Sguardo nell'analisi delle equazioni differenziali alle derivate parziali con l'aiuto della teoria dei semigruppi, parte II

di Patrick Guidotti

0. INTRODUZIONE

In questa seconda parte cercheremo di mostrare come quanto presentato nel primo contributo [8] possa essere applicato al problema astratto di Cauchy. Presenteremo un metodo per affrontare equazioni differenziali ordinarie in uno spazio di dimensione infinita.
La soluzione del problema di Cauchy astratto potrà essere a sua volta applicata alla risoluzione di equazioni concrete, sia su tutto $\mathbb{R}^n$ che in un sottoinsieme limitato con contorno regolare $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Purtroppo non abbiamo né lo spazio né il tempo di trattare il secondo caso, che richiederebbe dei prerequisiti e dei risultati che non avrebbe senso introdurre in un lavoro, che vuole soltanto dare l'idea di una filosofia per affrontare le equazioni differenziali alle derivate parziali.

I. IL PROBLEMA DI CAUCHY ASTRATTO

Sia E uno spazio di Banach e $A : \mathrm{dom}(A) \subset E \to E$ un operatore lineare chiuso e densamente definito. Sia inoltre $f\colon J \times E \to E$ un'applicazione dal prodotto dell' intervallo $J \subset \mathbb{R}$, contenente lo zero e dello spazio E verso quest'ultimo e si consideri l'*equazione astratta di evoluzione* $(EE)_{(A,f)}$ nello spazio E

$$u' + Au = f(t,u) \quad , t \in J \qquad (EE)_{(A,f)}$$

Se si richiede inoltre che la funzione incognita soddisfi anche una condizione iniziale

$$u(0) = x \qquad (\text{con } x \in E) \qquad (\mathrm{CP})_{(x,A,f)}$$

allora si parlerà di *problema di Cauchy* $(\mathrm{CP})_{(x,A,f)}$.
Nel caso in cui $f(t,u) = f(t)$ l'equazione sarà detta *lineare inomogenea*, *lineare omogenea* se $f \equiv 0$. Mentre se f dipende anche da u si parlerà di equazione *non lineare*, nel caso specifico di equazione *semilineare*.

Non tratteremo il caso in cui l'operatore A dipende a sua volta dal tempo t e dall'incognita u, poiché le tecniche necessarie oltrepasserebbero gli scopi di questo articolo.

Definizioni

(a) $u: J \to E$ è detta *soluzione* di $(EE)_{(A,f)}$ in J, se le seguenti condizioni sono soddisfatte:

(i) $J \subset \mathbb{R}^+$, $0 \in J$ e J è un intervallo

(ii) $u \in C(J,E) \cap C^1(J^\circ,E)$ dove $J^0 := J - \{0\}$ e tale che
$u'(t) \in \mathrm{dom}(A)$ $\forall t \in J$ e $u'(t) + Au(t) = f(t,u(t))$ $\forall t \in J$

(b) u si dice *soluzione* di $(CP)_{(x,A,f)}$, se u è soluzione di $(EE)_{(A,f)}$ e $u(0) = x$.

La soluzione verrà indicata con $u(\cdot,A,f)$ oppure più semplicemente con u, rispettivamente con $u(\cdot,x,A,f)$ oppure brevemente con $u(\cdot,x)$.

(c) $(CP)_{(x,A,0)}$ viene detto *ben posto (well posed)*, se l'equazione

$$u' + Au = 0, \quad t > 0, \quad u(0) = x$$

possiede per ogni valore iniziale x nel dominio di A una sola soluzione $u(\cdot,x)$.

(1.1) Teorema (Motivazione)
Ammettiamo che $(CP)_{(x,A,0)}$ sia ben posto.
Se definiamo E_1=(dom(A), $\|\cdot\|_A$),dove $\|\cdot\|_A = \|\cdot\| + \|A\cdot\|$, ne consegue che per ogni $t \geq 0$ esiste un operatore $U_1(t) \in \mathbf{L}(E_1)$ con

(i) $U_1(0) = \mathrm{id}$

(ii) $U_1(t+s) = U_1(t)U_1(s)$ $\quad \forall t,s \geq 0$

(iii) $u(t,x) = U_1(t)x$ $\quad \forall t \geq 0,\ x \in \mathrm{dom}(A)$

Se inoltre $\rho(A) \neq \varnothing$ allora esiste un operatore $U(t) \in \mathbf{L}(E)$ con (i)-(iii) e

(iv) $(t \to U(t)x) \in C([0,\infty),E)$ $\quad \forall x \in E$

(1.2) Corollario
Sia $\rho(A) \neq \varnothing$. Allora $(CP)_{(x,A,0)}$ è ben posto se e soltanto se $-A$ genera un semigruppo fortemente continuo, ossia se e soltanto se $A \in \mathbf{G}(E)$.

Dimostrazione di (1.1):
Si ponga $U_1(t)x = u(t,x)$, dove u è la soluzione di $(CP)_{(x,A,0)}$, la cui esistenza e unicità è assicurata dalle ipotesi per tutti gli x del dominio di A.
Si dimostrerà allora senza grandi difficoltà che U_1 (per la continuità ci si avvalga del cosiddetto *closed graph theorem*) soddisfa le proprietà asserite.
Nel caso in cui $\rho(A) \neq \varnothing$, si assuma senza restrizione della generalità che $0 \in \rho(A)$ e si ponga $U(t) = AU_1(t)A^{-1}$. □

Dimostrazione di (1.2):
"$\Rightarrow$" È una conseguenza diretta di (1.1)
"$\Leftarrow$" Ci si rifaccia alla definizione di semigruppo continuo di operatori lineari. □

Dopo questa introduzione-motivazione esporremo alcuni risultati di esistenza della soluzione per i problemi di Cauchy astratti. Pregio di questa teoria è, tra le altre cose, che fornisce automaticamente con l'esistenza anche la dipendenza continua dai dati e la regolarità della soluzione. Per quanto riguarda la regolarità introdurremo una sottoclasse dei generatori di semigruppi continui, segnatamente la classe dei generatori di C^0-semigruppi analitici, che ci permetteranno di ottenere una maggiore regolarità spaziale della soluzione.

(1.3) Lemma
Siano $f = f(t) \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+,E)$, ossia localmente integrabile nel senso di Bochner, ed $A \in G(E)$, un generatore. Se $u(\cdot,x)$ è una soluzione di $(CP)_{(x,A,f)}$ allora è necessariamente della forma

$$u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-\tau)f(\tau)d\tau$$

dove $\{T(t) \,:\, t \geq 0\}$ è il semigruppo generato da $-A$.

Dimostrazione:

Per $0 \leq \tau \leq t$ definiamo $U(\tau) = T(t-\tau)u(\tau)$; ne segue

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau}U(\tau) &= AT(t-\tau)u(\tau) + T(t-\tau)u'(\tau) = \\ &= AT(t-\tau)u(\tau) - T(t-\tau)Au(\tau) + T(t-\tau)f(\tau)\end{aligned}$$

da cui

$$U(t) - U(0) = \int_0^t T(t-\tau)f(\tau)d\tau \;\Rightarrow\; u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-\tau)f(\tau)d\tau \quad \square$$

DEFINIZIONE

$u(\cdot,x) \,:\, J \to E$ è detta *soluzione debole* di $(\mathrm{CP})_{(x,A,f)}$ nell'intervallo J per $(x, A, f) \in E \times \mathbf{G}(E) \times C(J \times E, E)$ se soddisfa la *formula di variazione della costante*

$$u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-\tau)f(t, u(\tau))d\tau \qquad \forall t \in J$$

(1.4) OSSERVAZIONE

La definizione appena introdotta ammette come tali anche soluzioni che non sono necessariamente differenziabili.

DEFINIZIONE

Una funzione f: $E \to E$ si dice *localmente continua nel senso di Lipschitz*, oppure brevemente *lipschitziana*, se soddisfa la seguente condizione

$\forall u \in J$ esiste un intorno $\mathcal{U}$ di u con $\sup\limits_{u,v \in \mathcal{U}} \frac{\|f(u) - f(v)\|}{\|u - v\|} \leq C < \infty \quad \forall u \in \mathcal{U}$

Indicheremo con $C^{1-}(E, E)$ lo spazio di queste funzioni.

(1.5) COROLLARIO

Esiste al massimo una soluzione debole di $(\mathrm{CP})_{(x,A,f)}$ con $f \in C^{1-}(E, E)$ e di conseguenza anche al massimo una soluzione *classica*, dal momento che ogni soluzione *classica* è anche una soluzione debole.

Dimostrazione:

Siano u e v due diverse soluzioni di $(\mathrm{CP})_{(x,A,f)}$

$$\overset{(1.3)}{\Rightarrow} \quad u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-\tau)f(u(\tau))d\tau \quad \text{e}$$

$$v(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-\tau)f(v(\tau))d\tau$$

$$\|u(t) - v(t)\| \leq \int_0^t M \cdot e^{\omega(t-\tau)} \cdot \|f(u(\tau)) - f(v(\tau))\| d\tau \leq M \cdot L \cdot e^{\omega t} \cdot \int_0^t \|u(\tau) - v(\tau)\| d\tau$$

Da questa disuguaglianza e dal lemma di Gronwall segue immediatamente la tesi. $\square$

(1.6) TEOREMA (Esistenza)

Sia $(x, A, f) \in E_1 \times \mathbf{G}(E) \times \left(C^1(J, E) \cap C(J, E_1)\right)$.

In questo caso $(\mathrm{CP})_{(x,A,f)}$ possiede esattamente una soluzione $u = u(\cdot, x)$, che lo è nel senso stretto, cioè differenziabile anche nel punto 0 per $x \in E_1$, per cui vale

$$u \in C^1(J, E) \cap C(J, E_1)$$

Se $x \in E$, invece, il problema di Cauchy possiede esattamente una soluzione debole.

In entrambi i casi la soluzione è data dalla formula di variazione della costante.

Dimostrazione:

$$u(t) = \underbrace{T(t)x}_{v(t)} + \underbrace{\int_0^t T(t-\tau)f(\tau)d\tau}_{w(t)}$$

(i) Le proprietà asserite per $v(t)$ sono direttamente implicate dalla definizione di semigruppo e dalla definizione dello spazio E_1 con l'aiuto del teorema (1.5) della parte I.

(ii) Per quanto riguarda $w(t)$ si noti dapprima che, per il teorema di Banach-Steinhaus sulla limitatezza uniforme, è
$T(t-\cdot)f(\cdot)\in C(J,E_1)$ se vale $f\in C(J,E_1)$.
Per la chiusura dell'operatore A e il fatto che commuta con il semigruppo segue perciò:

$$A\int_0^t T(t-\tau)f(\tau)d\tau=\int_0^t T(t-\tau)Af(\tau)d\tau\in C(J,E)$$

e così

$$\int_0^t T(t-\tau)f(\tau)d\tau\in C(J,E_1).$$

D'altra parte se $f\in C^1(J,E)$ si osservi che

$$\int_0^t T(t-\tau)f(\tau)d\tau=\int_0^t T(t)f(t-\tau)d\tau,$$

da ciò segue considerando la regolarità di f e che l'integrale è una convoluzione la tesi anche in questo caso. □

(1.7) OSSERVAZIONE
Per l'esistenza e l'unicità della soluzione debole è sufficiente assumere $f\in\mathbf{L}^1(J,E)$.
Quali condizioni più deboli sarebbero sufficienti per l'esistenza della soluzione?

DEFINIZIONE
Sia $A\in\mathbf{G}(E)$. Il semigruppo fortemente continuo $T(t)$ generato da $-A$ è detto *analitico* se valgono le seguenti condizioni

(i) $\exists\vartheta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ per cui il semigruppo possiede un prolungamento $T(\zeta)$ in tutto il settore $\Sigma_\vartheta=\{\zeta\in\mathbb{C}:|\arg(\zeta)|\le J\}\cup\{0\}$ del piano complesso e questa estensione è fortemente continua anche rispetto alla variabile complessa ζ.

(ii) Inoltre, ponendo $\Sigma_\vartheta{}^0:=\Sigma_\vartheta-\{0\}$, vale che
$T:\Sigma_\vartheta{}^0\to\mathbf{L}(E),\ \zeta\to T(\zeta)$ è un'applicazione olomorfa.

Indicheremo con $\mathbf{H}(E)$ la sottoclasse di questi semigruppi.

(1.8) PROPOSIZIONE
Le seguenti affermazioni sono equivalenti:
(a) $A\in\mathbf{H}(E)$
(b) A è chiuso e densamente definito e per la risolvente valgono:

$$\exists\lambda_0\in\mathbb{R}:[\mathrm{Re}(\lambda)\ge\lambda_0]\subset\rho(-A);$$

$$\exists M\ge1:\left\|(\lambda+A)^{-1}\right\|\le\frac{M}{1+|\lambda|}\ \forall\lambda\in[\mathrm{Re}(\lambda)\ge\lambda_0]$$

(c) $A\in G(E)$ con $T(t)(E)\subset\mathrm{dom}(A),\ \forall t>0$;
$\exists M\in(0,\infty):\|tAT(t)\|\le M,\ \forall t>0$.

Dimostrazione:
È basata sulla rappresentazione del semigruppo con l'aiuto dell'integrale di Dunford. Per i dettagli si veda [1] oppure [2]. □

DEFINIZIONE
Una funzione $u: J\to E$ è detta *localmente ρ-continua nel senso di Hölder* se vale:

$\forall t\in J\ \exists$ un intorno $\mathcal{U}$ di t con $[u]_\rho=\sup_{r,s\in\mathcal{U}}\frac{\|u(r)-u(s)\|}{|r-s|^\rho}\le C<\infty\ \forall r,s\in\mathcal{U}$ dove

$\rho\in(0,1)$.
Lo spazio di tutte le funzioni hölderiane di esponente ρ viene indicato con $C^\rho(J,E)$ ed è uno spazio di Banach con la norma $\|u\|_{C^\rho}=\|u\|_\infty+[u]_\rho$.

(1.9) TEOREMA (Esistenza)

Siano $(x, A, f) \in E \times \mathbf{H}(E) \times C^{\rho}(J, E)$. Allora $(\mathrm{CP})_{(x,A,f)}$ possiede un'unica soluzione

$u = u(\cdot, x) \in C(J, E) \cap C^1(J^0, E) \cap C(J^0, E_1)$. Vale inoltre:

(i) se $x \in E_1$ allora la soluzione è nelle asserite classi di regolarità anche nel punto 0.

(ii) $u \in C^{1+\rho}([\delta, T], E) \cap C^{\rho}([\delta, T], E_1)$, dove $0 < \delta < T := \sup J$

$(u \in C^{1+\rho} \Leftrightarrow u, u_t \in C^{\rho})$.

(iii) se $x = 0$, $f(0) = 0$ vale allora: $u \in C^{1+\rho}(J, E) \cap C^{\rho}(J, E_1)$

Dimostrazione:
La dimostrazione si basa sulla disuguaglianza per semigruppi analitici della proposizione (1.8) che permette di dimostrare l'esistenza dell'integrale della formula di variazione della costante anche sotto le ipotesi meno restrittive su *f*. La regolarità segue allora dalla stessa formula.
Per i dettagli si vedano [4] oppure [5]. □

(1.10) OSSERVAZIONI

(a) È possibile definire una scala continua di spazi intermedi tra E ed E_1, detti spazi di interpolazione, per mezzo dei quali si rende possibile dare una migliore caratterizzazione della regolarità della soluzione (cfr. [3]).

(b) I risultati ottenuti sopra possono essere estesi ad una certa classe di operatori che possono dipendere dalla variabile temporale, cioè $A = A(t)$.

(c) Risultati analoghi possono essere ottenuti pure per una determinata classe di sistemi di equazioni di evoluzione.

(1.11) TEOREMA (Problema semilineare)

Siano $(x, A, f = f(u)) \in E \times \mathbf{H}(E) \times C^{1-}(E, E)$. Allora $(\mathrm{CP})_{(x,A,f)}$ possiede un'unica soluzione debole locale $u(\cdot, x)$, ossia su intervallo $J = [0, T]$, che è la soluzione di $(\mathrm{CP})_{(x,A,f\circ u)}$ ed è stretta se vale $x \in \mathrm{E}_1$.

Dimostrazione:
Anche in questo caso lo strumento principale è la formula di variazione della costante, che ci permette di trasformare il problema di Cauchy in un'equazione integrale in $C(J_\tau, E)$, con $J_\tau = [0, \tau]$ *e* $\tau > 0$; l'operarore integrale diventa una contrazione se si rende τ sufficientemente piccolo e si può quindi applicare il teorema del punto fisso di Banach per ottenere l'esistenza (confronta uno qualsiasi dei riferimenti bibliografici indicati). □

(1.12) OSSERVAZIONI

(a) Con l'aiuto degli spazi d'interpolazione e la loro caratterizzazione mediante le potenze dell'operatore A è possibile ottenere risultati più precisi sulla regolarità della soluzione anche con ipotesi più deboli per *f*.

(b) Risultati analoghi di esistenza e regolarità possono essere ottenuti per un'ulteriore estensione al caso quasilineare, cioè quando
$A = A(u)$ e $f = f(u)$.

Per entrambe le estensioni si veda fra gli altri [3], dove l'autore presenta, oltre i contributi personali allo sviluppo della teoria, il lavoro svolto negli ultimi anni nel campo dei sistemi parabolici di evoluzione di tipo lineare e quasilineare.

II. APPLICAZIONI

DEFINIZIONE
Siano *E*, *F* spazi di Banach e

$$B \in A(E, F) = \{A:\ \mathrm{dom}(A) \subset E \longrightarrow F \mid A \text{ è chiuso}\},$$

cioè un operatore chiuso. Un sottospazio $D_0 \subset \mathrm{dom}(B)$ è detto *dominio di determinazione* oppure *"core"* per B se vale che la chiusura della restrizione di B su D_0 è di nuovo B.

A. L'equazione di conduzione del calore in $\mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} u' - \alpha\Delta u = 0, & \text{in } [0,\infty) \times \mathbb{R}^n \\ u(0) = u_0, & \text{in } \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Un risultato classico nelle equazioni alle derivate parziali dice che per ogni valore iniziale $u_0 \in S'$ il problema possiede un'unica (in questa classe) soluzione $u = u(\cdot, u_0)$ con

$$u = u_0 \cdot w_t = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y)dy$$

così che il semigruppo è dato in questo caso da $U(t)(\cdot) = (\cdot) \cdot w_t$ (cfr. Parte I).

(A.1) Teorema

Sia $E \in \{BUC(\mathbb{R}^n), C_0(\mathbb{R}^n), \mathbf{L}_p(\mathbb{R}^n), \text{ con } 1 < p < \infty\}$. Allora $\{U(t)|_E : t \geq 0\}$ è un semigruppo analitico fortemente continuo di contrazioni su E.
Inoltre la realizzazione $-\Delta$ in E, denotata con $-\Delta_E$, è il suo generatore infinitesimale e vale (e non come per un errore di battitura indicato nella parte I)

$BUC^2(\mathbb{R}^n) \subset \mathrm{dom}(\Delta_{BUC})$ è *core* per Δ_{BUC}

$C_0^2(\mathbb{R}^n) \subset \mathrm{dom}(\Delta_{C_0})$ è *core* per Δ_{C_0}

$D(\Delta_{\mathbf{L}_p}) = W_p^2$

(A.2) Teorema
$\forall\, u_0 \in E$ esiste una soluzione
$u = u(\cdot, u_0) \in C(\mathbb{R}^+, E) \cap C(\mathbb{R}_{>0}, E_1) \cap C^1(\mathbb{R}_{>0}, E)$, che si può dimostrare soddisfare anche

$$u \in C^1(\mathbb{R}_{>0}, BUC(\mathbb{R}^n)) \cap C(\mathbb{R}_{>0}, BUC^2(\mathbb{R}^n))$$

rispettivamente

$$u \in C^1(\mathbb{R}_{>0}, C_0(\mathbb{R}^n)) \cap C(\mathbb{R}_{>0}, C_0^2(\mathbb{R}^n))$$

Consideriamo ora l'equazione logistica

$$\begin{cases} u' - \alpha\Delta u = u(1-u), & \text{in } [0,\infty) \times \mathbb{R}^n \\ u(0) = u_0, & \text{in } \mathbb{R}^n \end{cases}$$

e osserviamo

(A.3) Teorema
$\forall u_0 \in \{BUC(\mathbb{R}^n), C_0(\mathbb{R}^n)\}$ esiste un'unica soluzione locale

$$u \in C^1(\mathring{J}_{u_0}, BUC(\mathbb{R}^n)) \cap C(\mathring{J}_{u_0}, BUC^2(\mathbb{R}^n))$$

o rispettivamente

$$u \in C^1(\mathring{J}_{u_0}, C_0(\mathbb{R}^n)) \cap C(\mathring{J}_{u_0}, C_0^2(\mathbb{R}^n))$$

dove $\mathring{J}_{u_0}$ è l'intervallo massimo di esistenza della soluzione.
Questo risultato è ottenuto grazie al fatto $u(1-u) \in C^{1-}(E, E)$ per $E \in \{BUC(\mathbb{R}^n), C_0(\mathbb{R}^n)\}$ e al teorema (1.11). Lo stesso problema possiede anche una soluzione in $\mathbf{L}_p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$, ma la dimostrazione di un teorema analogo a (1.11) da applicare in quel caso presuppone l'introduzione degli spazi di interpolazione tra lo spazio di base e il dominio dell'operatore differenziale.

(A.4) Osservazione
Naturalmente si possono ottenere risultati di esistenza globale e di analisi qualitativa della soluzione; questi esulano però dagli scopi di questo articolo, che si vuole accontentare di mostrare come risultati analoghi per le equazioni differenziali ordinarie possano essere generalizzati, non senza fatica, al caso delle equazioni alle derivate parziali.

B. L'equazione d'onda in $\mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} u'' - \Delta u = 0, & \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \\ u(0) = u_0, & \text{in } \mathbb{R}^n \\ u'(0) = u_1, & \text{in } \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Se riformuliamo il sistema ponendo

$$\mathbf{A} := \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -\Delta & 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{u} := \begin{bmatrix} u \\ u' \end{bmatrix}, \ \mathbf{H} := W_2^1 \times \mathbf{L}_2 \quad \text{otteniamo}$$

$$\begin{cases} \mathbf{u}' + \mathbf{A}\mathbf{u} = 0, \ t > 0, \ \text{in } \mathbf{H} \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 \end{cases}$$

Questo ci permette di utilizzare i risultati fin qui presentati per ottenere:

(B.1) TEOREMA
Con il formalismo appena introdotto vale:

(i) $\mathbf{A} \in \mathbf{G}(\mathbf{H})$

(ii) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ M(\varepsilon) \geq 1$ con $\left\| e^{-t\mathbf{A}} \right\|_{\mathbf{L}(\mathbf{H})} \leq M(\varepsilon) e^{\varepsilon t} \ \ \forall t \in \mathrm{R}$

(iii) $\sigma(\mathbf{A}) \subset \mathrm{R}$

(iv) $\forall \mathbf{u}_0 \in \mathrm{dom}(\mathbf{A}) = W_2^2 \times W_2^1 \ \exists! \ u \in C^2(\mathbb{R}, \mathbf{L}_2) \cap C^1(\mathbb{R}, W_2^1)$ soluzione dell'equazione d'onda.

C. L'equazione di Schrödinger

$$\begin{cases} u_t - i(\Delta - V(x))u = 0, & \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \\ u(0) = u_0, & \text{in } \mathbb{R}^n \end{cases}$$

$$V(x) \in \mathbb{R} \ \ \forall x \in \mathbb{R}^n$$

(C.1) TEOREMA
Siano $n \leq 3$ e $V \in \mathbf{L}_2(\mathbb{R}^n)$, allora vale:

l'operatore A, dato da $Au = i(\Delta u - Vu)$, con dominio $W_2^2(\mathbb{R}^n)$ è antisimmetrico (cioè $A^* = -A$) e di conseguenza, con il teorema di Stone (parte I), segue che A genera un gruppo fortemente continuo di operatori unitari.

(C.2) OSSERVAZIONE
(C.1) implica che per ogni $u_0 \in \mathrm{dom}(A)$ esiste una soluzione

$$u(\cdot, u_0) \in C^1(\mathbb{R}, \mathbf{L}_2(\mathbb{R}^n)) \cap C(\mathbb{R}, W_2^2(\mathbb{R}^n))$$

che è data dalla convoluzione con il nucleo di Schrödinger

$$T(t)u_0 = S_t \cdot u_0 = \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \right) \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y)\,dy$$

nel caso in cui $V \equiv 0$.

Bibliografia

[1] PAZY A., *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, Springer Verlag, New York (1984).

[2] GOLDSTEIN J. A., *Semigroups of linear operatoes and applications*, Oxford University Press, New York, 1985.

[3] AMANN H., *Linear and quasilinear problems*, libro in preparazione (1994).

[4] CLÉMENT PH., HEIJMANS H.J.A.M. et al., *One parameter semigroups*, Northholland, CWI Monographs, Amsterdam (1987).

[5] RENARDY M., ROGERS R. C., *An Introduction to Partial Differential Equations*, Springer Verlag (1993).

[6] TANABE H., *Evolution equations*, Pitman, London (1979).

[7] FATTORINI H. O., *The Cauchy Problem*, Addison-Wiley, Reading, Massachusetts (1983).

[8] GUIDOTTI P., *Einblick in die Behandlung parabolischer partieller Differentialgleichungen mithilfe der Theorie der Halbgruppen stetiger linearer Operatoren, Teil I*, Il Volterriano nr. 2, Liceo Cantonale e Biblioteca Cantonale di Mendrisio, 1993.

Patrick Guidotti, Möhrlistrasse 23, CH-8006 Zürich