

Dalla caccia alla lepre ai cicli di Eigen

Antonio Steiner

1. Concorrenza fra popolazioni con termini di crescita quadratici

In un certo habitat con risorse illimitate, due specie x_1 , x_2 si evolvono indipendentemente l'una dall'altra secondo le equazioni differenziali

$$\dot{x}_i = \alpha_i x_i^2, \quad x_i(0) = x_i^0 \quad (i = 1, 2)$$

nelle quali i coefficienti α_i , come pure i valori iniziali x_i^0 sono supposti positivi. Si tratta di due popolazioni, ad esempio lepri e conigli selvatici, con crescita proporzionale al numero medio di incontri fra gli individui della stessa specie, quindi con crescita quadratica. Mantenendo la finzione che non ci siano limitazioni di sorta nella riproduzione, l'evoluzione del sistema condurrebbe in un tempo finito ad una catastrofe, poiché le sue soluzioni

$$x_i = \frac{1}{\frac{1}{x_i^0} - \alpha_i t}, \quad (i = 1, 2)$$

divergono per $t = \frac{1}{\alpha_i x_i^0}$.

Per questa ragione modifichiamo il nostro modello con l'aggiunta di una *caccia continua* che colpisca in ogni istante la stessa

frazione Ω di individui delle due specie presenti al momento, come ottenuta sparando a casaccio sulle due popolazioni distribuite casualmente su tutto il territorio.

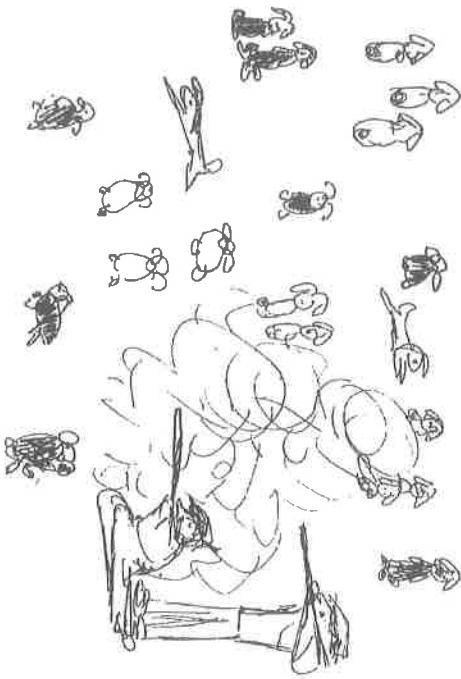


Fig. 1

Inoltre possiamo esigere che questa *caccia* sia *dosata* in modo da mantenere costante il numero complessivo di individui:

$$x_1 + x_2 = c = x_1^0 + x_2^0$$

Questa condizione determina il tasso di caccia Ω che appare nelle equazioni modificate

$$\dot{x}_i = \alpha_i x_1^2 - x_i \Omega, \quad x_i(0) = x_i^0 \quad (i = 1, 2), \quad x_1 + x_2 = c,$$

poiché, inserendo nell'equazione $\dot{x}_1 + \dot{x}_2 = 0$ le espressioni per \dot{x}_i si ricava

$$\Omega = \Omega(x) = \frac{1}{c} (\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2)$$

In definitiva si ottiene il seguente sistema di due equazioni differenziali lineari

$$\dot{x}_i = \alpha_i x_1^2 - \frac{x_i}{c} (\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2), \quad x_i(0) = x_i^0 \quad (i = 1, 2)$$

da risolvere con la *condizione ambientale*

$$c = x_1 + x_2 = x_1^0 + x_2^0.$$

1.1 I valori selettivi del sistema

Non ci occupiamo qui della soluzione analitica di questo sistema, già trattata in [1], anche perchè in questo stesso lavoro ne daremo una nuova presentazione più generale.

Applichiamo invece al *sistema ampliato*

$$\dot{x}_i = \alpha_i x_1^2 - \frac{x_i}{c} (\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2), \quad x_i(0) = x_i^0 \quad (i = 1, 2),$$

nel quale $c > 0$ è ora preassegnato e non ha nesso coi valori iniziali $x_i^0 > 0$, il *metodo delle 0-isocline* [2]: esse sono degli archi di ellisse, situati nel primo quadrante.

Come punti d'equilibrio, nei quali $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$, si trovano, oltre a

$G_0(0,0)$ che non è interessante, i punti

$$G_1(c,0), G_2(0,c) \text{ e } G\left(\frac{c\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}, \frac{c\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}\right).$$

G_1 e G_2 sono asintoticamente stabili; G_0 e G sono invece instabili.

Per illustrare la dinamica ricorriamo ad un esempio numerico con

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 4, \quad c = 2.$$

Notando che, in questo esempio,

$$\dot{x}_1 \leq 0 \iff (x_1 - 1)^2 + 4x_2^2 \geq 1$$

$$\dot{x}_2 \leq 0 \iff \frac{x_1^2}{4} + (x_2 - 1)^2 \geq 1,$$

in Fig. 2 abbiamo tracciato alcune traiettorie tipiche.

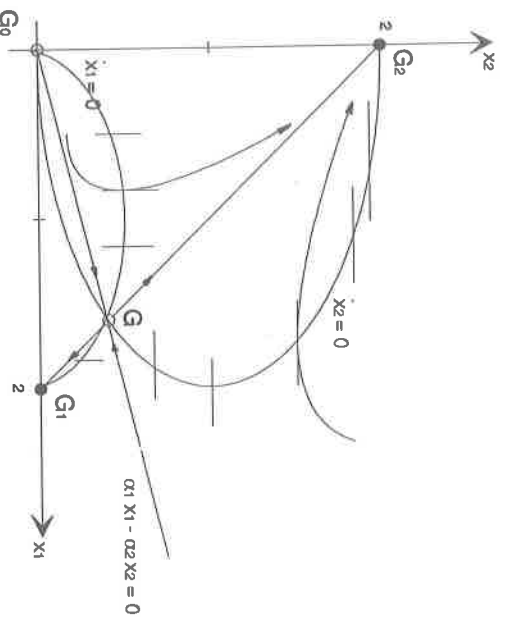


Fig. 2

I bacini di attrazione di G_1 e G_2 sono separati dalla retta $\alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2 = 0$ (i cui punti sono attratti da G) e sono caratterizzati come segue:

viene selezionata la popolazione x_1 se e solo se $\alpha_1 x_1^0 > \alpha_2 x_2^0$, mentre sarà selezionata x_2 se $\alpha_1 x_1^0 < \alpha_2 x_2^0$.

La retta $\alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2 = 0$ è una *curva di biforcazione*.

Limitandoci di nuovo al semplice $x_1 + x_2 = c$ si conferma che una sola delle due popolazioni in competizione è destinata a sopravvivere: quella col maggior *valore selettivo* $\alpha_i x_i^0$. Il tipo di meccanismo evolutivo si discosta però da quello darwiniano e spiegherebbe - secondo Eigen - l'unicità del codice genetico riscontrabile oggi in tutti gli organismi viventi [1, 3, 4].

2. Cicli generalizzati a due popolazioni.

Con essi intendiamo sistemi dinamici

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1^2 + B_1 x_1 + C_1 x_1 x_2 - x_1 \Omega_3 & , x_1^0 \\ \dot{x}_2 = A_2 x_2^2 + B_2 x_2 + C_2 x_2 x_1 - x_2 \Omega_3 & , x_2^0 \end{cases} \quad , x_1 + x_2 = c(1)$$

che descrivono, a partire da valori iniziali positivi, l'evoluzione di due popolazioni che si catalizzano vicendevolmente ($C_i > 0$), che godono di una crescita autonoma ($B_i > 0$), nonché - ed è questa la generalizzazione - di crescita autocatalitica ($A_i > 0$). Il sistema è poi soggetto ad una pressione selettiva in virtù della condizione ambientale

$$x_1 + x_2 = c = x_1^0 + x_2^0,$$

mantenuta esercitando una caccia continua e non specifica sulle due popolazioni, con un tasso Ω_3 da scegliere in modo appropriato.

2.1 Equilibratura diretta del ciclo

Per determinare un punto $G(x_1, x_2)$ di equilibrio ($\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$) del sistema (1) che sia concomitante ($x_1, x_2 > 0$), abbiamo a disposizione un sistema lineare derivante dall'equazione

$$\Omega_3 = A_1 x_1 + B_1 + C_1 x_2 = A_2 x_2 + B_2 + C_2 x_1,$$

alla quale si aggiunge la condizione sulla costanza del numero complessivo d'individui:

$$\begin{cases} (A_1 - C_2) x_1 + (C_1 - A_2) x_2 = -B_1 + B_2 \\ x_1 + x_2 = c \end{cases} \quad (2)$$

Consideriamo ora per comodità il caso in cui

$$C_1 - A_2 > 0 \quad , \quad C_2 - A_1 > 0 \quad (3)$$

La prima equazione in (2) nel piano di fase rappresenta una retta che interseca l'asse x_2 nel punto $P(0, \frac{B_2 - B_1}{C_1 - A_2})$ e con coefficiente

angolare $m = \frac{C_2 - A_1}{C_1 - A_2} > 0$, mentre una retta ad essa parallela,

passante per il punto $(c; 0)$ sull'asse x_1 , interseca l'asse x_2 nel punto $Q(0, -c \frac{C_2 - A_1}{C_1 - A_2})$, come raffigurato in Fig. 3:

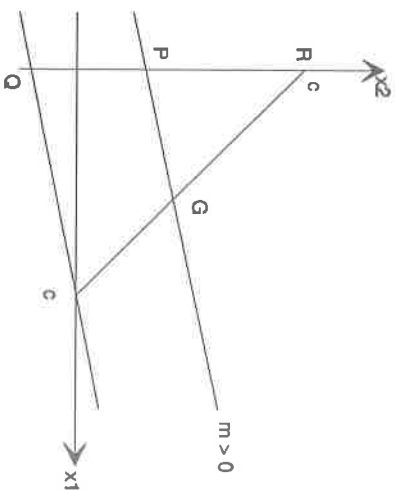


Fig. 3

Ne risulta che un ciclo del tipo (1) soggetto alla condizione (3) possiede un *punto di equilibrio concomitante* G se e solo se il punto P si trova fra i punti Q e $R(0,c)$, vale a dire quando

$$-c \frac{C_2 - A_1}{C_1 - A_2} < \frac{B_2 - B_1}{C_1 - A_2} < c,$$

ossia - in virtù di (3) - quando

$$-(C_2 - A_1)c < B_2 - B_1 < (C_1 - A_2)c \quad (4)$$

Facciamo notare che questa condizione riguarda il ciclo (1) nella *sua globalità* e non dipende dal nome che si dà alle due popolazioni che lo costituiscono: infatti essa rimane inalterata dopo aver effettuato una permutazione degli indici.

Per ricavarla comodamente ci siamo limitati a considerare dei cicli di fluttuazione che soddisfano la condizione (3). Ma, come si vedrà nel corso dello sviluppo di una soluzione analitica dei cicli (1), essa si rivelerà *superflua*, mentre da tutt'altre fonti riapparirà la condizione (4) quale *necessaria e sufficiente* per esistenza, concomitanza ed anche stabilità globale di un punto di equilibrio G di (1).

3. L'equazione maestra di un ciclo

È ottenuta riconducendo il sistema (1) ad *un'unica equazione differenziale* che si ricava esprimendo dapprima Ω_3 quale funzione di x_1 e x_2 , inserendola poi nella prima delle equazioni (1) e sostituendo infine $x_2 = c - x_1$. Il risultato di questi calcoli è l'*equazione maestra*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 = & [-c(A_2 - C_1) + B_1 - B_2] x_1 + [A_1 - C_2 + 2(A_2 - C_1) - \frac{B_1 - B_2}{c}] x_1^2 \\ & + [-\frac{(A_1 - C_2) + (A_2 - C_1)}{c}] x_1^3, \quad x_1(0) = x_1^0, \quad c = x_1^0 + x_2^0 \end{aligned} \quad (1')$$

equivalente al ciclo (1).

3.1 Equazione maestra di un ciclo senza termini catalitici

Lo stesso procedimento, applicato al sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1 x_1^2 + b_1 x_1 - x_1 \Omega_2, & x_1(0) = x_1^0 \\ \dot{x}_2 = a_2 x_2^2 + b_2 x_2 - x_2 \Omega_2, & x_2(0) = x_2^0 \end{cases}, \quad x_1 + x_2 = c, \quad (5)$$

ci fornisce l'equazione equivalente

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 = & [-c a_2 + b_1 - b_2] x_1 + [a_1 + 2 a_2 - \frac{b_1 - b_2}{c}] x_1^2 + [-\frac{a_1 + a_2}{c}] \\ & x_1(0) = x_1^0, \quad c = x_1^0 + x_2^0 \end{aligned} \quad (5')$$

3.2 Passaggio ad un sistema non ciclico

Basta uno sguardo alle equazioni maestre (1') e (5') per avvedersi che il sistema di partenza (1) è ricondotto al *sistema ridotto* (5) con la scelta seguente:

$$a_1 = A_1 - C_2; \quad a_2 = A_2 - C_1; \quad b_1 = B_1; \quad b_2 = B_2 \quad (6)$$

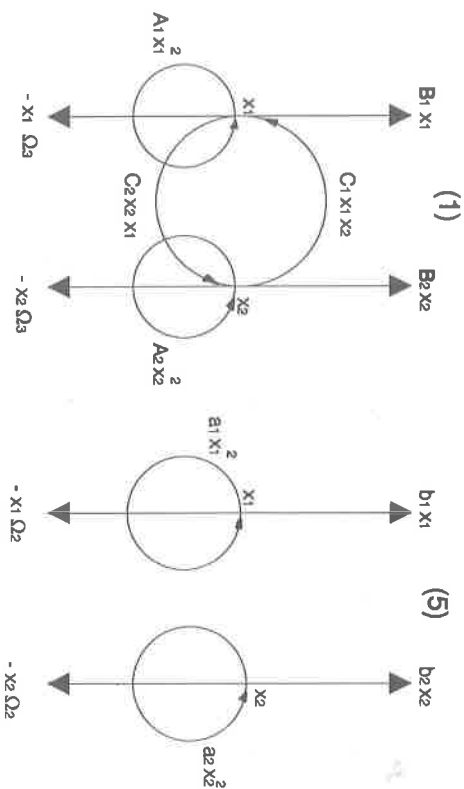


Fig. 4

In Fig. 4 sono indicati i reattori di evoluzione [5] corrispondenti a questi sistemi.

3.3 Omissione dei termini di crescita autonoma

Dopo aver ricondotto tramite (6) il ciclo generalizzato (1) al sistema non ciclico (5), abbiamo congetturato che questo sia ulteriormente riducibile al sistema più semplice

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha_1 x_1^2 - x_1 \Omega_1, & x_1(0) = x_1^0 \\ \dot{x}_2 = \alpha_2 x_2^2 - x_2 \Omega_2, & x_2(0) = x_2^0 \end{cases}, \quad x_1 + x_2 = c \quad (7)$$

come raffigurato nello schema di Fig. 5.

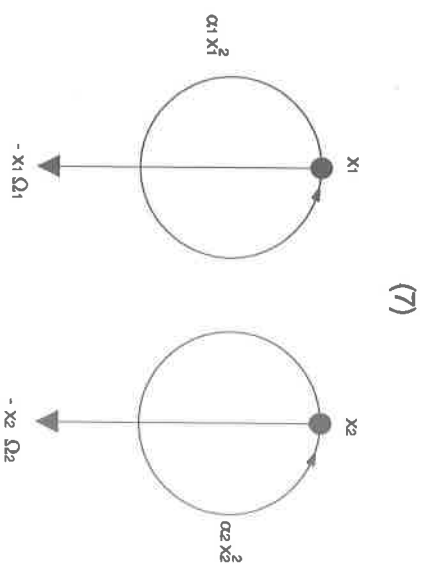


Fig. 5

L'equazione maestra di (7), ossia

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= [-c \alpha_2] x_1 + [\alpha_1 + 2 \alpha_2] x_1^2 + \left[-\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{c} \right] x_1^3, \\ x_1(0) &= x_1^0, \quad c = x_1^0 + x_2^0 \end{aligned} \quad (7')$$

sarebbe infatti identica all'equazione maestra (5') del sistema (5) quando un'opportuna scelta di α_1 , α_2 rendesse uguali i coefficienti, cioè quando

$$\begin{cases} -c \alpha_2 = -c \alpha_2 + b_1 - b_2 \\ \alpha_1 + 2 \alpha_2 = a_1 + 2 a_2 - \frac{b_1 - b_2}{c} \\ \alpha_1 + \alpha_2 = a_1 + a_2 \end{cases}$$

Le due ultime equazioni ci forniscono subito

$$\alpha_1 = a_1 + \frac{b_1 - b_2}{c}, \quad \alpha_2 = a_2 - \frac{b_1 - b_2}{c} \quad (8)$$

mentre per un vero caso *fortunato* questa scelta soddisfa automaticamente anche la prima equazione.

Tralasciando la tappa intermedia che da (1) ci aveva portato a (5) e combinando (6) e (8), si vede, in conclusione che, *il sistema (1) è ricondotto a (7) tramite*

$$\alpha_1 = A_1 - C_2 + \frac{B_1 - B_2}{c}, \quad \alpha_2 = A_2 - C_1 - \frac{B_1 - B_2}{c} \quad (9)$$

4. Autocatalisi con tassi di crescita arbitrari

A differenza da quanto esposto in [1], dove abbiamo già incontrato e risolto il sistema dinamico

$$\dot{x}_i = \alpha_i x_i^2 - x_i \Omega_i, \quad x_i^0 \quad (i = 1, 2), \quad x_1 + x_2 = c, \quad (7')$$

con $\alpha_i > 0$, ora i tassi di crescita delle due popolazioni x_1, x_2 collegate da queste equazioni *non sono più supposti necessariamente positivi, ma solo ambedue diversi da zero:*

$$\alpha_i \neq 0. \quad (i = 1, 2) \quad (10)$$

4.1 Concomitanza nel sistema (7')

Deduciamo dapprima delle *condizioni necessarie* affinché il sistema descritto da (7'), partendo da valori iniziali positivi, raggiunga attraverso funzioni positive

$$x_i > 0 \quad (i = 1, 2) \quad (11)$$

un punto di equilibrio G concomitante e globalmente stabile. Queste condizioni si riveleranno poi anche *sufficienti*. Ponendo, per $i = 1, 2$,

$$x_i = y_i f, \quad f = e^{-\int \Omega_i d\tau}, \quad w_i = \frac{1}{\alpha_i y_i} \quad (11')$$

si giunge alle due equazioni

$$\dot{w}_i = \frac{-c}{1 + \frac{1}{\alpha_i w_i}}; \quad w_i^0 = \frac{1}{\alpha_i x_i^0}, \quad (i = 1, 2) \quad (12)$$

con parti destre identiche. Le due funzioni w_1, w_2 dunque non differiscono fra di loro che per una costante additiva K_2 , che sarà positiva, se supponiamo le popolazioni numerate in modo che

$$w_1^0 < w_2^0 \quad (13)$$

e se, per il momento, lasciamo da parte il caso in cui

$$w_1^0 = w_2^0 \quad (13')$$

Infatti, posto

$$z := w_1 \quad , \quad w_2 = z + K_2 \quad , \quad (14)$$

si avrà

$$K_2 = w_2 - z = w_2^0 - w_1^0 > 0 \quad (14)$$

In luogo di (12) troviamo un'unica equazione per z , l'integrazione della quale ci fornisce

$$\begin{cases} t = -\frac{1}{c} \ln (|z|^{\alpha_1} |z + K_2|^{\alpha_2}) + K \\ K = \frac{1}{c} \ln (|w_1^0|^{\alpha_1} |w_1^0|^{\alpha_2}) \end{cases} \quad (15)$$

Questa formula non solo determina la cinetica dell'evoluzione del nostro sistema (7'), ma in più - applicando l'esponenziale ai due membri - ci porta a concludere che

$$|z|^{\frac{1}{\alpha_1}} |z + K_2|^{\frac{1}{\alpha_2}} \rightarrow 0 \text{ per } t \rightarrow +\infty \quad (16)$$

asserzione che permetterà di chiarire a priori il comportamento asintotico della funzione z .

4.2 I tre casi possibili

A seconda che

- a) $\alpha_1 < 0$, $\alpha_2 < 0$ \Leftrightarrow $w_1^0 < w_2^0 < 0$,
 b) $\alpha_1 < 0$, $\alpha_2 > 0$ \Leftrightarrow $w_1^0 < 0 < w_2^0$,
 c) $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$ \Leftrightarrow $0 < w_1^0 < w_2^0$,

e tenendo conto del fatto che, grazie a (11) e (11'), la funzione $w_1(t)$ ha, per tutti i valori di t , lo stesso segno della costante α_1 , possiamo riscrivere la (16) sotto forma più atta a rivelarci il comportamento di z :

$$\text{a) } \frac{1}{|z|^{\frac{-1}{\alpha_1}} |z + K_2|^{\frac{-1}{\alpha_2}}} \rightarrow 0 \text{ per } t \rightarrow +\infty \Rightarrow z \rightarrow -\infty \text{ per } t \rightarrow +\infty,$$

$$|z|^{\frac{-1}{\alpha_1}} |z + K_2|^{\frac{-1}{\alpha_2}}$$

$$\text{b) } \frac{|z + K_2|^{\frac{1}{\alpha_2}}}{|z|^{\frac{-1}{\alpha_1}}} \rightarrow 0 \text{ per } t \rightarrow +\infty \Rightarrow z \rightarrow -K_2 \text{ per } t \rightarrow +\infty$$

(siccome $w_2 = z + K_2 > 0$),

$$\text{c) } z^{\frac{1}{\alpha_1}} (z + K_2)^{\frac{1}{\alpha_2}} \rightarrow 0 \text{ per } t \rightarrow +\infty \Rightarrow z \rightarrow 0 \text{ per } t \rightarrow +\infty.$$

4.3 Le soluzioni di (7')

Dopo aver chiarito cinematica e comportamento asintotico di z , passiamo allo studio delle funzioni x_i . Ricordando che avevamo posto

$$y_i = \frac{1}{\alpha_i w_i} \quad , \quad f = \frac{c}{\frac{1}{\alpha_1 w_1} + \frac{1}{\alpha_2 w_2}} \quad , \quad x_i = y_i f$$

dopo essere risaliti a

$$x_1 = \frac{c}{1 + \frac{\alpha_1 z}{\alpha_2(z + K_2)}} \quad , \quad x_2 = \frac{c}{1 + \frac{\alpha_2(z + K_2)}{\alpha_1 z}} \quad , \quad (17)$$

si vede dalla (12) che

nel caso a) $\alpha_1 < 0$ le due funzioni w_i , partendo da valori iniziali negativi, caleranno monotonamente, restando così sempre negative; quindi, per la (17), le funzioni x_i , nel corso della loro evoluzione verso il punto di equilibrio concomitante $G(x_1; x_2)$:

$$x_1 = \frac{c}{1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \quad , \quad x_2 = \frac{c}{1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}} \quad , \quad (17')$$

Nel caso c) $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$ infine, per $w_1^0 < w_2^0$

$$x_2 \rightarrow 0 \quad \text{per } t \rightarrow +\infty \quad ,$$

mentre quando vale (13') $w_1^0 = w_2^0$ il sistema si trova nel punto di

equilibrio instabile G.

Condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di un punto di equilibrio G concomitante e globalmente stabile del sistema (7), soggetto alle condizioni (10), è quella che caratterizza il caso a), dunque

$$\alpha_1 < 0 \quad \text{e} \quad \alpha_2 < 0 \quad (18)$$

5. Concomitanza nel ciclo

Ammesso che

$$A_1 - C_2 + \frac{B_1 - B_2}{c} \neq 0 \quad , \quad A_2 - C_1 - \frac{B_1 - B_2}{c} \neq 0 \quad (10')$$

il ciclo di partenza (1) è ricondotto, tramite le formule (9)

$$\alpha_1 = A_1 - C_2 + \frac{B_1 - B_2}{c} \quad , \quad \alpha_2 = A_2 - C_1 - \frac{B_1 - B_2}{c} \quad ,$$

al sistema (7) del tipo considerato, ossia soggetto alle condizioni (10).

Ci avvediamo che *la condizione (18) è identica alla (4)*

$$-(C_2 - A_1) c < B_2 - B_1 < (C_1 - A_2) c \quad ,$$

già dedotta usando la condizione ausiliare (3)

$$A_1 < C_2 \quad , \quad A_2 < C_1,$$

che era una mezzo per non discostarsi troppo dai cicli classici di Eigen.

Pur non necessaria, la condizione (3) - come si vede dalla (4) - garantisce *concomitanza in ogni ciclo generalizzato* (1) a *concentrazione c sufficientemente alta*. Come si vede dalla (4), ogni ciclo classico ($A_i = 0$) ad *alta concentrazione c è concomitante*. Pure per la (4), la *concomitanza nei cicli puramente catalitici* ($A_i = 0, B_i = 0$) è invece *incondizionata*.

6. Esempi numerici

Dati i coefficienti ed i valori iniziali di (1), formati gli α_i secondo (9) ed accertato che questi non si annullano e che vale

$$w_1^0 = \frac{1}{\alpha_1 x_1^0} < w_2^0 = \frac{1}{\alpha_2 x_2^0} \quad (13)$$

la *cinetica del ciclo in forma parametrica* è ottenuta facendo diminuire progressivamente il *parametro z* dal suo valore iniziale w_1^0 al suo valore limite per $t \rightarrow +\infty$. Tramite (15) e (17) otteniamo i corrispondenti valori $t = t(z)$ e $x_i = x_i(z)$.

6.1 Una prima scelta di (1).

Con

$$\begin{array}{llll} A_1 = 0.1 & B_1 = 2 & C_1 = 4 & x_1^0 = 1 \\ A_2 = 0.9 & B_2 = 3 & C_2 = 5 & x_2^0 = 9 \end{array}$$

ci troviamo nel caso a), poiché

$$\alpha_1 = -5, \quad \alpha_2 = -3$$

$$w_1^0 = -0.2 < w_2^0 = -0.037$$

Il sistema si muove verso $G(3.75, 6.25)$ facendo diminuire il parametro z dal valore iniziale $w_1^0 = -0.2$ al suo valore limite $z = -\infty$, con corrispondente sviluppo di (15) e (17)

$$t = -\frac{1}{10} \ln(|z|^{-\frac{1}{5}} |z + 0.163|^{-\frac{1}{3}}) + 0.142$$

$$x_1 = \frac{30z + 4.89}{8z + 0.489}$$

tabulato come segue

z	t	x ₁	x ₂
-0.2	0	1	9
-0.25	0.03	1.7	8.3
-0.3	0.05	2.2	7.8
-0.4	0.075	2.6	7.4
-0.5	0.09	2.9	7.1
-1	0.14	3.3	6.7
-10	0.26	3.7	6.3
$-\infty$	∞	3.75	6.25

6.2 Un sistema darwiniano

Se si azzerano, nel ciclo appena considerato, tutti i coefficienti ad eccezione di $B_1 = 2$, $B_2 = 3$, troviamo il darwiniano

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 - x_1 \Omega_3, & x_1^0 = 1 \\ \dot{x}_2 = 3x_2 - x_2 \Omega_3, & x_2^0 = 9 \end{cases}, \quad x_1 + x_2 = 10$$

equivalente al sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -0.1x_1^2 - x_1 \Omega_1, & x_1^0 = 1 \\ \dot{x}_2 = 0.1x_2^2 - x_2 \Omega_1, & x_2^0 = 9 \end{cases}, \quad x_1 + x_2 = 10$$

La soluzione di (1) è immediata [1, 5, 6]

$$x_1 = \frac{10}{1 + 9e^t}$$

e coincide con la parametrizzazione di (7): ci troviamo *nel caso b)*, poiché

$$\alpha_1 = -0.1, \quad \alpha_2 = 0.1, \quad w_1^0 = -10 < w_2^0 = 1.11$$

Usiamo (15) e (17):

$$t = -\frac{1}{10} \ln(|z|^{-10} (z + 11.11)^{10}) - 2.198, \quad x_1 = 0.9z + 10$$

e facciamo scendere z dal valore iniziale $w_1^0 = -10$ a $-K_2 = -11.11$, ottenendo

z	t	x_1
-10	0	1
-10.2	0.2	0.8
-10.4	0.5	0.6
-10.6	0.8	0.4
-10.8	1.4	0.3
-11	2.4	0.1
-11.1	4.8	0.01
-11.11	∞	0

Per esempi del caso c) rimandiamo a [1].

Bibliografia

- [1] Steiner A., Sistemi dinamici non lineari, Corso d'aggiornamento di matematica, Liceo Cantonale di Mendrisio, 1989.
- [2] Steiner A., Sistemi dinamici non lineari, Corso d'aggiornamento di matematica, Liceo Cantonale di Mendrisio, 1987.
- [3] Eigen M., Schuster P.: The Hypercycle, Springer, 1979.
- [4] Eigen M., Winkler R.: Il gioco, Adelphi, 1987.
- [5] Steiner A., Alcune associazioni biologiche in Sguardo matematico nella biologia, Mendrisio, 1990.
- [6] Steiner A., Modelli matematici dell'evoluzione in Evoluzionismo:
Un dibattito aperto, Mendrisio, 1985.

Soletta, luglio 1991