglioramento.

Nell'appendice viene mostrato come si determina il valore esatto di $\tan 18^\circ$, citato da Eulero nel punto 2. del documento E809.

Per alleggerire la parte matematica useremo le notazioni moderne, in particolare:

- al posto di Ang. scriveremo arc (per esempio al posto di Ang. $\tan$ scriveremo $\arctan$);
- al posto di xx scriveremo x^2, al posto di tt scriveremo t^2;
- al posto di etc. scriveremo ...

Inoltre, per facilitare la lettura sono state inserite delle note: esse sono riconoscibili poiché sono state scritte in corsivo e tra parentesi quadre.

La traduzione è stata rivista dal prof. Vittore Nason, docente di latino e greco del Liceo cantonale di Locarno.

[1] Per $|x| \leq 1$ vale:

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

Questo sviluppo è stato scoperto nel 1671 dal matematico scozzese James Gregory (1638–1675). Tre anni più tardi Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) riscoprì indipendentemente la serie dell'arcotangente e la pubblicò insieme al caso speciale $x = 1$, ottenendo così un'espressione per π. Nella corrispondenza di Gregory non c'è alcun accenno a questo calcolo.

[2] Pubblicato originariamente in *Opera Postuma 1*, 1862, pp. 288–298; reperibile in *Opera Omnia*, Volume 16, pp. 267–283.

Serie massimamente idonee per trovare la quadratura del cerchio per approssimazione

1. Prima che fossero conosciuti i princìpi dell'analisi degli infiniti, non esisteva altra via per indagare il rapporto tra la circonferenza e il diametro all'infuori della considerazione di poligoni iscritti e circoscritti al cerchio. Da lì Archimede per primo trasse il notissimo rapporto $\frac{22}{7}$ [*dà π con due cifre decimali esatte*] e Metius[3] quello di $\frac{355}{113}$ più vicino al vero [*dà π con 6 cifre decimali esatte*]; finché infine Ludolf van Ceulen[4] ("*Ludolfus a Ceulen*") produsse quel rapporto con 35 cifre decimali, ed è certamente lecito che altri possano proseguire la noiosissima fatica. Poiché però, grazie all'analisi degli infiniti, si conoscono serie che esprimono il rapporto tra il diametro e la circonferenza, da altri quel rapporto è stato calcolato con molta meno fatica e con più decimali: da Sharp[5] ("*a Scharpio*") ne sono stati calcolati 72, da Machin[6] ("*a Machino*") 100 e da Lagny[7] ("a Lagnio") 128; e se si calcolasse con questo valore la circonferenza del cerchio il cui diametro è maggiore della distanza tra le due stelle fisse più lontane, non si sbaglierebbe neppure di un millesimo di pollice[8].

2. Questi assidui calcolatori, la cui abilità merita lode e ammirazione, usano la serie che definisce un arco a partire dalla sua tangente, così che posta la tangente uguale a t ed essendo il raggio uguale a 1, l'arco corrispondente sia uguale a

$$t - \tfrac{1}{3}t^3 + \tfrac{1}{5}t^5 - \tfrac{1}{7}t^7 + \tfrac{1}{9}t^9 - \cdots ;$$

[3] Adriaan Adriaanszoon, noto come Metius, 1571–1635, matematico olandese. Nel 1585 suo padre espresse un'approssimazione di π tramite il numero frazionario $\frac{355}{113} = 3.14159292\ldots$ Metius pubblicò la scoperta, ed il numero $\frac{355}{113}$ è ancora oggi noto come *numero di Metius* (confronta Wikipedia).

[4] Ludolph van Ceulen, 1540–1610, matematico tedesco. Nel 1600 divenne il primo professore di matematica dell'Università di Leida. Spese gran parte della sua vita nel calcolo di π applicando essenzialmente l'algoritmo usato da Archimede per approssimare la circonferenza con dei poligoni regolari, arrivando ad usare poligoni con 2 miliardi di lati. Pubblicò nel suo libro *Von de circle* (Sul cerchio) del 1596 un valore di π con 20 cifre decimali. Successivamente portò il numero delle cifre a 35. Il valore ottenuto in questo caso era 3.14159265358979323846264338327950288 (confronta Wikipedia).

[5] Abraham Sharp, 1651–1742, maestro e contabile inglese. Per le sue vaste conoscenze in matematica e in astronomia fu invitato nel 1688 presso l'Osservatorio reale di Greenwich, dove, tra le altre cose, compilò tavole sul moto dei satelliti di Giove e perfezionò alcuni strumenti. Nel 1699 calcolò 72 cifre di π servendosi della serie di Gregory con $x = \sqrt{3}$ (per ulteriori informazioni sulla vita e le opere di Abraham Sharp vedi il sito web `http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Sharp.html`).

[6] John Machin, 1680(?)–1751, professore di astronomia inglese. È noto per avere sviluppato nel 1706 una formula per π con cui determinò 100 cifre decimali: $\frac{\pi}{4} = 4 \cdot \arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}$ (per il calcolo degli arctan si servì della serie di Gregory) (confronta Wikipedia).

[7] Thomas Fantet de Lagny, 1660–1734, matematico francese. Corresse il calcolo di Sharp e determinò 128 cifre di π, di cui però solo 112 corrette (vedi anche la nota 1 nella scheda sul numero π).

[8] Un millesimo di pollice (*inch*) equivale a $2.54 \cdot 10^{-5}$ m.

la qual serie potrebbe essere resa convergente al massimo se la tangente t potesse essere diminuita a piacere. In verità, poiché non si può dedurre da qui il rapporto tra il diametro e la circonferenza se non si conosce il rapporto tra l'arco e l'intera circonferenza, è a malapena lecito accettare a questo scopo l'arco minore di 30° la cui tangente è $\frac{1}{\sqrt{3}}$; per cui, se π è la circonferenza del cerchio di diametro uguale a 1, si ha

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left(1 - \frac{1}{3\cdot 3} + \frac{1}{5\cdot 3^2} - \frac{1}{7\cdot 3^3} + \frac{1}{9\cdot 3^4} - \frac{1}{11\cdot 3^5} + \cdots\right)$$

ossia

$$\pi = \left(1 - \frac{1}{3\cdot 3} + \frac{1}{5\cdot 3^2} - \frac{1}{7\cdot 3^3} + \frac{1}{9\cdot 3^4} - \frac{1}{11\cdot 3^5} + \cdots\right) \cdot \sqrt{12}.$$

Anche se l'angolo di 18°, la cui tangente è $\sqrt{1 - 2\sqrt{\frac{1}{5}}}$ [*vedi appendice*], rende la serie molto più convergente, tuttavia la doppia irrazionalità rende il calcolo così gravoso, che non si può sperare di ridurre di molto la difficoltà con angoli più piccoli.

3. Infatti l'espertissimo calcolatore Lagny, che ha lavorato a lungo su questo calcolo, ha ritenuto preferibile l'angolo di 30° a quelli più piccoli; oltre tutto, prima di poter svolgere i termini della sua serie, è stato costretto a determinare più di 128 cifre decimali esatte della radice quadrata di 12; e questo lavoro non lo poté certamente svolgere in meno di 12 ore, in realtà credo che l'autore ci sudasse sopra per qualche giorno, poiché una simile somma richiede la revisione delle operazioni, una costante attenzione e qualche pausa di riposo. Effettuato questo lavoro, ha dovuto svolgere almeno 265 termini di quella serie; cioè il numero $\sqrt{12}$ espresso con 128 cifre decimali ha dovuto essere diviso 265 volte per 3 [*vedi in seguito l'impostazione del calcolo*] e se per trovare e scrivere ogni cifra avesse impiegato un minuto secondo, sarebbero bastate a malapena cinque ore. Poi era necessario dividere i singoli quoti per i numeri dispari $3, 5, 7, 9, 11, 13, \ldots$ e questo lavoro, essendo i divisori sempre più grandi, richiese almeno un tempo doppio, cioè 10 ore. In seguito l'addizione dei termini positivi e di quelli negativi comporta per ognuna non meno di 5 ore: in totale dunque il calcolo non può essere stato fatto con meno di 37 ore di lavoro molto diligente. Ma non c'è dubbio che l'autore abbia speso un tempo doppio o triplo.

4. Ma già in precedenza[9] ho mostrato come si possa alleggerire di molto e in modo mirabile questo lavoro dividendo l'angolo retto in due o più parti le cui tangenti siano razionali. Essendo[10]

$$\frac{\pi}{4} = \arctan 1 = \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3},$$

sarà per le due serie:

$$\pi = +\,2 \cdot \left(1 - \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{5\cdot 4^2} - \frac{1}{7\cdot 4^3} + \frac{1}{9\cdot 4^4} - \cdots\right) + $$
$$+\,\frac{4}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{3\cdot 9} + \frac{1}{5\cdot 9^2} - \frac{1}{7\cdot 9^3} + \frac{1}{9\cdot 9^4} - \cdots\right),$$

[9] Ad esempio nel capitolo VIII dell'*Introductio* ai paragrafi 141 e 142 (vedi la scheda).
[10] Per dimostrare la formula, basta determinare la tangente dei due membri.

la prima di esse converge più della precedente legata all'angolo di 30° e in nessuna delle due è necessaria un'estrazione di radice, che da sola nel calcolo precedente ha richiesto 12 ore di lavoro. E poi, almeno i primi termini di entrambe le serie vengono svolti con un lavoro molto minore perché o constano di poche cifre o di cifre che si ripetono, per cui il calcolo diventa molto più rapido. Però anche se qui è opportuno unire insieme le due serie in un'unica somma, tuttavia siccome c'è maggiore convergenza, sono necessari molti meno termini: così, se desideriamo per π una frazione decimale che abbia 128 cifre corrette, con la prima serie ci vogliono 210 termini e con la seconda solo 132, così che il lavoro precedentemente stimato richiede a malapena 24 ore.

5. Quindi da quel principio, essendo in generale[11]

$$\arctan\tfrac{1}{a} = \arctan\tfrac{1}{b} + \arctan\tfrac{b-a}{ab+1}$$

possiamo ricavare che

$$\arctan\tfrac{1}{2} = \arctan\tfrac{1}{3} + \arctan\tfrac{1}{7}$$

e quindi [*sostituendo nella prima relazione del punto 4.*] che

$$\tfrac{\pi}{4} = 2 \cdot \arctan\tfrac{1}{3} + \arctan\tfrac{1}{7},$$

da cui, essendo le due serie più convergenti, sarà

$$\begin{aligned}\pi = &+ \tfrac{8}{3} \cdot \left(1 - \tfrac{1}{3 \cdot 9} + \tfrac{1}{5 \cdot 9^2} - \tfrac{1}{7 \cdot 9^3} + \tfrac{1}{9 \cdot 9^4} - \tfrac{1}{11 \cdot 9^5} + \cdots\right) + \\ &+ \tfrac{4}{7} \cdot \left(1 - \tfrac{1}{3 \cdot 49} + \tfrac{1}{5 \cdot 49^2} - \tfrac{1}{7 \cdot 49^3} + \tfrac{1}{9 \cdot 49^4} - \tfrac{1}{11 \cdot 49^5} + \cdots\right),\end{aligned}$$

Volendo trovare da qui il valore di π con 128 cifre decimali esatte, se con la serie precedente erano necessari 132 termini, con questa ne bastano 75; inoltre il calcolo di 207 di questi termini richiede certamente molto meno lavoro di quello svolto da Lagny per determinare le terze parti, esclusa dunque l'estrazione della radice. Con questa serie, l'impegno totale può essere stimato in appena 18 ore, anche se la divisione per 49 crea qualche fastidio.

6. Allo stesso modo, se non riteniamo abbastanza piccolo l'$\arctan\frac{1}{3}$, possiamo introdurne di minori conservando l'altro termine: avremo

$$\arctan\tfrac{1}{3} = \arctan\tfrac{1}{7} + \arctan\tfrac{2}{11},$$

e da qui

$$\tfrac{\pi}{4} = 2 \cdot \arctan\tfrac{2}{11} + 3 \cdot \arctan\tfrac{1}{7},$$

quindi sarà

$$\begin{aligned}\pi = &+ \tfrac{16}{11} \cdot \left(1 - \tfrac{4}{3 \cdot 121} + \tfrac{4^2}{5 \cdot 121^2} - \tfrac{4^3}{7 \cdot 121^3} + \tfrac{4^4}{9 \cdot 121^4} - \cdots\right) + \\ &+ \tfrac{12}{7} \cdot \left(1 - \tfrac{1}{3 \cdot 49} + \tfrac{1}{5 \cdot 49^2} - \tfrac{1}{7 \cdot 49^3} + \tfrac{1}{9 \cdot 49^4} - \cdots\right).\end{aligned}$$

[11]Per dimostrare la formula, basta determinare la tangente dei due membri (eventualmente dopo aver isolato il termine più complicato).

È ben vero che qui servono meno termini, ma le divisioni per 49 e per 121 tolgono ogni guadagno di tempo. E nemmeno può servire la prossima trasformazione

$$\arctan \tfrac{2}{11} = \arctan \tfrac{1}{7} + \arctan \tfrac{3}{79}$$

che conduce a

$$\pi = 5 \cdot \arctan \tfrac{1}{7} + 2 \cdot \arctan \tfrac{3}{79}$$

poiché, se la seconda serie è molto convergente, la natura della frazione $\frac{3}{79}$ accresce la fatica in modo non trascurabile, per cui è meglio usare serie di gran lunga meno convergenti.

7. Quando ci si deve decidere per un calcolo, non conviene quindi porre attenzione solo alla convergenza della serie i cui termini devono essere sommati, ma anche alla facilità con cui questi termini si calcolano con le operazioni aritmetiche: se nella serie c'è una progressione geometrica il calcolo sarà eseguito velocemente se i termini decrescono con una ragione di un decimo, di un centesimo o di un millesimo. Per la qual cosa i termini della serie per l'angolo la cui tangente è uguale a $\frac{1}{7}$, e ancor più quelli della serie per l'angolo la cui tangente è uguale a $\frac{3}{79}$, si calcolano non senza ingente lavoro, che è così grande che chiunque preferirebbe di gran lunga calcolare più termini delle serie per gli angoli le cui tangenti sono $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$; infatti una convergenza maggiore non sembra compensare la fatica che richiede lo svolgimento dei singoli termini. Ma se fosse possibile usare angoli le cui tangenti fossero $\frac{1}{10}, \frac{1}{50}, \frac{1}{100}, \dots$, non v'è alcun dubbio che, oltre alla maggior convergenza, anche il calcolo dei singoli termini sarebbe alleggerito in modo notevole.

8. A questo scopo si presta molto bene un'altra serie che permette di esprimere l'arco di circonferenza a partire dalla sua tangente. Ho dedotto questa serie considerando la formula differenziale $\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$ ed esprimendone l'integrale come

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = z\sqrt{1-x^2}.$$

Da qui, differenziando si ottiene

$$\mathrm{d}x = \mathrm{d}z(1-x^2) - xz\,\mathrm{d}x,$$

ossia [*dividendo per* $\mathrm{d}x$]

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}(1-x^2) - xz - 1 = 0 \tag{1}$$

Si ponga ora

$$z = Ax + Bx^3 + Cx^5 + Dx^7 + Ex^9 + \cdots ,$$

da cui ricaviamo [*per poter ricostruire la* (1)]

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} &= A + 3Bx^2 + 5Cx^4 + 7Dx^6 + 9Ex^8 + \cdots\\ -x^2\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} &= -Ax^2 - 3Bx^4 - 5Cx^6 - 7Dx^8 - \cdots\\ -xz &= -Ax^2 - Bx^4 - Cx^6 - Dx^8 - \cdots\\ -1 &= -1\end{aligned}$$

[*Sommando ed*] uguagliando a zero i singoli termini si ottiene

$$A = 1, \quad B = \tfrac{2}{3}A, \quad C = \tfrac{4}{5}B, \quad D = \tfrac{6}{7}C, \quad E = \tfrac{8}{9}D, \ldots$$

così che [*dopo aver sostituito nell'integrale*] avremo

$$\arcsin x = x \cdot \sqrt{1-x^2} \cdot \left(1 + \tfrac{2}{3}x^2 + \tfrac{2\cdot 4}{3\cdot 5}x^4 + \tfrac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}x^6 + \tfrac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}x^8 + \cdots\right).$$

9. Sia ora $\frac{m}{n}$ la tangente dell'angolo il cui seno è stato posto uguale a x; sarà

$$x = \frac{m}{\sqrt{m^2+n^2}}$$

[*basta esprimere il seno in funzione della tangente*] e

$$\sqrt{1-x^2} = \frac{n}{\sqrt{m^2+n^2}};$$

in questo modo l'irrazionalità scompare dal calcolo e [*poiché* $\arcsin x = \arctan \frac{m}{n}$ *essendo* $\sin\alpha = x$ *e* $\tan\alpha = \frac{m}{n}$] si ottiene

$$\arctan\tfrac{m}{n} = \tfrac{m}{\sqrt{m^2+n^2}} \cdot \tfrac{n}{\sqrt{m^2+n^2}} \cdot \left(1 + \tfrac{2}{3}\tfrac{m^2}{m^2+n^2} + \tfrac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\tfrac{m^4}{(m^2+n^2)^2} + \tfrac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}\tfrac{m^6}{(m^2+n^2)^3} + \cdots\right)$$

cioè

$$\arctan\tfrac{m}{n} = \tfrac{mn}{m^2+n^2} \cdot \left(1 + \tfrac{2\cdot m^2}{3\cdot(m^2+n^2)} + \tfrac{2\cdot 4\cdot m^4}{3\cdot 5\cdot(m^2+n^2)^2} + \tfrac{2\cdot 4\cdot 6\cdot m^6}{3\cdot 5\cdot 7\cdot(m^2+n^2)^3} + \cdots\right)$$

e questa serie non solo converge più di quella solita usata prima

$$\arctan\tfrac{m}{n} = \tfrac{m}{n} \cdot \left(1 - \tfrac{m^2}{3n^2} + \tfrac{m^4}{5n^4} - \tfrac{m^6}{7n^6} + \tfrac{m^8}{9n^8} - \cdots\right)$$

[*porre* $x = \frac{m}{n}$ *nella serie di Gregory e mettere in evidenza la frazione*], ma anche i singoli termini si possono calcolare in modo palesemente più facile, infatti la moltiplicazione continuata per le frazioni $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{6}{7}$, ... non risulta essere più difficile della divisione per i numeri 3, 5, 7, 9, ... Inoltre si può riconoscere un grandissimo vantaggio, palese in quel calcolo, quando i numeri (m^2+n^2) fossero, come divisori, più agevoli delle potenze semplici di n, quello stesso vantaggio che si trova negli angoli indicati sopra. In questa nuova serie è anche di non poca importanza che i termini si debbano solo sommare, mentre in quella tradizionale si devono sommare e sottrarre alternativamente.

10. Se svolgiamo i calcoli secondo la nuova serie, per gli angoli indicati sopra otterremo:

$$\text{I. } \arctan\tfrac{1}{2} = \tfrac{2}{5}\cdot\left(1+\tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{1}{5}+\tfrac{2\cdot4}{3\cdot5}\cdot\tfrac{1}{5^2}+\tfrac{2\cdot4\cdot6}{3\cdot5\cdot7}\cdot\tfrac{1}{5^3}+\cdots\right)$$

$$\text{II. } \arctan\tfrac{1}{3} = \tfrac{3}{10}\cdot\left(1+\tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{1}{10}+\tfrac{2\cdot4}{3\cdot5}\cdot\tfrac{1}{10^2}+\tfrac{2\cdot4\cdot6}{3\cdot5\cdot7}\cdot\tfrac{1}{10^3}+\cdots\right)$$

$$\text{III. } \arctan\tfrac{1}{7} = \tfrac{7}{50}\cdot\left(1+\tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{1}{50}+\tfrac{2\cdot4}{3\cdot5}\cdot\tfrac{1}{50^2}+\tfrac{2\cdot4\cdot6}{3\cdot5\cdot7}\cdot\tfrac{1}{50^3}+\cdots\right)$$

$$\text{IV. } \arctan\tfrac{3}{79} = \tfrac{237}{6250}\cdot\left(1+\tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{9}{6250}+\tfrac{2\cdot4}{3\cdot5}\cdot\tfrac{9^2}{6250^2}+\tfrac{2\cdot4\cdot6}{3\cdot5\cdot7}\cdot\tfrac{9^3}{6250^3}+\cdots\right)$$

Sono serie che, manifestamente, sono molto più adatte delle precedenti al calcolo aritmetico in quanto la prima richiede una divisione continuata per 5, la seconda per 10, la terza per 50 e la quarta per 6250, e quest'ultima è ancora più comoda perché $\frac{9}{6250} = \frac{144}{100000}$: per questa ragione ritengo le serie appena scritte di gran lunga preferibili alle altre.

11. Se in una qualsiasi di quelle serie si indica con la lettera P, secondo l'uso newtoniano, il termine precedente in modo che appaia più facilmente con quali operazioni convenga farne scaturire il termine seguente [*cioè se ogni addendo viene scritto evidenziando l'addendo che lo precede, chiamato P*], per la prima formula

$$\pi = 4\arctan\tfrac{1}{2} + 4\arctan\tfrac{1}{3}$$

basta questa serie:

$$\begin{aligned}\pi = &+\tfrac{8}{5}+\tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{1}{5}P+\tfrac{4}{5}\cdot\tfrac{1}{5}P+\tfrac{6}{7}\cdot\tfrac{1}{5}P+\tfrac{8}{9}\cdot\tfrac{1}{5}P+\cdots+\\ &+\tfrac{6}{5}+\tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{1}{10}P+\tfrac{4}{5}\cdot\tfrac{1}{10}P+\tfrac{6}{7}\cdot\tfrac{1}{10}P+\tfrac{8}{9}\cdot\tfrac{1}{10}P+\cdots\end{aligned}$$

Per la seconda formula

$$\pi = 8\cdot\arctan\tfrac{1}{3} + 4\cdot\arctan\tfrac{1}{7}$$

[(*vedi punto 5.*] si ha:

$$\begin{aligned}\pi = &+\tfrac{24}{10}+\tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{1}{10}P+\tfrac{4}{5}\cdot\tfrac{1}{10}P+\tfrac{6}{7}\cdot\tfrac{1}{10}P+\tfrac{8}{9}\cdot\tfrac{1}{10}P+\cdots+\\ &+\tfrac{56}{100}+\tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{1}{50}P+\tfrac{4}{5}\cdot\tfrac{1}{50}P+\tfrac{6}{7}\cdot\tfrac{1}{50}P+\tfrac{8}{9}\cdot\tfrac{1}{50}P+\cdots\end{aligned}$$

e per la terza [*vedi punto 6.*] si ottiene:

$$\begin{aligned}\pi = &+\tfrac{28}{10}+\tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{1}{50}P+\tfrac{4}{5}\cdot\tfrac{1}{50}P+\tfrac{6}{7}\cdot\tfrac{1}{50}P+\tfrac{8}{9}\cdot\tfrac{1}{50}P+\cdots+\\ &+\tfrac{948}{3125}+\tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{144}{100000}P+\tfrac{4}{5}\cdot\tfrac{144}{100000}P+\tfrac{6}{7}\cdot\tfrac{144}{100000}P+\tfrac{8}{9}\cdot\tfrac{144}{100000}P+\cdots\end{aligned}$$

In quest'ultimo caso, la prima serie converge in modo tale che ogni termine è circa cinquanta volte minore del precedente; la seconda in modo tale che ogni termine è circa settecento volte minore del precedente; da ciò possiamo ricavare che non è necessario, nei termini che seguono il primo, scrivere gli zeri che stanno davanti, poiché il pericolo di non sapere in che posto dopo la virgola debba essere messo questo termine è nullo, e così il calcolo risulta alleggerito, non di poco.

12. Soppesate attentamente tutte queste cose, non esito ad affermare che il rapporto tra la circonferenza e il diametro, e cioè il valore di quel π, può essere ottenuto in modo estremamente comodo e rapido dalle due serie seguenti:

$$\pi = 2.8 + P \cdot \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{2}{100} + P \cdot \tfrac{4}{5} \cdot \tfrac{2}{100} + P \cdot \tfrac{6}{7} \cdot \tfrac{2}{100} + \cdots +$$
$$+ 0.30336 + P \cdot \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{144}{100000} + P \cdot \tfrac{4}{5} \cdot \tfrac{144}{100000} + P \cdot \tfrac{6}{7} \cdot \tfrac{144}{100000} + \cdots ,$$

ed anche che non possono essere mostrate altre serie che convergano così tanto e che contemporaneamente abbiano i singoli termini così facili da calcolare. Da queste serie, dunque, a mo' di esempio, dedurrò il valore di π con 20 cifre decimali e — affinché il calcolo sia più sicuro — lo estenderò a 22 cifre; di ogni singolo termine indicherò solamente la fine, in modo che la 22–esima cifra sia l'ultima, mentre l'inizio risulterà automaticamente. Dunque lo sviluppo dei termini della prima serie sarà così:

I.	2.8000000000000000000000	div. per 3
	9333333333333333333333	[*molt. per* 2]
	1.8666666666666666666666	molt. per $\frac{2}{100}$
II.	373333333333333333333	div. per 5
	74666666666666666666	[*molt. per* 4]
	298666666666666666666	molt. per $\frac{2}{100}$
III.	5973333333333333333	div. per 7
	853333333333333333	[*molt. per* 6]
	5120000000000000000	molt. per $\frac{2}{100}$
IV.	102400000000000000	div. per 9
	11377777777777777	[*molt. per* 8]
	91022222222222222	molt. per $\frac{2}{100}$
V.	1820444444444444	div. per 11
	165494949494949	[*molt. per* 10]
	1654949494949494	molt. per $\frac{2}{100}$
VI.	33098989898989	div. per 13
	2546076146076	[*molt. per* 12]
	30552913752913	molt. per $\frac{2}{100}$
VII.	611058275058	div. per 15
	40737218337	[*molt. per* 14]
	570321056721	molt. per $\frac{2}{100}$
VIII.	11406421134	div. per 17
	670965949	[*molt. per* 16]
	10735455185	molt. per $\frac{2}{100}$
IX.	214709103	div. per 19
	11300479	[*molt. per* 18]
	203408624	molt. per $\frac{2}{100}$
X.	4068172	div. per 21
	193722	[*molt. per* 20]
	3874450	molt. per $\frac{2}{100}$
XI.	77489	div. per 23
	3369	[*molt. per* 22]
	74120	molt. per $\frac{2}{100}$
XII.	1482	div. per 25
	59	[*molt. per* 24]
	1423	molt. per $\frac{2}{100}$
XIII.	28	

Dunque 13 termini di questa serie sono sufficienti per determinare ventidue cifre, per cui è lecito concludere che, se fosse opportuno proseguire il calcolo fino a $22n$ cifre, basterebbero $13n$ termini [*Eulero ha però scritto erroneamente "notas", cioè "cifre"; in seguito usa il termine corretto*]: da questo calcolo, per arrivare a 128 cifre si richiederebbero 76 termini [$\frac{128}{22} \cdot 13 \approx 76$]. Gli ultimi termini costituiscono all'incirca una progressione geometrica decrescente di ragione $\frac{1}{50}$, per cui non è il caso di determinare più termini.

13. Per la seconda serie il calcolo va svolto così:

I.	0.3033600000000000000000	div. per 3
	1011200000000000000000	[*molt. per* 2]
	2022400000000000000000	molt. per $\frac{144}{100000}$
II.	2912256000000000000	div. per 5
	582451200000000000	[*molt. per* 4]
	2329804800000000000	molt. per $\frac{144}{100000}$
III.	3354918912000000	div. per 7
	479274130285714	[*molt. per* 6]
	2875644781714285	molt. per $\frac{144}{100000}$
IV.	4140928485668	div. per 9
	460103165074	[*molt. per* 8]
	3680825320594	molt. per $\frac{144}{100000}$
V.	5300388461	div. per 11
	481853496	[*molt. per* 10]
	4818534965	molt. per $\frac{144}{100000}$
VI.	6938690	div. per 13
	533745	[*molt. per* 12]
	6404945	molt. per $\frac{144}{100000}$
VII.	9223	div. per 15
	615	[*molt. per* 14]
	8608	molt. per $\frac{144}{100000}$
VIII.	12	div. per 17

Dunque, con questa serie, per ottenere 22 cifre sono necessari soltanto otto termini, per cui $22n$ cifre richiederebbero il calcolo di circa $8n$ termini, quindi per 128 cifre basta calcolare 47 termini [$\frac{128}{22} \cdot 8 \approx 47$].

14. Ora sommiamo i termini che abbiamo calcolato con le due serie; per la prima si avrà:

I.	2.8000000000000000000000
II.	373333333333333333333
III.	5973333333333333333
IV.	102400000000000000
V.	1820444444444444
VI.	33098989898989
	2.8379410920210101010101
VII.	611058275058
VIII.	11406421134
IX.	214709103
X.	4068172
XI.	77489
XII.	1482
XIII.	28
	2.8379410920832784562570

Analogamente sommiamo i termini dell'altra serie [*ed infine i termini delle due serie per ottenere un'approssimazione di* π]:

I.	0.3033600000000000000000
II.	2912256000000000000
III.	3354918912000000
IV.	4140928485668
V.	5300388461
VI.	6938690
VII.	9223
VIII.	12
	0.3036515615065147822055
prima	2.8379410920832784562570
$\pi =$	3.1415926535897932384625

Questo numero è corretto fino alla penultima cifra, e il suo calcolo ha richiesto circa un'ora; da ciò si può capire che se si volesse adoperare tutto il tempo che Lagny ha impiegato per il suo calcolo, si potrebbe facilmente estendere il valore di fino alla 200–esima cifra.

15. Per continuare il calcolo è utile notare che nei termini di entrambe le serie si incontrano delle ripetizioni delle cifre precedenti (. . . *prioribus revolutiones notarum occurrere* . . .), che consentono di continuarli a piacere; così, per la prima serie, ho messo fra parentesi le cifre periodiche che si ripetono di continuo dopo le cifre iniziali:

I.	2.800 . . .
II.	37333 . . .
III.	59733 . . .
IV.	102400 . . .
V.	1820444 . . .
VI.	330(98)(98) . . .
VII.	611(058275)(058275) . . .
VIII.	11406(421134)(421134) . . .
IX.	21470(91037067507655742949860596919420448832213538095 8)(9103 . . .

Per la seconda serie i termini sono continuati all'infinito così:

I.	0.3033600 . . .
II.	291225600 . . .
III.	335491891200 . . .
IV.	414092848566(857142)857142) . . .
V.	53003884616557(714285)(714285) . . .
VI.	693869034980391(896103)(896103) . . .
VII.	92231207111239784(343656)(343656) . . .
VIII.	12395874235706270157(874125) . . .

16. Uniamo ora gli otto primi termini continuati all'infinito [*con infinite cifre decimali*] in una sola somma, in modo che chi volesse continuare il calcolo più a lungo lo possa fare subito, e contemporaneamente evidenziamo le cifre che si ripetono in entrambe le somme:

somma degli 8 primi termini della prima serie:

I.	2.80
II.	373333333333333 33333333333
III.	5973333333333 33333333333
IV.	102400000000 00000000000
V.	1820444444 44444444444
VI.	33098989 89898989898
	2.837941092021010101010101010
VII.	611058 27505827505
VIII.	11406 42113444113
	2.8379410920832565.70629370629
ossia	2.8379410920832565.706293.706293. . . .

e per la serie seguente:

I.	0.30336
II.	2912256
III.	3354918912
IV.	414092848566857142 . . .
	0.303651561505984048566857142857142857142 . . .
V.	530038846165577142857142857 . . .
	0.30365156150651408741302272000000000000000
VI.	69386903498039189610389610 38961 038961 03
VII.	92231207111239784343656 34365 634365 63
VIII.	1239587423570627015787412 5 874125 87
	694792586638927864574348454 7452 547452 54
	0.303651561506514087413022720000000000000000000000 000000 00
	0.3036515615065147822056093589278645743484 547452 547452 54

qui la somma dei primi otto termini è

0.3036515615065147822056093589278645743484.547452, . . .

Ma il termine che segue, il nono, comincia proprio sotto la ventiquattresima cifra che è 9; per cui è possibile trovare facilmente approssimazioni più accurate.

17. Nello svolgimento di altri termini, la divisione per numeri dispari più grandi può causare qualche ritardo, poiché per queste operazioni va usato un tempo molto maggiore di quello che ho stimato per le divisioni con numeri più piccoli. Ciò nonostante, questa difficoltà è molto più grande per la serie tradizionale con l'angolo di 30°: sia perché ci sono più termini da calcolare, sia perché si devono eseguire calcoli con divisori più grandi, sia perché si devono estrarre radici, cosa alquanto noiosa. Per questo motivo, evidentemente, non rimane alcun dubbio che chi usa queste due nuove serie può calcolare in maniera di gran lunga più facile e rapida il rapporto tra la circonferenza e il diametro con qualsivoglia grado di precisione, di quanto non lo possa fare con il calcolo tradizionale; e qualunque sia il tempo che sarà costretto a dedicare a questo compito, potrà essere certo che con il procedimento tradizionale impiegherebbe un tempo più che doppio.

18. Se qualcuno osservasse ancora che sarebbe utile ricavare l'arco dalla tangente usando direttamente la formula tradizionale

$$s = t - \tfrac{1}{3}t^3 + \tfrac{1}{5}t^5 - \tfrac{1}{7}t^7 + \tfrac{1}{9}t^9 - \cdots,$$

in cui s è l'arco la cui tangente è uguale a t, poiché è

$$t^2 s = t^3 - \tfrac{1}{3}t^5 + \tfrac{1}{5}t^7 - \tfrac{1}{7}t^9 + \cdots$$

sommando [*le due*] si avrà

$$(1+t^2)s = t + \tfrac{2}{3}t^3 - \tfrac{2}{3\cdot 5}t^5 + \tfrac{2}{5\cdot 7}t^7 - \tfrac{2}{7\cdot 9}t^9 + \cdots$$

Poi ancora

$$t^2 \cdot (1+t^2) \cdot s = t^3 + \tfrac{2}{3}t^5 - \tfrac{2}{3\cdot 5}t^7 + \tfrac{2}{5\cdot 7}t^9 - \cdots$$

e sommando [*le ultime due*]

$$(1+t^2)^2 \cdot s = t \cdot (1+t^2) + \tfrac{2}{3}t^3 + \tfrac{2\cdot 4}{3\cdot 5}t^5 - \tfrac{2\cdot 4}{3\cdot 5\cdot 7}t^7 + \tfrac{2\cdot 4}{5\cdot 7\cdot 9}t^9 - \cdots$$

in modo analogo si ottiene:

$$(1+t^2)^3 \cdot s = t \cdot (1+t^2)^2 + \tfrac{2}{3}t^3 \cdot (1+t^2) + \tfrac{2\cdot 4}{3\cdot 5}t^5 + \tfrac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}t^7 - \tfrac{2\cdot 4\cdot 6}{5\cdot 7\cdot 9}t^9 + \cdots$$

e

$$(1+t^2)^4 s = t \cdot (1+t^2)^3 + \tfrac{2}{3}t^3 \cdot (1+t^2)^2 + \tfrac{2\cdot 4}{3\cdot 5}t^5 \cdot (1+t^2) + \tfrac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}t^7 + \tfrac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 9}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}t^9 - \cdots$$

per cui, continuando, si ottiene evidentemente

$$s = \tfrac{t}{1+t^2} + \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{t^3}{(1+t^2)^2} + \tfrac{2\cdot 4}{3\cdot 5} \cdot \tfrac{t^5}{(1+t^2)^3} + \tfrac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7} \cdot \tfrac{t^7}{(1+t^2)^4} + \cdots$$

cioè

$$s = \tfrac{t}{1+t^2} \cdot \left(1 + \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{t^2}{1+t^2} + \tfrac{2\cdot 4}{3\cdot 5} \cdot \tfrac{t^4}{(1+t^2)^2} + \tfrac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7} \cdot \tfrac{t^6}{(1+t^2)^3} + \cdots\right)$$

e questa serie, ponendo $t = \frac{m}{n}$, coincide con quella presentata prima.

19. Poiché ho calcolato il nono termine della prima serie, il cui periodo comprende 48 cifre, scrivo qui sotto il nono termine della seconda serie:

IX. 16800055435025555673161(2932949449353763883175647881530234471410941999177)(293...

cui sono da premettere 23 zeri ("...*cui 23 cyphrae sunt preafigenda* ...") prima della virgola che separa la parte decimale da quella intera, così che il primo periodo di questo termine finisce al novantaquattresimo posto. Se al posto delle cifre decimali periodiche vogliamo usare le frazioni, il nono termine sarà espresso in modo finito da

$$\text{IX. } 16800055435025555673161\tfrac{713}{2431} \quad \left[= \tfrac{9}{11} - \tfrac{3}{13} - \tfrac{5}{17}\right].$$

In modo analogo, il nono termine della prima serie è

$$21470\tfrac{21002}{21879}.$$

Di conseguenza, si può anche rappresentare così la somma degli otto termini delle serie precedenti:

dalla prima serie

$$
\begin{array}{rrl}
\text{Somma I}\ldots\text{VIII} & 2.8379410920832565\ \ \frac{101}{403} & \left[= \frac{1}{11} + \frac{8}{13}\right] \\
\text{termine IX} & 21476\frac{21002}{21879} & \left[= \frac{5}{9} + \frac{4}{11} - \frac{2}{13} + \frac{2}{17}\right] \\
\hline
\text{somma I}\ldots\text{IX} & 2.837941092083278041\frac{12893}{21879} &
\end{array}
$$

dall'ultima serie

$$
\begin{array}{rr}
\text{I}\ldots\text{VIII} & 0.30365156150651478220560935892786457434 84\frac{548}{1001} \\
\text{IX} & 16800055435025555673161\frac{713}{2431} \\
\hline
\text{I}\ldots\text{IX} & 0.303651561506514782205611039334080769040220613\frac{14307}{17017}
\end{array}
$$

dove c'è da osservare che

$$\frac{14307}{17017} = \frac{3}{7} + \frac{1}{11} + \frac{8}{13} - \frac{5}{17},$$

in cui è mostrato lo svolgimento della frazione. Allo stesso modo è, per la prima frazione,

$$\frac{12893}{21879} = \frac{5}{9} + \frac{5}{11} - \frac{7}{13} + \frac{2}{17}.$$

Appendice: il calcolo di $\tan 18^\circ$

Nel punto 2. di E809 si dice che

$$\tan 18^\circ = \sqrt{1 - 2 \cdot \sqrt{\tfrac{1}{5}}}.$$

Per ricavare questo valore possiamo procedere nel modo seguente:

1. dimostrare che il lato del decagono regolare iscritto in un cerchio è la sezione aurea del raggio;

2. calcolare $\sin 18^\circ$ e $\cos 18^\circ$ con l'aiuto del triangolo rettangolo che è metà di uno dei 10 triangoli congruenti (uguali) in cui può essere suddiviso il decagono regolare;

3. ricavare $\tan 18^\circ$: per ottenere le forma proposta da Eulero bisogna eseguire qualche passaggio.

Premessa. La *parte aurea* o *sezione aurea* di un segmento è il segmento medio proporzionale tra l'intero segmento e la parte rimanente.

Il rapporto tra un segmento e la sua parte aurea si dice *numero aureo* e si indica con φ o con τ[12].

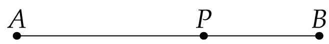

Figura 1: AP è la parte aurea di AB.

Se AP è la parte aurea di AB, è

$$AB : AP = AP : PB$$

(vedi figura 1). Se si pone $|AB| = l$ e $|AP| = x$, la proporzione scritta sopra permette di determinare x in funzione di l:

$$x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \cdot l \approx 0.618 \cdot l,$$

e quindi di mostrare che

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.618033989\,.$$

[12]Fu il matematico americano Mark Barr a introdurre nel 1909 la notazione φ, in onore dello scultore greco $\Phi\varepsilon\iota\delta\acute{\iota}\alpha\varsigma$ (Fidia), il quale avrebbe usato il rapporto aureo nelle sue sculture del Partenone. Notiamo ancora che con Φ si indica la *sezione argentea*: $\Phi = \frac{1}{\varphi} = \varphi - 1$.

La notazione τ deriva dalla prima lettera del sostantivo greco $\tau o \mu \acute{\eta}$, (*tomé*, che significa taglio).

La parte aurea di un segmento può essere determinata con una costruzione geometrica.

1. Nel triangolo ABC siano: AB il lato del decagono regolare, C il centro del cerchio in cui esso è inscritto (quindi $|AC| = |CB| = r$) e AD la bisettrice dell'angolo in A; le misure degli angoli si determinano facilmente.

I triangoli ABC, ABD e ADC sono isosceli (vedi figura 2): il primo su AB, il secondo su BD e il terzo su AC (lo si deduce dagli angoli); i triangoli ABD e ABC sono anche simili, per cui

$$AC : AB = AB : AD;$$

siccome $|AD| = |CD|$ è

$$|BD| = |BC| - |DC| = |BC| - |AB|,$$

e si può scrivere

$$AC : AB = AB : (AC - AB).$$

Ciò significa che AB è la sezione aurea di AC, cioè che *il lato del decagono regolare è la parte aurea del raggio del cerchio circoscritto*.

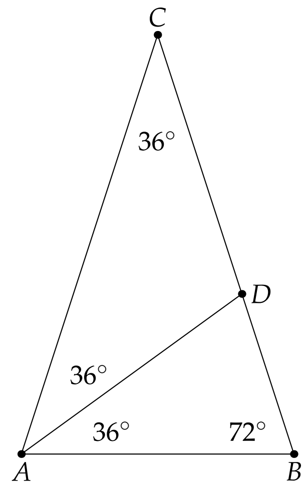

Figura 2: Triangolo isocele la cui base è il lato di un decagono regolare.

2. Se O è il centro del cerchio e AH la metà del lato del decagono regolare iscritto nel cerchio di raggio r (vedi figura 3), sappiamo che

$$l_{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot r,$$

quindi:

$$\sin 18^\circ = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot r}{r} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

e

$$\cos 18^\circ = \sqrt{1 - \sin^2 18^\circ} = \sqrt{1 - \frac{6-2\sqrt{5}}{16}} = \sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{16}} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.$$

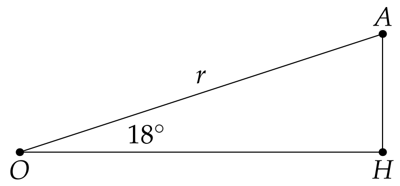

Figura 3: La metà di uno dei dieci triangoli determinati dal decagono regolare.

3. Infine abbiamo:

$$\tan 18° = \frac{\sin 18°}{\cos 18°} = \frac{\frac{\sqrt{5}-1}{4}}{\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}} = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{5}-1)^2 \cdot (10-2\sqrt{5})}{100-20}} =$$
$$= \sqrt{\frac{80-32\sqrt{5}}{80}} = \sqrt{1-\frac{2\sqrt{5}}{5}} = \sqrt{1-2\sqrt{\frac{1}{5}}}.$$