

Modello strutturalmente stabile per il sistema predatore-preda.

di Ivano Tavernelli

La stabilità strutturale

In molte situazioni fisiche, in chimica e in biologia, l'evoluzione del sistema studiato dipende da un certo numero di parametri. Contemporaneamente all'evoluzione del sistema, come conseguenza delle perturbazioni esterne, alcuni parametri che caratterizzano il modello possono subire delle variazioni anche rilevanti. Allo stesso modo nuovi parametri possono venire attivati incrementando così il numero dei gradi di libertà del sistema, oppure disattivati permanentemente o solo momentaneamente. In ogni caso il cambiamento dei parametri e del loro numero, generalmente cambia la struttura delle equazioni stesse.

Un sistema nel quale la struttura topologica delle traiettorie del sistema "perturbato" rimane sostanzialmente la medesima di quella osservata nel sistema originale è detto *strutturalmente stabile* [1].

Una semplice descrizione del concetto di stabilità strutturale può essere ricavata dall'analisi del moto del pendolo. Il modello comunemente in uso per descrivere questo sistema è quello dell'oscillatore armonico che nel piano di fase è rappresentato da un numero infinito di traiettorie periodiche che dipendono strettamente dalle condizioni iniziali. In natura però le cose vanno in modo diverso, infatti un pendolo non può mai essere descritto in modo esatto come un oscillatore armonico in quanto è soggetto all'azione frenante della forza di attrito. In questo caso si avrà quindi un sistema che evolve verso un unico stato di equilibrio. Si può quindi concludere che le equazioni che descrivono l'oscillatore armonico sono strutturalmente instabili rispetto all'attrito.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - k \cdot x_2 \end{cases}$$

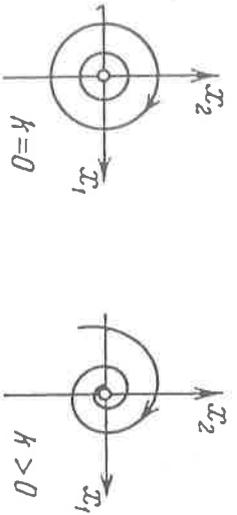


Fig. 1. Equazioni e orbite per l'oscillatore armonico nei casi $k=0$ e $k>0$.

Siccome la maggior parte dei modelli focalizza l'attenzione su di un numero ridotto di variabili rappresentative, nel giusto intento di diminuire il numero dei gradi di libertà del sistema, questo tipo di stabilità rappresenta una proprietà sicuramente importante. Infatti l'introduzione di un nuovo parametro nella descrizione del sistema non influenzerà l'andamento globale delle traiettorie del piano di fase.

Stabilità strutturale di un'orbita chiusa Γ

Definiamo $\varphi(t, \mathbf{p})$ come la soluzione periodica con periodo T dell'equazione differenziale $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ e con Γ indichiamo la rispettiva orbita.

Definizione 1. Il segmento

$$L_\varepsilon = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{x} = \mathbf{p} + a \cdot \mathbf{v}, 0 \leq |a| \leq \varepsilon \}$$

viene chiamato sezione trasversale all'orbita Γ nel punto \mathbf{p} (\mathbf{v} è un vettore in \mathbb{R}^2 non collineare alla tangente a Γ nel punto \mathbf{p}).

Siccome:

- i) $\varphi(T, \mathbf{p}) = \mathbf{p}$,
 - ii) le soluzioni dipendono in modo continuo dai valori iniziali,
- allora esiste un $\varepsilon > 0$, tale che:

se $\mathbf{x}_0 \in L_\varepsilon \Rightarrow \exists$ un periodo $T(\mathbf{x}_0) > 0$, tale che $\varphi(T(\mathbf{x}_0), \mathbf{x}_0) \in L_\varepsilon$.

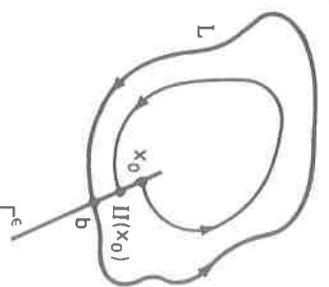


Fig. 2. Sezione trasversale dell'orbita periodica Γ nel punto \mathbf{p} .

Definizione 2. Un'applicazione di Poincaré nei dintorni di un'orbita periodica Γ è definita dalla funzione:

$$\Pi: L_\varepsilon \rightarrow L_\varepsilon; \mathbf{x}_0 \mapsto \varphi(T(\mathbf{x}_0), \mathbf{x}_0) = \Pi(\mathbf{x}_0).$$

Π è detta monotona quando per due punti \mathbf{x}_0 e \mathbf{x}_1 per i quali $\mathbf{x}_0 \geq \mathbf{x}_1$, vale

$$\Pi(\mathbf{x}_0) \geq \Pi(\mathbf{x}_1).$$

$$\{ \text{NB: } \mathbf{x}_0 \geq \mathbf{x}_1 \Leftrightarrow \mathbf{x}_0 = \mathbf{p} + a_0 \cdot \mathbf{v}, \mathbf{x}_1 = \mathbf{p} + a_1 \cdot \mathbf{v} \text{ e } a_0 \geq a_1 \}.$$

Per la dimostrazione dei teoremi riportati qui sotto rimando alla letteratura [2].

Teorema 1. L'applicazione di Poincaré possiede le seguenti proprietà:

- (i) Π in un intorno di Γ è una funzione monotona appartenente a C^1 .
- (ii) L'orbita $\varphi(\mathbf{x}_0)$ passante per il punto $\mathbf{x}_0 \in L_\varepsilon$ è periodica se e solo se \mathbf{x}_0 rappresenta un punto fisso dell'applicazione di Poincaré.
- (iii) L'orbita periodica Γ per $\mathbf{p} \in L_\varepsilon$ è detta *asintoticamente stabile* se $\Pi'(\mathbf{p}) < 1$, e *instabile* se $\Pi'(\mathbf{p}) > 1$.

Definizione 3. L'orbita periodica Γ che passa per il punto \mathbf{p} è chiamata *iperbolica* se \mathbf{p} è un punto fisso iperbolico dell'applicazione di Poincaré Π , cioè se vale $\Pi'(\mathbf{p}) \neq 1$, dove [2]

$$\Pi'(p) = \exp \left\{ \int_0^T \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} (\varphi(t, p)) dt \right\}.$$

Definizione 4. Un punto fisso \bar{x} è detto *iperbolico* se l'applicazione lineare :

$$x \mapsto Df(x) x,$$

dove $Df(x)$ è il differenziale di f , non possiede alcun valore proprio con modulo uno.

Teorema 2. Un campo di vettori $f \in C^k$ definito in un sottoinsieme compatto D di \mathbb{R}^2 , è detto strutturalmente stabile in D se e solo se f soddisfa le seguenti proprietà:

- (i) tutti i punti di equilibrio sono iperbolici
- (ii) tutte le orbite periodiche sono iperboliche
- (iii) non esistono connessioni tra punti di sella.

Il modello di Holling and Tanner

Come già ho ricordato nella parte introduttiva i fenomeni modellati con sistemi che presentano un centro nel piano di fase, rappresentano delle oscillazioni sensibili alle minime perturbazioni al modello.

Nel caso particolare del sistema predatore-preda (Volterra-Lotka), se le equazioni

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (a - bx_2) x_1 \\ \dot{x}_2 = (-c + dx_1) x_2 \end{cases}$$

vengono modificate in modo da includere un ulteriore termine che rappresenta una possibile competizione tra individui appartenenti alla stessa specie, il sistema risultante:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (a - b x_2 - \alpha x_1) x_1 \\ \dot{x}_1 = (a - b x_2 - \alpha x_1) x_1 \end{cases}$$

non sarà più rappresentato da un centro nel piano di fase. Infatti in questo caso le oscillazioni delle popolazioni decadono anche per piccoli valori di α e β .

Un metodo alternativo per rappresentare oscillazioni in sistemi non lineari è costituito dal *ciclo limite*. Infatti questo tipo di traiettoria del piano di fase è strutturalmente stabile (nel senso dei teoremi 1 e 2).

Il modello di Holling-Tanner permette di descrivere le oscillazioni delle popolazioni di un sistema predatore-preda con delle traiettorie a ciclo limite.

Le equazioni dinamiche sono:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = r \left(1 - \frac{x_1}{K}\right) x_1 - \frac{w x_1 x_2}{(D + x_1)} \\ \dot{x}_2 = s \left(1 - \frac{x_2}{x_1}\right) x_2 \end{cases}$$

dove $r, s, K, D, J > 0$.

Interpretazione dei parametri:

La velocità di crescita della popolazione preda è il risultato della differenza di due termini:

1) Il primo termine esprime la crescita della popolazione preda nel caso in cui non è presente alcun predatore. Viene inoltre considerata la possibilità di competizione tra le prede stesse per una imprecisata risorsa limitante.

2) Il secondo termine descrive invece l'effetto della predazione. Per poter spiegare questo tipo di andamento è necessario introdurre il concetto di *velocità di predazione*. Quest'ultimo rappresenta il numero di prede uccise per predatore per unità di tempo. Nel caso del modello di Volterra questa grandezza viene espressa dal termine $b x_1$. Ciò significa che il numero di prede uccise da parte di un singolo predatore per unità di tempo può aumentare in modo indefinito con l'aumento della disponibilità di prede. È probabilmente più ragionevole pensare ad un modello in cui la velocità di predazione viene limitata da un valore massimo, che corrisponde ad una sorta di saturazione dell'appetito del predatore. Nel modello riportato questo limite è rappresentato dal valore w .

La velocità di crescita della popolazione dei predatori è limitata dalla scarsa disponibilità di prede. Nel modello di Holling il numero di prede necessario per garantire la sopravvivenza di un singolo predatore è indicato

da J . Ciò significa che la popolazione delle prede può sopportare al massimo x_1/J predatori. La crescita della popolazione dei predatori viene quindi modellata con un'equazione logistica del tipo $\dot{x}_2 = x_2(a - b x_2)$, dove però il termine b è considerato come funzione del numero di prede.

Discussione delle traiettorie:

Il sistema proposto non è risolvibile analiticamente e quindi l'analisi è limitata alla discussione del tipo di traiettorie risultanti nel piano di fase e alla loro stabilità.

Le 0-isocline indicano l'esistenza di un punto fisso con valori positivi per le variabili x_1 e x_2 : (x_1^*, x_2^*)

Zero-isocline:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0; x_2 = (r/w).(1 - x_1/K).(D + x_1), \\ \dot{x}_2 = 0; x_2 = x_1/J. \end{cases}$$

Punto fisso:

$$\begin{aligned} x_1^* &= \frac{1}{2} \left(-D + K - \frac{K.w}{J.r} + \sqrt{J^2.r^2(D + K)^2 + w.K(2.J.r(D - K) + K.w)} \right) / J.r \\ x_2^* &= \frac{x_1^*}{J} \end{aligned}$$

Per determinare la natura di questo punto fisso è conveniente scalare le variabili x_1 e x_2 dividendole per x_1^* .

Il sistema dinamico nelle variabili $y_1 = x_1/x_1^*$ e $y_2 = x_2/x_2^*$ risulta

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = r \left(1 - \frac{x_1}{K} \right) x_1 - \frac{w y_1 y_2}{(d + y_1)} \\ \dot{y}_2 = s \left(1 - \frac{J y_2}{y_1} \right) y_2 \end{cases}$$

dove $k = K/x_1^*$ e $d = D/x_1^*$.

Per il punto fisso nel piano y_1, y_2 vale:

$$\begin{cases} y_1^* = 1 \\ y_2^* = \frac{r}{w} \left(1 - \frac{1}{k} \right) (1 + d) = \frac{(*)}{J} \end{cases}$$

(*) : utilizzando le equazioni delle 0-isocline.

Il sistema linearizzato attorno a (y_1^*, y_2^*) è caratterizzato dalla matrice:

$$W = \begin{bmatrix} r \cdot \left(-\frac{1}{k} + \frac{w}{r \cdot j \cdot (1 + d)^2} \right) & -\frac{w}{1 + d} \\ \frac{s}{j} & -s \end{bmatrix}$$

Il tipo di stabilità associato a questo punto fisso può essere dedotto dall'analisi del segno delle grandezze $\text{Det}(W)$ e $\text{Tr}(W)$, riportate qui sotto:

$$\begin{aligned} \text{Det}(W) &= r \cdot s \cdot \left(\frac{1}{k} + \frac{w \cdot d}{r \cdot j \cdot (1 + d)^2} \right) > 0 \\ \text{Tr}(W) &= r \cdot \left(\frac{w}{r \cdot j \cdot (1 + d)^2} - \frac{1}{k} \right) - s = \frac{r \cdot (k - d - 2)}{k \cdot (1 + d)} - s. \end{aligned}$$

Il punto fisso (y_1^*, y_2^*) diventa instabile quando il valore della traccia di W diventa positivo. In questo caso però il teorema di Poincaré-Bendixson [2] garantisce l'esistenza di un ciclo limite.

Concludendo, se si sceglie una combinazione dei parametri r, s, k e d per la quale vale:

$$s < \frac{r \cdot (k - d - 2)}{k \cdot (1 + d)},$$

si ottengono nel piano di fase le traiettorie riportate in Fig. 3.

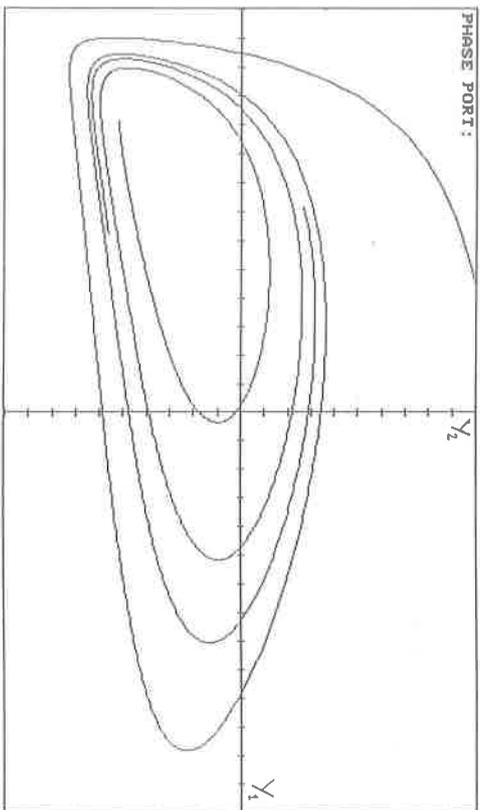


Fig.3. Traiettorie nel piano di fase per il modello di Holling.
($r=1, s=0.2, k=7.0, d=0.1$)

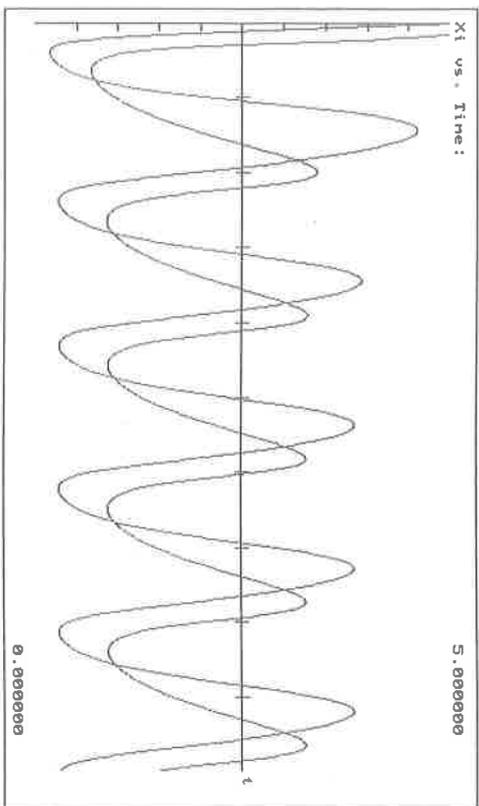


Fig.4. Oscillazioni delle popolazioni preda : x_1 e predatore: x_2 .

Bibliografia

- [1] V. Arnold, Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations, Springer-Verlag, 1983.
- [2] J. Hale, H. Kocak, Dynamics and Bifurcations, Springer-Verlag, 1991.