Cos'è un integrale?

Il relatore si propone di presentare la relazione tra due cammini diversi che hanno condotto all'**integrale**, cioè, in origine, alla **determinazione di un'area**: uno, vecchio di più di 2000 anni e uno che risale al XVII secolo, dopo l'introduzione del calcolo infinitesimale.
Il primo cammino è legato al **metodo di esaustione**, inventato da **Eudosso di Cnido** (408?-355? a.C.) e usato poi dai grandi matematici dell'antichità, tra cui **Archimede** (287? – 212 a.C.); il secondo è legato a **Leibniz** (Gottfried Wilhelm von, 1646-1716) e **Newton** (sir Isaac, 1643 – 1727) che, indipendentemente uno dall'altro e in modo diverso, considerarono l'integrazione come operazione inversa della derivazione.

Il problema delle aree

http://www.copernico.bo.it/iperold/aree/Il%20problema%20delle%20aree.html

"La quadratura dei poligoni.

Quello delle aree è uno dei più antichi problemi della matematica e certamente anche uno dei più importanti, se si tiene conto che esso è alla base della costruzione del calcolo integrale.
Nei tempi più antichi della storia dell'uomo si pensava che l'area di una figura piana dipendesse dal perimetro della stessa figura, e già intorno al 2000 a.C. si conoscevano regole e procedimenti per la determinazione dell'area dei poligoni più semplici, come i rettangoli, i quadrati, i triangoli.
Successivamente, all'epoca di Euclide (300 a.C.), il problema delle aree dei poligoni, insieme a numerosi altri concetti e conoscenze di aritmetica e di geometria, ebbe una sistemazione teorica rigorosa e straordinariamente moderna.
Una volta definita l'area di un quadrato Q rispetto a un altro quadrato unitario U, il calcolo dell'area di un qualunque poligono era ricondotto al calcolo dell'area del quadrato equivalente, cioè del quadrato equiscomponibile con il poligono.
Per chiarire quanto detto, è necessario riprendere una proprietà che la matematica greca poneva alla base di questo procedimento:

Un poligono convesso di n *lati si può sempre trasformare*
in un poligono equivalente di n-1 *lati.* "

(esempi nell'allegato 1)

"L'area del cerchio e il metodo di esaustione.

Dopo aver riflettuto sui poligoni, il passo successivo, cioè quello di trovare l'area di figure piane limitate da linee curve, incontrò maggiori problemi. Tali difficoltà furono dovute al fatto che una figura piana avente contorno curvilineo non si può trasformare con i metodi elementari in un triangolo equivalente e quindi in un quadrato equivalente.
I matematici greci si resero subito conto che il concetto di area della più semplice di tali figure, il cerchio, non era riconducibile a quello di un quadrato; il problema fu affrontato in modo organico e rigoroso da Archimede (287-212 a.C.).
Egli, facendo ricorso ad un metodo matematico già noto sin dai tempi del matematico Eudosso (408-355 a.C.), detto **metodo di esaustione** , riuscì a dare una buona approssimazione dell'area del cerchio. Archimede riuscì a "racchiudere" l'area del cerchio tra due *successioni:* quella delle aree dei poligoni regolari inscritti e quella delle aree dei poligoni regolari circoscritti al cerchio (Riemann: **somma superiore e somma inferiore**). Partendo dal triangolo equilatero, e raddoppiando via via il numero dei lati, spinse i propri calcoli sino a poligoni regolari, inscritti e circoscritti, di 96 lati, e trovò che l'area del cerchio di raggio *r* era compresa tra:

$$\left(3+\frac{10}{71}\right)r^2 \quad \text{e} \quad \left(3+\frac{10}{70}\right)r^2$$

In realtà Archimede non riuscì a trovare esattamente l'area del cerchio: egli pensava che, aumentando sempre più il numero dei lati del poligono regolare inscritto, si potesse esaurire (**esaustione** = processo di esaurimento) il cerchio, e che fosse sempre possibile trovare due poligoni regolari, l'uno circoscritto e l'altro inscritto, tali che la differenza tra le loro aree fosse minore di una quantità prefissata, comunque piccola.
Soltanto nell'Ottocento, con la costruzione dell'insieme dei numeri reali e con l'introduzione dell'*assioma della continuità*, è stato possibile definire meglio il problema della quadratura del cerchio, ma la grande rilevanza del metodo di Archimede rimane: se è vero che non riuscì a calcolare esattamente l'area del cerchio, il grande matematico siracusano pose le basi per avvicinarsi il più possibile a tale obiettivo.
Successivamente, sempre con l'utilizzo del metodo di esaustione, Archimede affronta il problema del calcolo dell'area del segmento parabolico."

Il metodo di esaustione

http://www.copernico.bo.it/iperold/aree/Metodo%20di%20esaustione.html

"Collocazione storica.

Del periodo di tempo che abbraccia in gran parte il IV e il V secolo a.C., sono rimaste scarse testimonianze per quanto riguarda lo studio e lo sviluppo di grandi teorie matematiche e nessuna traccia di ciò che avevano scritto i grandi matematici. Tuttavia, tale mancanza è compensata da esposizioni scritte da filosofi che erano al corrente della matematica del loro tempo; si possiedono, infatti, gran parte delle opere di Platone e Aristotele, e i loro scritti rappresentano una fonte attendibile di quanto avvenne.
Durante questo periodo compreso tra la morte si Socrate (399 a.C.) e la morte di Aristotele (322 a.C.), si possono ricordare sei grandi matematici tra i quali **Eudosso di Cnido** (morto verso il 355 a.C.). L'opera di Eudosso fu talmente significativa che si può parlare di vera e propria *riforma della matematica*: la crisi aperta nella matematica dalla scoperta di grandezze incommensurabili era stata affrontata con successo grazie all'immaginazione di Eudosso.
Ma restava ancora aperto un altro problema: quello del confronto fra configurazioni curvilinee e rettilinee. Eudosso sembrerebbe che avesse fornito la soluzione di questo problema.

Descrizione.

Il metodo si basava sull'idea, già nota ai matematici precedenti a Eudosso, di inscrivere e circoscrivere figure rettilinee attorno ad una figura curva e di continuare a moltiplicare indefinitamente il numero dei lati del poligono fino ad approssimare il più possibile la linea curva. Secondo Archimede, Eudosso, essendo a conoscenza del concetto di limite sconosciuto dai suoi antecedenti, riuscì a portare a termine il ragionamento e formulò la *proposizione* (talvolta nota come assioma di continuità) che serviva come base per il metodo di esaustione, l'equivalente greco del calcolo integrale.
La proposizione o assioma afferma che:

> *date due grandezze aventi un certo rapporto (cioè, nessuna delle quali sia zero) è possibile trovare un multiplo dell'una che superi l'altra grandezza.*

Partendo da questo Eudosso ricavò la proposizione che costituiva la base del metodo di esaustione:

> *se da una qualsiasi grandezza si sottrae una parte non inferiore alla sua metà, e se dal resto si sottrae ancora non meno della sua metà, e se questo processo di sottrazione viene continuato, alla fine rimarrà una grandezza inferiore a qualsiasi grandezza dello stesso genere precedentemente assegnata.*

Con questo teorema riguardante le grandezze di figure curvilinee si riuscì a stabilire la misura dell'area di figure curvilinee con sempre maggiore approssimazione.
Qualsiasi figura non rettilinea poteva essere analizzata attraverso il metodo di esaustione, suddividendo le figure in intervalli sempre più piccoli raggiungendo così una migliore approssimazione."
(esempi nell'allegato 2)

"Archimede si servì del metodo di esaustione non solo per l'area del **segmento parabolico**[1], ma anche per il calcolo dell'area della superficie e del volume di alcuni solidi di rotazione. Non bisogna però ritenere che questo metodo trovi applicazione solo nei problemi di aree e volumi; prima della costruzione del calcolo integrale, i matematici hanno fatto ricorso ad esso per risolvere numerosi altri problemi. "

Integrazione come antiderivazione

Nel 1666 **Newton** scrisse un trattato sulle flussioni che – anche se non fu pubblicato subito – ebbe un enorme influsso sullo sviluppo del calcolo infinitesimale. N. ebbe l'idea di considerare una linea come generata dal movimento di una particella individuata da due coordinate. La velocità orizzontale x' e quella verticale y' vennero definite le flussioni di x e di y - i fluenti - associate al trascorrere del tempo. Con la notazione di N., y'/x' era la tangente di f(x,y) = 0.
Nel suo trattato N. presenta i due problemi che affronterà e che per noi sono quelli della derivazione e dell'integrazione (considerati però solo nel caso in cui la variabile – di derivazione o di integrazione – è il tempo):

> « Et d'abord j'observerai que toutes leurs difficultés peuvent se réduire à ces deux problèmes seulement que je vais proposer sur un espace décrit par un mouvement local retardé ou accéléré de façon quelconque.
>
> LVI. 1. *La longueur de l'Espace décrit étant continuellement donnée, trouver la vitesse du Mouvement à un temps donné quelconque.*
>
> LVII. 2. *La vitesse du Mouvement étant continuellement donnée, trouver la longueur de l'Espace décrit à un temps donné quelconque.* »

(dalla traduzione del testo di N. fatta da George Louis Leclerc Comte de Buffon, 1707-1788).

Nel primo caso si tratta di trovare le flussioni x' e y' di x e di y rispetto al tempo, mentre nel secondo di trovare i fluenti x e y conoscendo le flussioni: implicitamente N. pose la derivazione e l'integrazione come operazioni inverse.

Leibniz ebbe un approccio algebrico al calcolo infinitesimale. Si propose di far conoscere un nuovo calcolo – il calcolo differenziale e integrale – e curò con molta attenzione anche la notazione (dx, dy, dy/dx sono simboli che dobbiamo a lui) poiché pensava che i simboli fossero molto importanti per la comprensione delle cose. Vide l'integrale come una somma, come Cavalieri (Bonaventura, 1598-1647).
Usò *d* e $\int$ come operatori inversi – in uno scritto del 1675 si trova $\int y\,dy = y^2/2$ - e pubblicò i suoi risultati sul calcolo integrale – che chiamò *calculus summatorius* – nel 1684. La denominazione "calcolo integrale" fu suggerita dal matematico svizzero Jacob Bernoulli nel 1690.

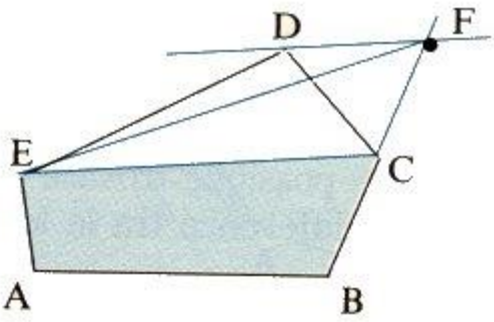
Tra i sostenitori dei due scienziati, che per vie diverse e indipendentemente uno dall'altro, erano arrivati a "costruire" il calcolo infinitesimale sorsero dispute acerrime: si arrivò addirittura all'accusa di plagio di N. a L.

[1] **http://www.copernico.bo.it/iperold/aree/Segmento%20parabolico.html**

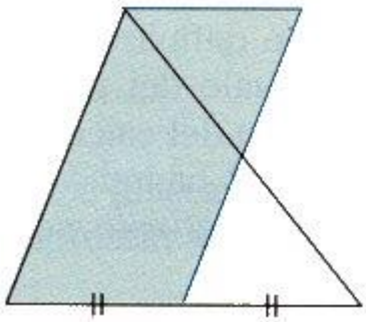
Allegato 1: Da un poligono al quadrato equivalente

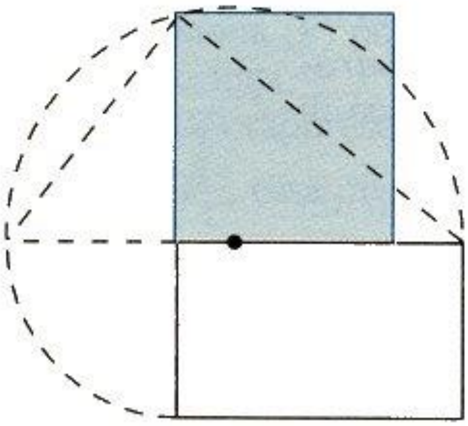
http://www.copernico.bo.it/iperold/aree/Il%20problema%20delle%20aree.html

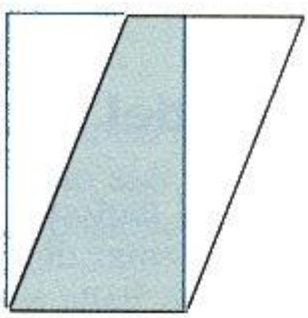
Per esempio, dato il pentagono ABCDE si coniuga E con C, si prolunghi il lato BC e si chiami F il punto in cui tale prolungamento incontra la parallela a EC condotta per D. Si ottiene così il quadrilatero ABFE, che è equivalente al pentagono ABCDE; infatti, il primo è composto dal quadrilatero ABCE e dal triangolo ECF, mentre il secondo è composto dallo stesso quadrilatero e dal triangolo ECD che è equivalente al triangolo ECF. Mediante successive trasformazioni di questo tipo, un poligono qualunque può essere trasformato in un triangolo.



Si trasforma poi il triangolo in un parallelogramma equivalente e questo in un rettangolo equivalente e, infine, si trasforma il rettangolo ottenuto in un quadrato equivalente (come si può vedere nel disegno qui sotto). Questo procedimento giustifica l'espressione quadratura di una superficie con cui si indica l'operazione che porta a costruire il quadrato equivalente alla superficie e, quindi, a determinare l'area di tale superficie.

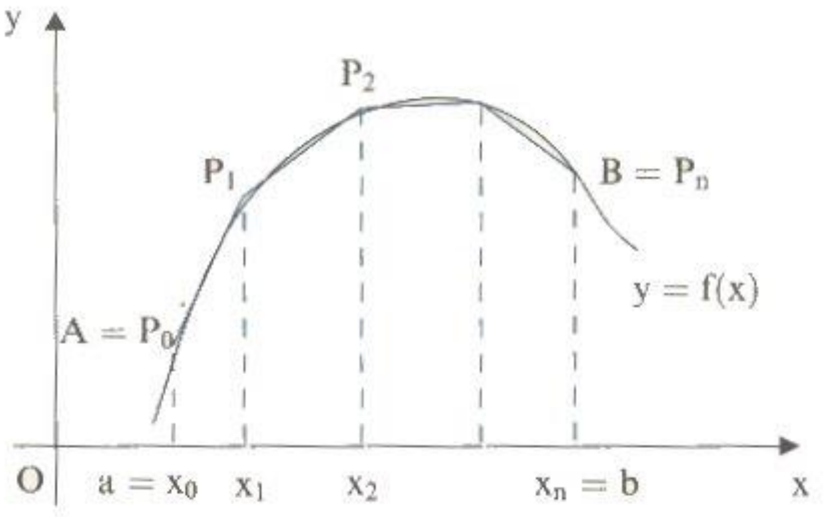






Allegato 2: Metodo di esaustione

http://www.copernico.bo.it/iperold/aree/Metodo%20di%20esaustione.html

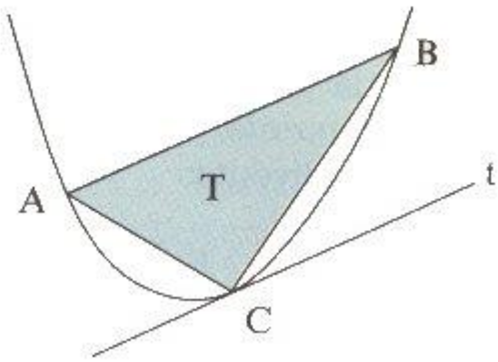


Allegato 3: Area del segmento parabolico
http://www.copernico.bo.it/iperold/aree/Segmento%20parabolico.html

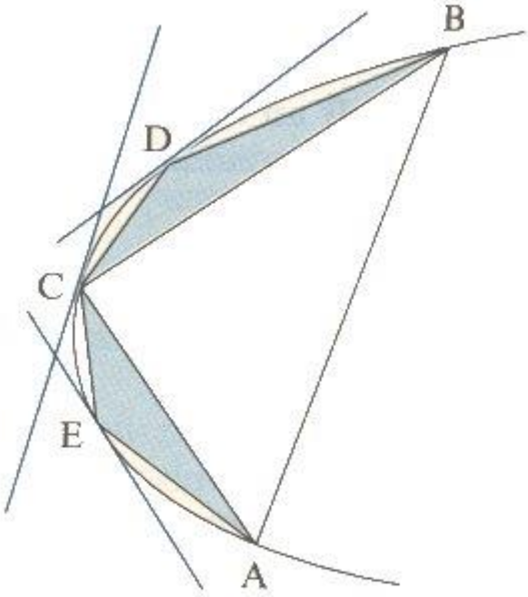
Mediante il **metodo di esaustione** Archimede affronta un altro problema: determinare l'area del segmento parabolico, cioè della parte di piano limitata da un arco di parabola e dalla corda corrispondente.

In un primo momento Archimede giunge alla determinazione di tale area seguendo un procedimento di carattere fisico, descritto nella sua opera *Il mondo*. Sulla base di considerazioni relative alle leve e ai centri di gravità di triangoli e parallelogrammi, egli giunge a stabilire che l'area del segmento parabolico è 4/3 dell'area T del triangolo ABC avente la stessa base e la stessa altezza del segmento, dove C è il punto di contatto della tangente *t* alla parabola parallela alla corda AB.

$$S = \frac{4}{3} T \qquad (1)$$



Archimede si rende però conto che il metodo seguito tramite considerazioni fisiche era utile per la scoperta ma non per la dimostrazione rigorosa della relazione (1) trovata.
Successivamente, nel libro *Sulla quadratura della parabola*, egli propone un metodo puramente matematico, basato sul principio di esaustione.
Prima di tutto, con considerazioni puramente geometriche, Archimede trova che ciascuno dei triangoli AEC e CDB, inscritti nei segmenti parabolici individuati dalle corde AC e CB, hanno area uguale a 1/8 dell'area del triangolo ABC. Sommando queste due, si ottiene che l'area dei due triangoli AEC e CDB, equivale a 1/4 dell'area del triangolo ABC.



Con queste considerazioni Archimede giunge ad una prima approssimazione dell'area del segmento parabolico:

$$T + \frac{1}{4} T$$

Continuando nel suo ragionamento, Archimede analizza una serie di triangoli di area sempre inferiore individuati e inscritti nei quattro segmenti parabolici AE,EC,CD e DB. La loro somma equivale a 1/4 della somma delle aree dei triangoli AEC e CDB, che vale 1/4 T, detto precedentemente, ed è perciò uguale a 1/16 T.
Giunti a questo punto, una migliore approssimazione dell'area del segmento parabolico è espressa dalla relazione:

$$T + \frac{1}{4} T + \frac{1}{16} T$$

Continuando nel suo ragionamento, Archimede immagina di costruire dei triangoli sempre più piccoli costruiti sulle corde dei segmenti parabolici arrivando così a una sempre migliore approssimazione dell'area finale; si può pensare che il segmento parabolico finisca per essere "esaurito"da una serie di triangoli e che la sua area S si possa approssimare quanto si vuole alla somma:

$$T + \frac{1}{4} T + \frac{1}{16} T + \frac{1}{64} T + \ldots$$

Quest'ultima relazione a cui giunge Archimede rappresenta in linguaggio puramente matematico la somma degli *n* termini di una progressione geometrica di ragione 1/4, cioè la somma contenente un numero *n* di termini che approssima quanto si vuole l'area S del segmento parabolico, anche rappresentata dalla relazione:

$$T\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\dots\right)=T\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}T\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n}\right]$$

(3)

Archimede osservò che al crescere di *n*, $(1/4)^n$ diventa sempre più piccolo, tanto da poter essere trascurato quando *n* diventa *sufficientemente grande.* In queste condizioni Archimede afferma che l'area S del segmento parabolico diventa:

$$S=\frac{4}{3}T$$

Archimede, basandosi sul principio secondo cui la differenza tra S e la somma (3) possa rendersi minore di un qualunque numero prefissato e procedendo per assurdo, provò che S non può essere né maggiore né minore di 4/3 * T.

Allegato 4: Alcuni siti sull'argomento

http://www2.math.unifi.it/~archimede/archimede/mostra_calcolo/guida/node2.html
Metodi di quadratura dall'antichità al Seicento

http://www.syllogismos.it/history/Esaustione.pdf
Dal *Periodico di Matematiche* VII, 4, 1/2 (1997), 15-33 un articolo di Giorgio T. Bagni:
Il metodo di esaustione nella storia dell'analisi infinitesimale

http://matematica.uni-bocconi.it/galeazzi/capitolo3.htm
3 EUDOSSO

http://matematica.uni-bocconi.it/galeazzi/capitolo7.htm
ARCHIMEDE

Per Newton e Leibniz
http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/HistTopics/The_rise_of_calculus.html
A history of the calculus

http://www.univ-lyon1.fr/IREM/histoire/paged.htm
Histoire des mathématiques, textes originaux et commentaires
In questo sito vengono esposte le due strade diverse che Newton e Leibniz hanno percorso per giungere al concetto di integrale come "antiderivata".

http://www.filosofico.net/leibniz14.htm
La matematica di L., la querelle con N.; esemplificazione semplice dei problemi
http://www.filosofico.net/newton.htm

http://scienceworld.wolfram.com/biography/Newton.html
http://scienceworld.wolfram.com/biography/Leibniz.html

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Newton.html
http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Leibniz.html

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/HistTopics/The_rise_of_calculus.html

A history of the calculus

Newton wrote a tract on fluxions in October 1666. This was a work which was not published at the time but seen by many mathematicians and had a major influence on the direction the calculus was to take. **Newton** thought of a particle tracing out a curve with two moving lines which were the coordinates. The horizontal velocity x' and the vertical velocity y' were the fluxions of x and y associated with the flux of time. The fluents or *flowing quantities* were x and y themselves. With this fluxion notation y'/x' was the tangent to $f(x, y) = 0$.

In his 1666 tract **Newton** discusses the converse problem, given the relationship between x and y'/x' find y. Hence the slope of the tangent was given for each x and when $y'/x' = f(x)$ then **Newton** solves the problem by antidifferentiation. He also calculated areas by antidifferentiation and this work contains the first clear statement of the *Fundamental Theorem of the Calculus*.

Newton had problems publishing his mathematical work. **Barrow** was in some way to blame for this since the publisher of **Barrow**'s work had gone bankrupt and publishers were, after this, wary of publishing mathematical works! **Newton**'s work on *Analysis with infinite series* was written in 1669 and circulated in manuscript. It was not published until 1711. Similarly his *Method of fluxions and infinite series* was written in 1671 and published in English translation in 1736. The Latin original was not published until much later.

In these two works **Newton** calculated the series expansion for sin x and cos x and the expansion for what was actually the exponential function, although this function was not established until **Euler** introduced the present notation e^x.
[…]

Newton's next mathematical work was *Tractatus de Quadratura Curvarum* which he wrote in 1693 but it was not published until 1704 when he published it as an Appendix to his *Optiks*. This work contains another approach which involves taking limits. **Newton** says

In the time in which x by flowing becomes x+o, the quantity x^n *becomes* $(x+o)^n$ *i.e. by the method of infinite series,*

$x^n + nox^{n-1} + (nn-n)/2\ oox^{n-2} + \ldots$

At the end he lets the increment o vanish by 'taking limits'.

Leibniz learnt much on a European tour which led him to meet **Huygens** in Paris in 1672. He also met **Hooke** and **Boyle** in London in 1673 where he bought several mathematics books, including **Barrow**'s works. **Leibniz** was to have a lengthy correspondence with **Barrow**. On returning to Paris **Leibniz** did some very fine work on the calculus, thinking of the foundations very differently from **Newton**.

Newton considered variables changing with time. **Leibniz** thought of variables x, y as ranging over sequences of infinitely close values. He introduced dx and dy as differences between successive values of these sequences. **Leibniz** knew that ${}^{dy}/_{dx}$ gives the tangent but he did not use it as a defining property.

For **Newton** integration consisted of finding fluents for a given fluxion so the fact that integration and differentiation were inverses was implied. **Leibniz** used integration as a sum, in a rather similar way to **Cavalieri**. He was also happy to use 'infinitesimals' dx and dy where **Newton** used x' and y'

which were finite velocities. Of course neither **Leibniz** nor **Newton** thought in terms of functions, however, but both always thought in terms of graphs. For **Newton** the calculus was geometrical while **Leibniz** took it towards analysis.

Leibniz was very conscious that finding a good notation was of fundamental importance and thought a lot about it. **Newton**, on the other hand, wrote more for himself and, as a consequence, tended to use whatever notation he thought of on the day. **Leibniz**'s notation of *d* and $\int$ highlighted the operator aspect which proved important in later developments. By 1675 **Leibniz** had settled on the notation

$$\int y\, dy = y^2/2$$

written exactly as it would be today. His results on the integral calculus were published in 1684 and 1686 under the name '*calculus summatorius*', the name integral calculus was suggested by **Jacob Bernoulli** in 1690.

After **Newton** and **Leibniz** the development of the calculus was continued by **Jacob Bernoulli** and **Johann Bernoulli**. However when **Berkeley** published his *Analyst* in 1734 attacking the lack of rigour in the calculus and disputing the logic on which it was based much effort was made to tighten the reasoning. **Maclaurin** attempted to put the calculus on a rigorous geometrical basis but the really satisfactory basis for the calculus had to wait for the work of **Cauchy** in the 19^{th} Century.