

Autolimitazione fevole

di Martin Gander

In due recenti lavori [1, 2] sono stati sviluppati dei principi che in confronto a quanto rovarato da V. Volterra e da B.L. Jones [3] segnano un progresso verso una più realistica descrizione dell'evoluzione di due popolazioni in competizione. Le nuove idee tengono aperta la possibilità di una convivenza relativamente pacifica tra le popolazioni, ma necessitano dell'aggiunta di un nuovo concetto, quello di *autolimitazione fevole*, finora del tutto trascurato. Grazie ad esso il passaggio dai classici Teoremi di Volterra ai nuovi enunciati si effettua gradualmente in modo del tutto naturale.

Nel presente lavoro consideriamo i primi due anelli di una *catena nutritiva*, all'inizio della quale poniamo una popolazione x_1 (insalata) con crescita appunto fevolmente autolimitata e che in più presenti una *periodicità stagionale*. Di x_1 si nutra la popolazione x_2 (lepri). Lo studio completo anche solo di queste due popolazioni in interazione si rivela particolarmente istruttivo. In un secondo tempo si potrebbe introdurre un ulteriore livello trofico, considerando anche la presenza di una terza popolazione x_3 (lupi) che si nutre di x_2 .



1. Insalata e lepri

Al calar della notte, quando il contadino si è ritirato nella fattoria, nel suo orto giungono le lepri (x_2) dei dintorni a saziarsi della per loro gustosissima insalata (x_1) che vi è coltivata. Supponiamo che quest'ultima, in assenza delle lepri, abbia una velocità di crescita

$$\dot{x}_1 = x_1 (a_1 - k \ln x_1)$$

rallentata per autolimitazione con coefficiente k rispetto al tasso di crescita intrinseca a_1 . Quest'ultimo presenta una fluttuazione periodica stagionale che sarà specificata nel seguito.

Ammettiamo poi per semplicità che le lepri x_2 si nutrano esclusivamente di x_1 e che, senza questo loro cibo, scomparirebbero con andamento esponenziale:

$$\dot{x}_2 = -a_2 x_2$$

con $a_2 > 0$.

Ad un dato istante ($t = 0$) le due popolazioni vengono messe in interazione (le lepri scoprono l'insalata). Assumiamo termini di accoppiamento logaritmici ϵ , per ridurre al minimo il numero dei parametri, poniamo uguale a 1 i coefficienti dei termini che rappresentano la predazione. Giungiamo allora a formulare il seguente esempio di *sistema preda-predatore*:

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 (a_1 - k \ln x_1) - x_1 \ln x_2 & ; \quad x_1^0 > 0 \\ \dot{x}_2 = -a_2 x_2 + x_2 \ln x_1 & ; \quad x_2^0 > 0 \end{cases}$$

Tramite la sostituzione

$$(2) \quad y_i = \ln x_i, \quad i = 1, 2$$

il sistema (1) viene ricondotto al *sistema-base*

$$(3) \quad \begin{cases} \dot{y}_1 = -k y_1 - y_2 + a_1 & ; \quad y_1^0 \\ \dot{y}_2 = y_1 & - a_2 & ; \quad y_2^0 \end{cases}$$

2. Classificazione dei sistemi

La classificazione dovrà essere semplice ma abbastanza fine da distinguere chiaramente le differenze essenziali di comportamento delle soluzioni y_i del sistema-base (3), che poi, tramite la (2), permettono di risalire all'evoluzione delle popolazioni reali x_i del nostro modello. Quale *parametro-chiave* si offre in modo del tutto naturale il tasso di autolimitazione k . Esso è infatti il solo responsabile dei valori propri del sistema omogeneo associato a (3) e quindi del comportamento della sua soluzione generale. Questi valori propri sono le soluzioni dell'*equazione caratteristica*

$$\omega^2 + k\omega + 1 = 0$$

ossia

$$(4) \quad \omega_{1,2} = -\frac{k}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{k}{2}\right)^2 - 1}$$

Infine fissiamo le omogeneità del sistema (3)

$$(5) \quad a_1 = \alpha + \beta \cos \omega t, \quad a_2 = \gamma.$$

Osserviamo che il sistema (3) con i coefficienti (5) coincide con un sistema fisico molto noto: un oscillatore con forza periodica applicata dall'esterno e attrito proporzionale alla velocità. Infatti introducendo le nuove variabili z_1, z_2 tramite

$$y_1 = z_1 + \gamma, \quad y_2 = z_2 + \alpha - k\gamma$$

si ottiene il sistema

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = -k \cdot z_1 - z_2 + \beta \cos \omega t \\ \dot{z}_2 = z_1 \end{cases}$$

che rappresenta appunto l'oscillatore.

Per giungere ad una *classificazione* dei nostri sistemi basterà tenere in considerazione che per $\beta = 0$, se gli ω_i risultano immaginari avremo a che

fare con un sistema preda-predatore di tipo classico. D'altra parte abbiamo già incontrato in [1, 2] sistemi lineari con inomogeneità del tipo (5) e parametro $\omega = 1$. Avevamo però sempre scelto k in modo che i valori propri risultassero negativi. Per il sistema (3) dovremo distinguere fra

autolimitazione nulla per $k = 0$, con valori propri $\omega_{1,2} = \pm i$,

autolimitazione fiavole quando $0 < k < 2$, con valori propri complessi a parte reale negativa,

autolimitazione forte per $k \geq 2$, con valori propri negativi.

Il caso intermedio è il più interessante.

Infine l'introduzione del parametro ω ci permetterà di ritrovare nel contesto biologico due fenomeni fisicamente noti che si producono solo per $k = 0$: *comportamento per così dire "caotico" del sistema* rispetto ad infimi cambiamenti di ω e *risonanza* per $\omega = 1$. Saranno quindi da scartare quei modelli preda-predatore senza autolimitazione, non appena subentra anche una minima fluttuazione stagionale nella crescita della preda, il che in natura si verifica sempre.

3. Autolimitazione nulla: $k = 0$

Si consideri il sistema preda-predatore con autolimitazione nulla:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1 x_1 - x_1 \ln x_2 & ; & x_1^0 > 0 \\ \dot{x}_2 = -a_2 x_2 + x_2 \ln x_1 & ; & x_2^0 > 0 \end{cases}$$

con i coefficienti a_i dati dalla (5). Il sistema-base lineare non autonomo associato è

$$(6) \quad \begin{cases} \dot{y}_1 = -y_2 + \alpha + \beta \cos \omega t & ; & y_1^0 \\ \dot{y}_2 = y_1 - \gamma & ; & y_2^0 \end{cases}$$

possiede soluzioni che differiscono essenzialmente fra di loro a seconda del valore di ω . Una prima distinzione da operare sarà quella fra i casi $\omega = 1$ e $\omega \neq 1$.

3.1 Caso $k = 0$, $\omega = 1$

Quale soluzione di (6) si trova

$$(7) \quad \begin{cases} y_1 = \gamma + \frac{\beta}{2} \cdot \sin t + \frac{\beta}{2} \cdot t \cos t + K_1 \cos t + K_2 \sin t \\ y_2 = \alpha + \frac{\beta}{2} \cdot t \sin t + K_1 \sin t - K_2 \cos t \end{cases}$$

Particolare è il caso classico $\beta = 0$, dove le traiettorie sono delle circonferenze con centro (γ, α) e passanti per (y_1^0, y_2^0) , mentre la presenza di un'eccitazione ciclica nel coefficiente di crescita della preda porta a *risonanza*.

3.2 Caso $k = 0$, $\omega \neq 1$

Trovata la soluzione esplicita di (6), cioè

$$(8) \quad \begin{cases} y_1 = \gamma - \frac{\beta \omega}{1 - \omega^2} \cdot \sin \omega t + K_1 \cos t + K_2 \sin t \\ y_2 = \alpha + \frac{\beta}{1 - \omega^2} \cdot \cos \omega t + K_1 \sin t - K_2 \cos t \end{cases}$$

passiamo alla discussione che ne deriva.

3.2.1 $k = 0$, $\omega \neq 1$, ω razionale

Dalla (8) si desume che si avrà una *traiettoria chiusa se e solo se*

$$\omega = \frac{m}{n} \quad , \quad m, n \in \mathbb{N}$$

Essa è percorsa nel *periodo* $T = 2\pi n$ dove n denota il denominatore della frazione, supposta ridotta ai minimi termini.

Questo comportamento è visibile nella Figura 1, tracciata per $k = 0$, $\alpha = \beta = \gamma = 1$, $y_1^0 = y_2^0 = 1/2$, $\omega = 1/2$.

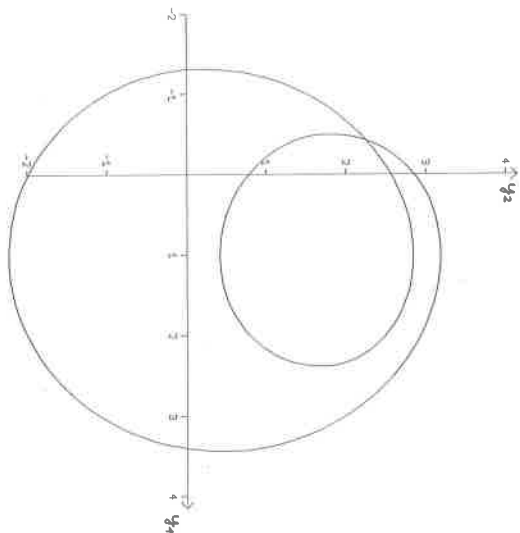


Fig. 1

3.2.1. In prossimità della risonanza:

Nella Figura 2 abbiamo mantenuto $k = 0$, $\alpha = \beta = \gamma = 1$, $y_1^0 = y_2^0 = 1/2$ e scelto invece $\omega = 0,9$, valore prossimo al valore critico 1. Fino a metà del periodo $T = 20\pi$ le oscillazioni vanno ampliandosi per poi smorzarsi tornando ai valori iniziali.

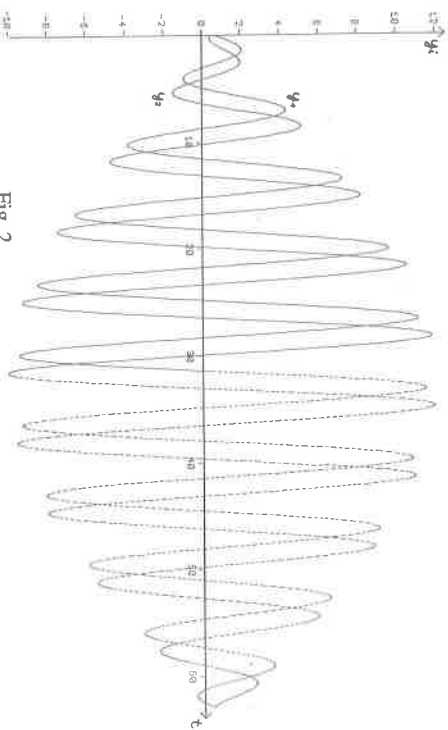


Fig. 2

3.2.2. Orbite che non si chiudono:

Consideriamo ancora una volta un sistema preda-predatore non autolimitato, ora però con ω irrazionale : $k = 0$, $\alpha = \beta = \gamma = 1$, $y_1^0 = y_2^0 = 1/2$, $\omega = \sqrt{2}$. Per farci un'idea della traiettoria, in una serie di consecutive figure (Figura 3) abbiamo tracciato il suo inizio da $t = 0$ fino a multipli via via crescenti del periodo $T = 4\pi$ della semplice orbita corrispondente al numero razionale $\omega = 3/2$ non molto lontano da $\omega = \sqrt{2}$.

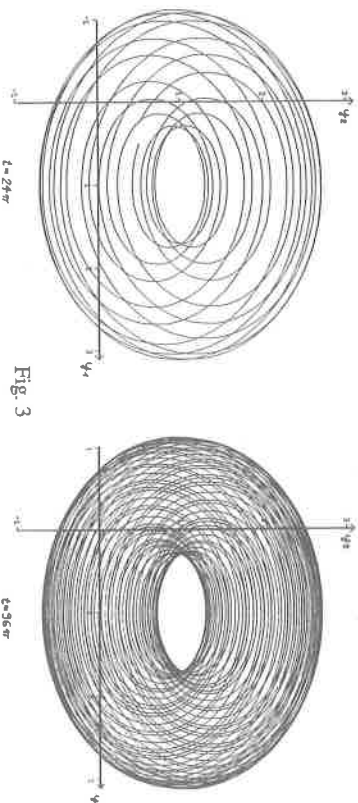
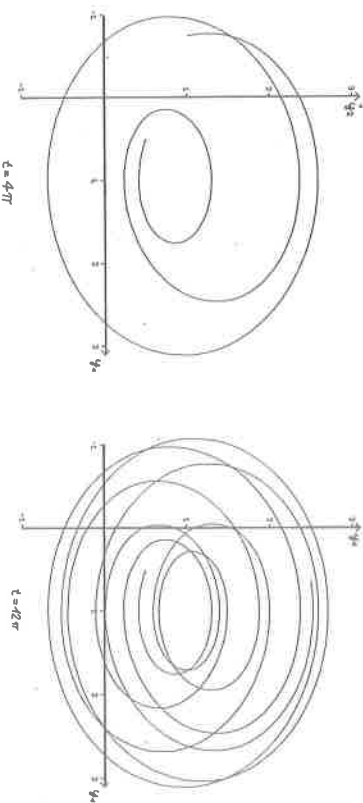


Fig. 3

Si noti che per valori irrazionali di ω si hanno delle regioni non semplicemente connesse nel piano di fase in cui la traiettoria risulta densa.

4. Autolimitazione positiva

Quanto esposto finora ci porta a scartare tutti i sistemi (6) preda-predatore non autolimitati, ma periodicamente eccitati, per la loro instabilità strutturale. Per contro, non appena in (3) subentra un' autolimitazione $k > 0$, anche flevole, eviteremo gli inconvenienti incontrati.

4.1 Un esempio

Poniamo in (3) $k = 3/2$ ottenendo

$$(9) \quad \omega_{1,2} = -\frac{3}{4} \pm \frac{i}{4}\sqrt{7}.$$

La corrispondente soluzione esplicita, avendo scelto per comodità $\omega = \sqrt{7}/4$, sorprende per la sua semplicità:

$$(10)$$

$$\begin{cases} y_1 = \gamma + \beta \left[\frac{56}{111}c - \frac{4\sqrt{7}}{37}s \right] + K_1 e^{\frac{3}{4}t} c + K_2 e^{\frac{3}{4}t} s \\ y_2 = \alpha - \frac{3}{2}\gamma + \beta \left[\frac{16}{37}c + \frac{32\sqrt{7}}{111}s \right] + \left(-\frac{3}{4}K_1 - \frac{\sqrt{7}}{4}K_2 \right) e^{\frac{3}{4}t} c + \left(\frac{\sqrt{7}}{4}K_1 - \frac{3}{4}K_2 \right) e^{\frac{3}{4}t} s \end{cases}$$

dove $c = \cos \frac{\sqrt{7}}{4}t$, $s = \sin \frac{\sqrt{7}}{4}t$.

Nella Figura 4 sono rappresentate le orbite che corrispondono ai valori

$$k = \frac{3}{2}, \quad \omega = \frac{\sqrt{7}}{4}, \quad \alpha = \gamma = 1, \quad \beta = 0/1, \quad y_1^0 = y_2^0 = \frac{1}{2}$$

e siamo rimasti compiaciuti di vedere che già per l' autolimitazione flevole che abbiamo considerato, le nostre popolazioni convivono pacificamente.

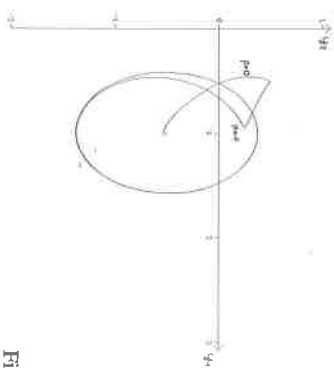


Fig. 4

4.2 Superamento delle traiettorie dense

La figura 5 ottenuta con

$$k = 0.5/2.5, \quad \omega = \sqrt{2}, \quad \alpha = \beta = \gamma = 1, \quad y_1^0 = y_2^0 = \frac{1}{2}$$

mostra l' andamento del nostro sistema preda-predatore per un valore irrazionale di ω in presenza di autolimitazione.

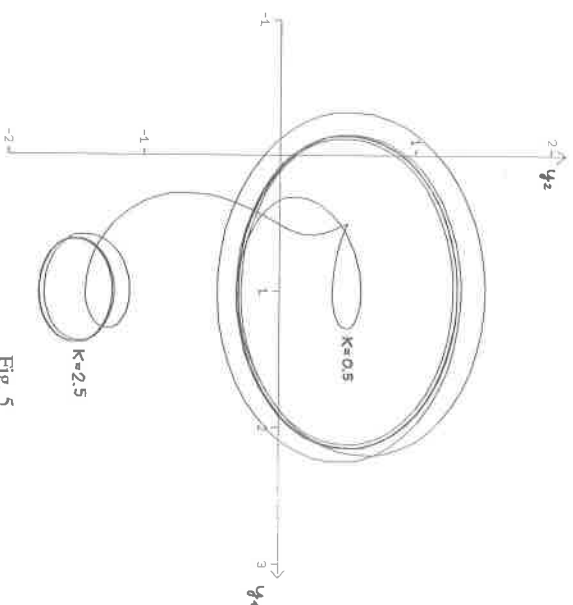


Fig. 5

4.3 Risonanza vinta

In Figura 6 abbiamo tracciato le orbite di (3) per

$$k = 0.5 / 2.5, \quad \omega = 1, \quad \alpha = \beta = \gamma = 1, \quad y_1^0 = y_2^0 = \frac{1}{2}$$

constatando con piacere che ora, grazie all' autolimitazione introdotta il sistema per $\omega = 1$ non presenta più risonanza.

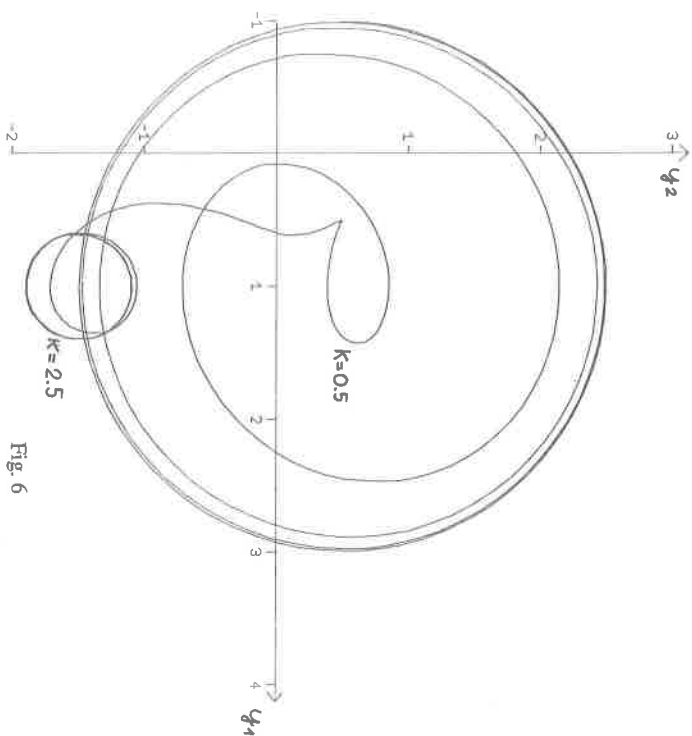


Fig. 6

L' effetto stabilizzatore dell' attrito è d' altronde ben noto nell' oscillatore forzato.

Bibliografia

- [1] Steiner A., Gander M.: *Perché la natura non perirà?* Il Volterrano nr.2, Liceo Cantonale e Biblioteca Cantonale di Mendrisio, 1992.
- [2] Steiner A., Gander M.: *Autolimitazione quale naturale principio di convivenza*, Il Volterrano nr.3, Liceo Cantonale e Biblioteca Cantonale di Mendrisio, 1993.
- [3] Steiner A.: *Alcune associazioni biologiche*, Sguardo matematico nella biologia, Liceo Cantonale e Biblioteca Cantonale di Mendrisio, 1990.