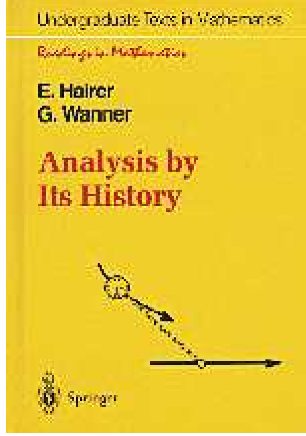
Calcul différentiel et intégral

(Bellinzona 2005)

“Wir stellen aber fest, dass es den Studierenden oft Mühe macht, ihre mathematischen Kenntnisse auf die praktischen Probleme unseres Faches anzuwenden. Die Schwierigkeiten beginnen nicht selten schon beim einfachen Dreisatz.”

(H.-R. Bosshard, Biochem. Inst. Univ. Zürich, 1987)



Cours traditionnel :

sets, mappings	$\Rightarrow$	limits, continuous functions	$\Rightarrow$	derivatives	$\Rightarrow$	integration.

Dév. historique :

Cantor 1875 Dedekind	$\Leftarrow$	Cauchy 1821 Weierstrass	$\Leftarrow$	Newton 1665 Leibniz 1675	$\Leftarrow$	Archimedes Kepler 161 Fermat 163

Inhalt :

Chapter I.	Introductio in Analysin Infinitorum
Chapter II.	Differential and Integral Calculus
Chapter III.	Foundations of Classical Analysis
Chapter IV.	Calculus in Several Variables

1. Introductio in Analysin Infinitorum

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}
$$

1. Introductio in Analysin Infinitorum

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

$\Downarrow$ $\Downarrow$

$$y = y_0 + \tfrac{x}{1}\Delta y_0 + \tfrac{x(x-1)}{1\cdot 2}\Delta^2 y_0 \ldots$$

Interpolation pol.

$$(1+x)^n = 1 + \tfrac{n}{1}x + \tfrac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^2 \ldots$$

Bin. Theorem

1. Introductio in Analysin Infinitorum

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

$\Downarrow$ $\Downarrow$

$$y = y_0 + \tfrac{x}{1}\Delta y_0 + \tfrac{x(x-1)}{1\cdot 2}\Delta^2 y_0 \ldots$$

Interpolation pol.

$$(1+x)^n = 1 + \tfrac{n}{1}x + \tfrac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^2 \ldots$$

Bin. Theorem

$\Downarrow$ $\Downarrow$

Wallis Prod.

Taylor 1715

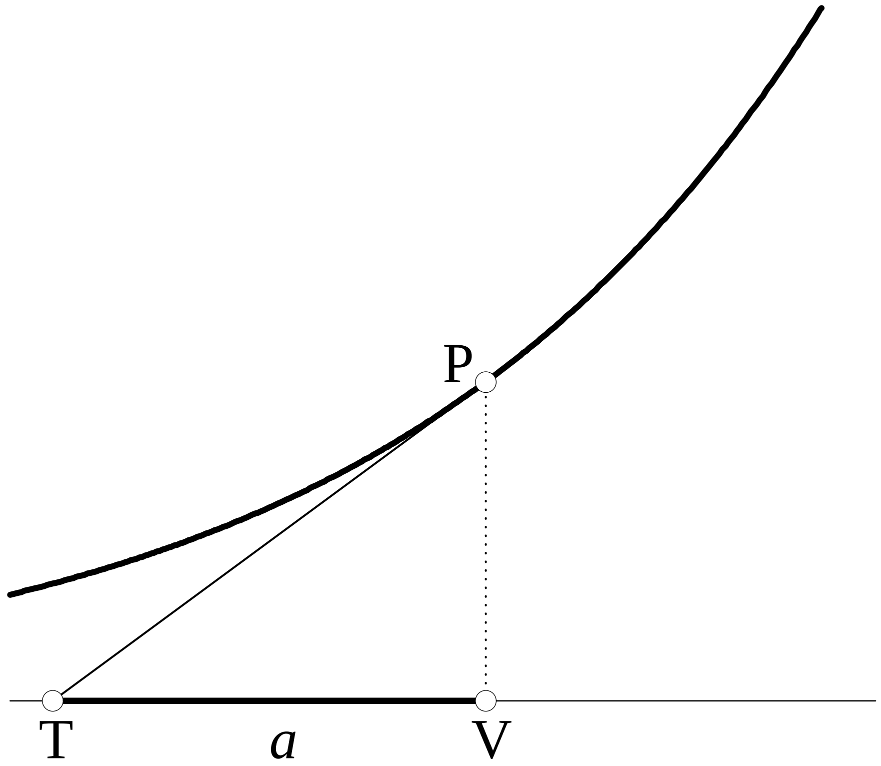
Newton, Geom. Reihe, Wurzeln

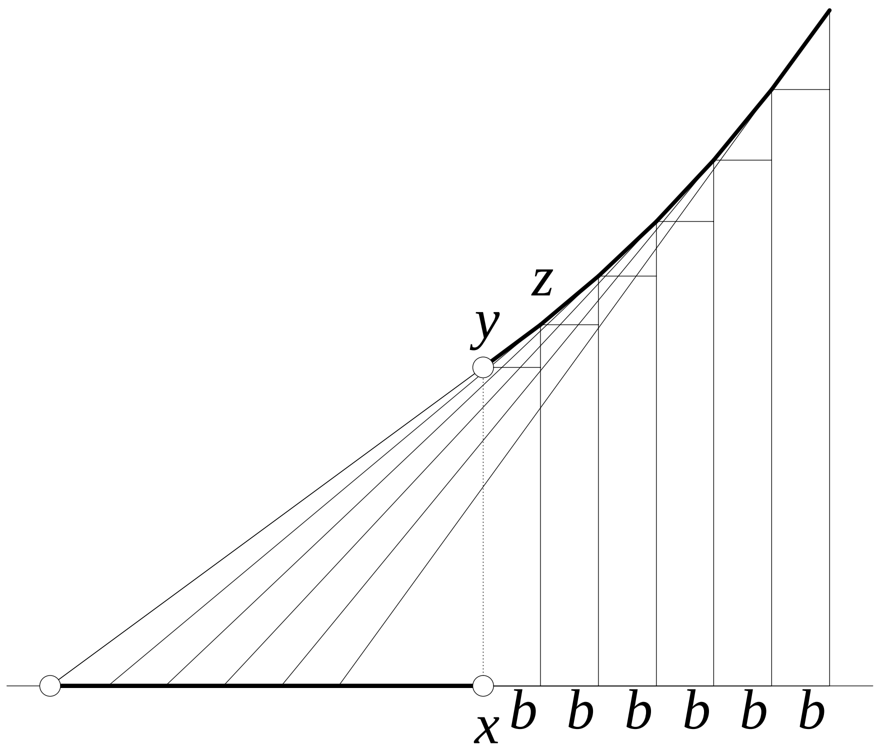
Logarithmen, Flächen, Reihen exp, si

Reihen für log, arctan

Exemple: croissance exponentielle

(Debeaune 1638, Leibniz 1684, Euler 1748)





$$\left(1+\frac{1}{N}\right)^N = 1+1+\frac{1(1-\frac{1}{N})}{1\cdot 2}+\frac{1(1-\frac{1}{N})(1-\frac{2}{N})}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots$$
$$= 1+1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\ldots \quad = e \qquad (N\to\infty)$$

ähnlich $\boxed{\left(1+\frac{x}{N}\right)^N = e^x = 1+x+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\ldots\ .}$

§2. Calcul différentiel.

> Et j'ose dire que c'est cecy le problésme le plus utile, & le plus general non seulement que ie sçache, mais mesme que i'aye iamais desiré de sçauoir en Geometrie . . .
>
> (Descartes 1637, p. 342)

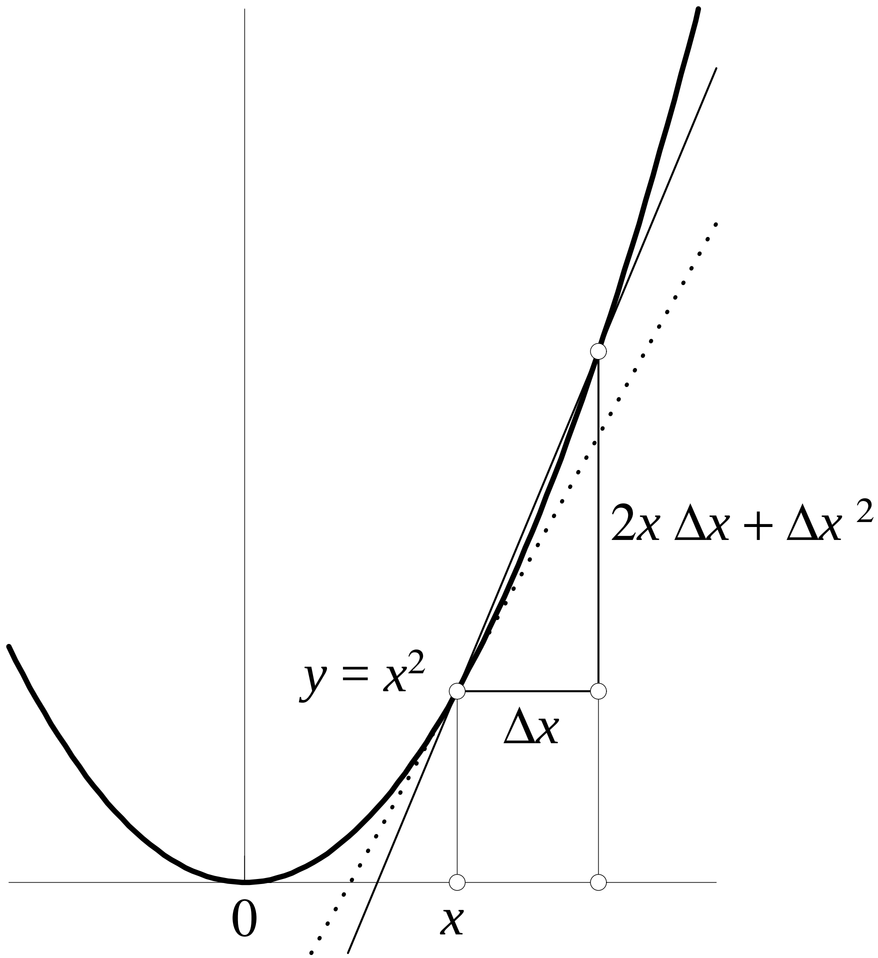
Problem. Let $y = f(x)$ be a given curve. At each point x we wish to know the *slope*, the *tangent* or the *normal*.

Motivations.
– Calculation of the angles under which two curves intersect (Descartes);
– construction of telescopes (Galilei), of clocks (Huygens 1673);
– search for the maxima, minima of a function (Fermat 1638);
– velocity and acceleration of a movement (Galilei 1638, Newton 1686);
– astronomy, verification of the Law of Gravitation (Kepler, Newton).

Beispiel : Parabel $y = x^2$ **:**

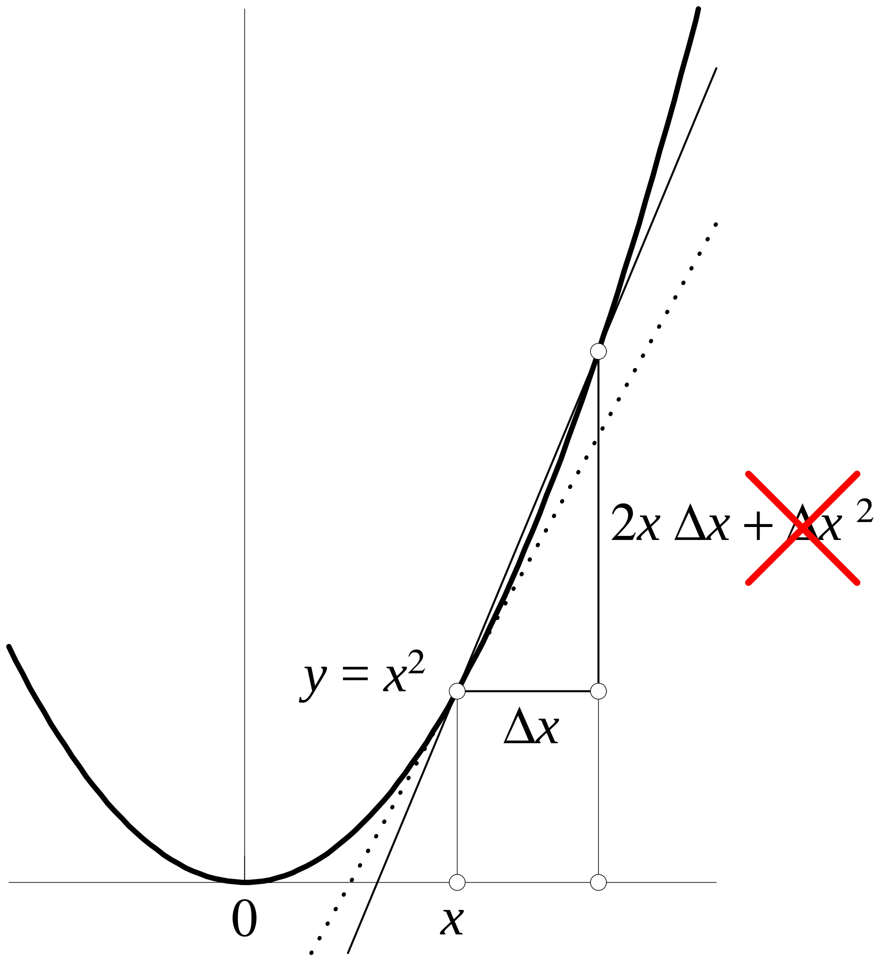
$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2$$

$$= x^2 + 2x\,\Delta x + \Delta x^2$$



Beispiel : Parabel $y = x^2$:

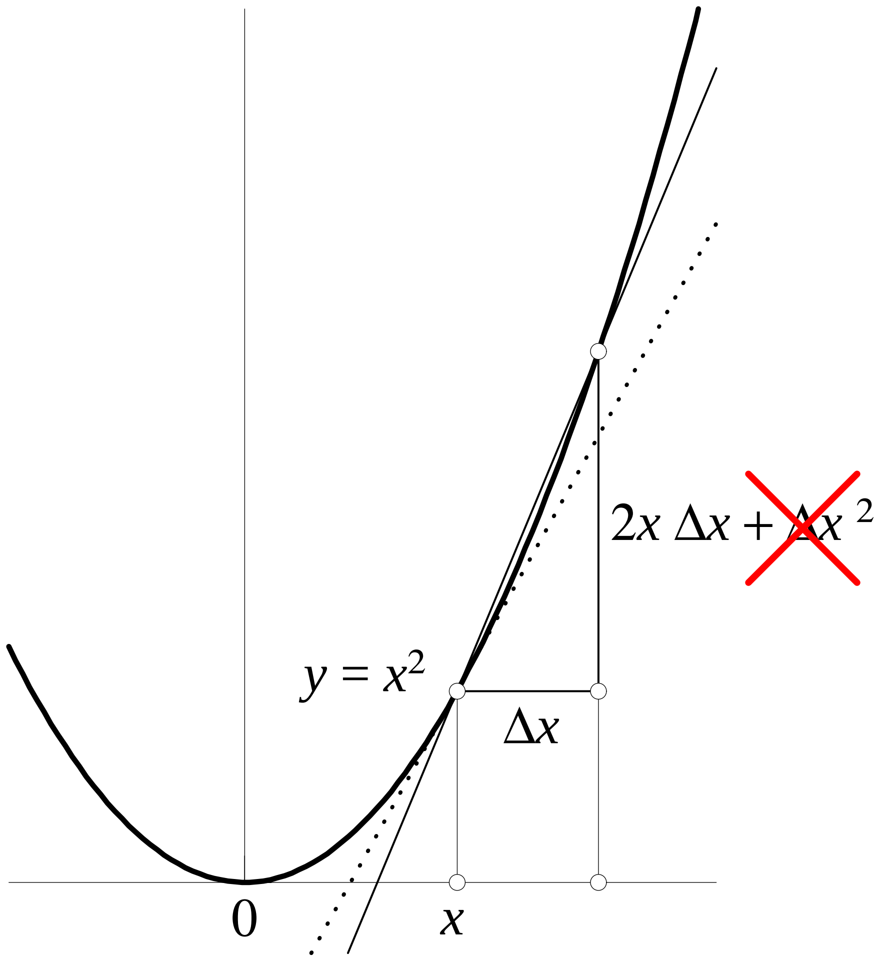
$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2$$
$$= x^2 + 2x\,\Delta x + \Delta x^2$$



Beispiel : Parabel $y = x^2$:

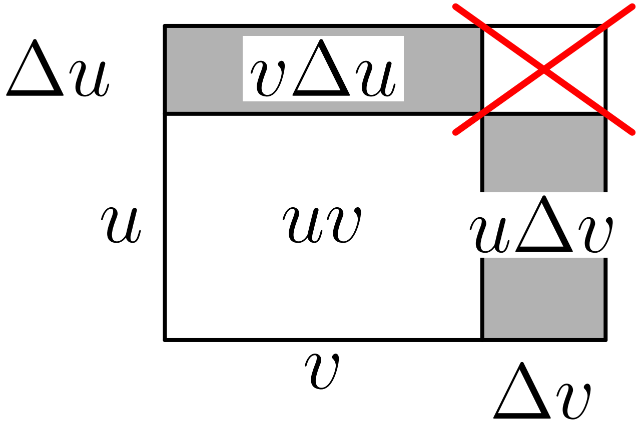
$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2$$

$$= x^2 + 2x\,\Delta x + \Delta x^2$$



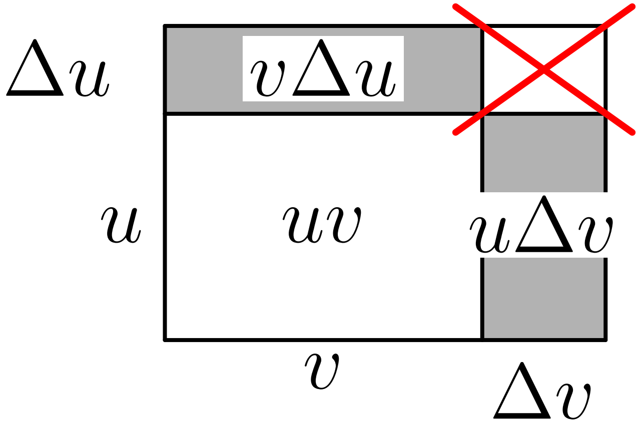
$$dy = 2x\,dx \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dy}{dx} = 2x$$

2. Beispiel : Produktregel.



$$\Rightarrow \qquad d(uv) = u\,dv + v\,du$$

2. Beispiel : Produktregel.

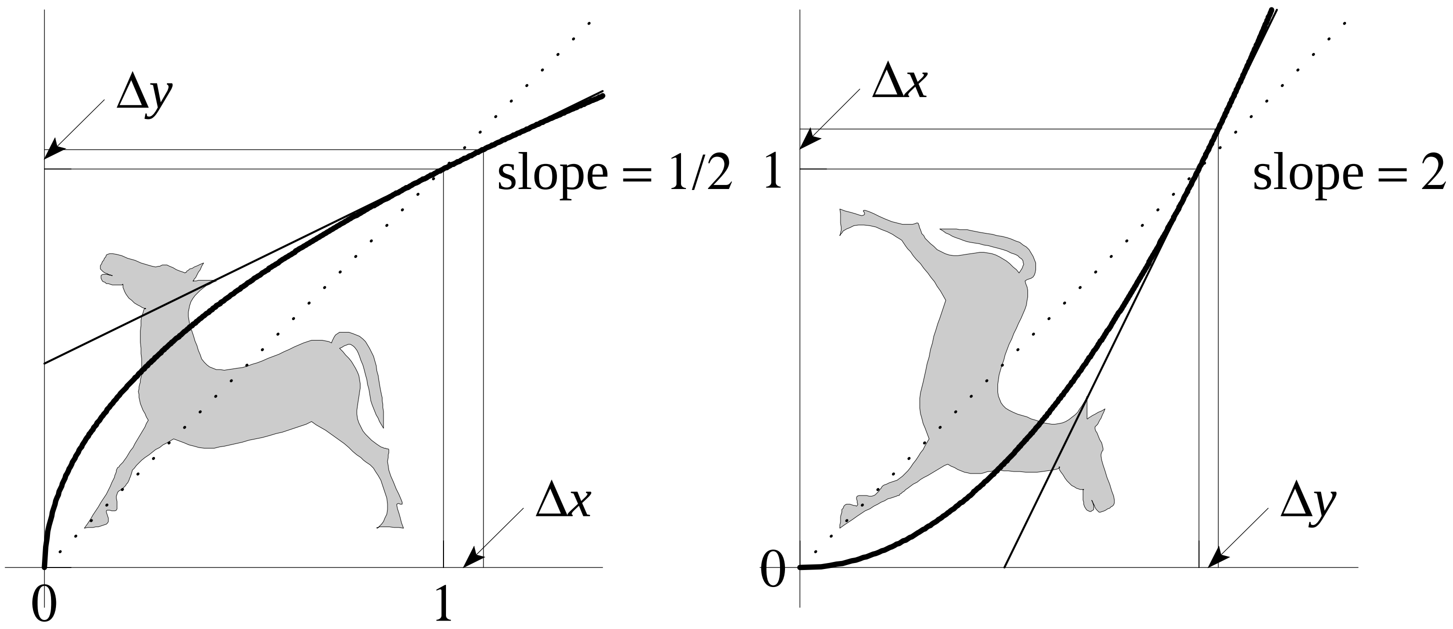


$$\Rightarrow \qquad d(uv) = u\,dv + v\,du$$

3. Beispiel : Quotientenregel.

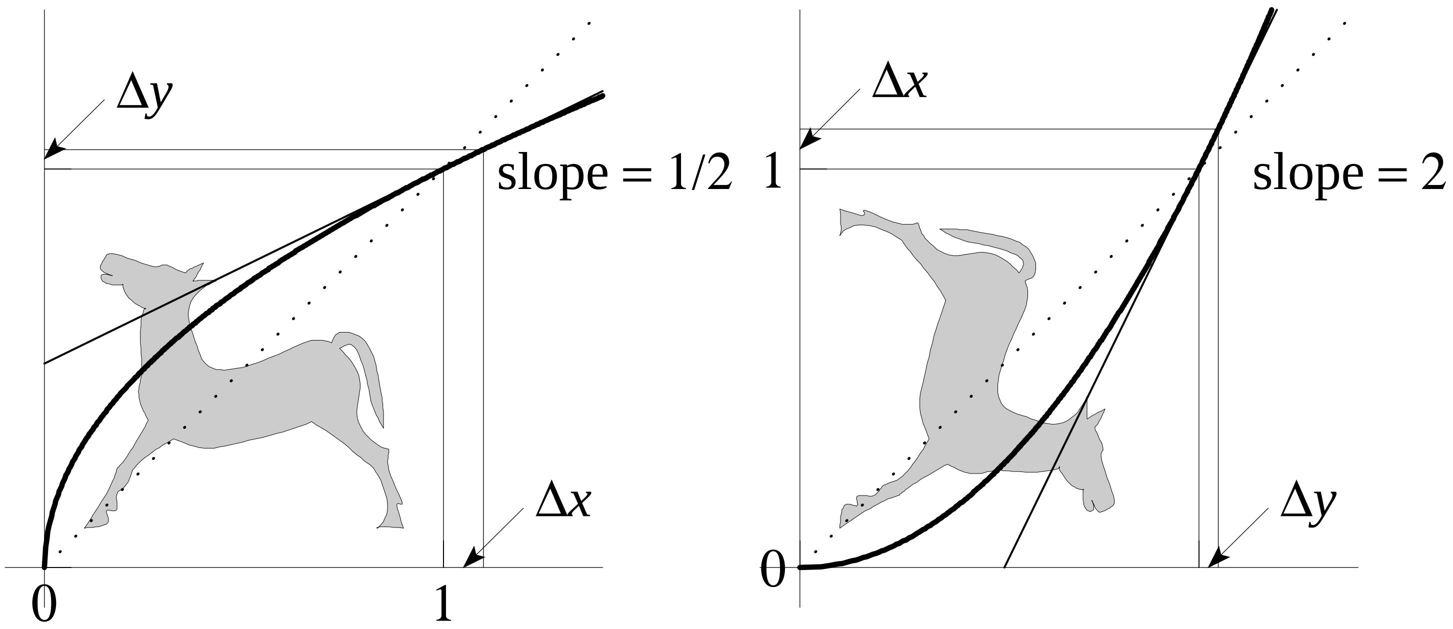
$$\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v^2 + \cancel{v\Delta v}} \qquad \Rightarrow \qquad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}$$

4. Beispiel : Umkehrfunktion.



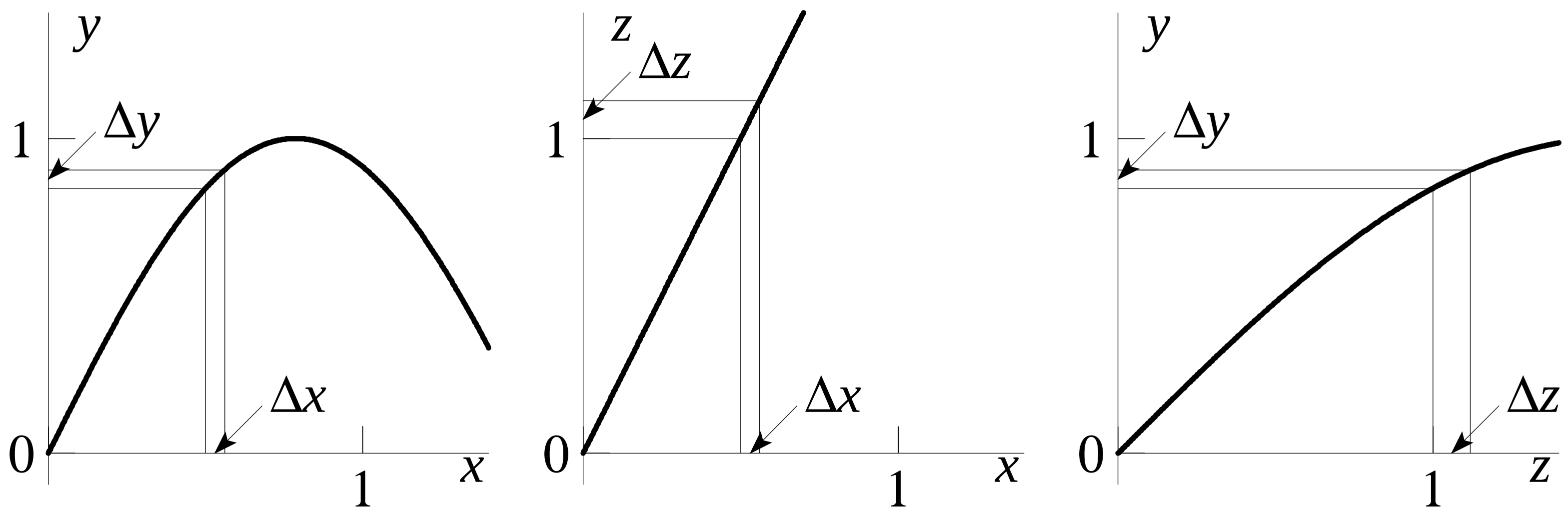
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

4. Beispiel : Umkehrfunktion.



$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

5. Beispiel : Kettenregel.



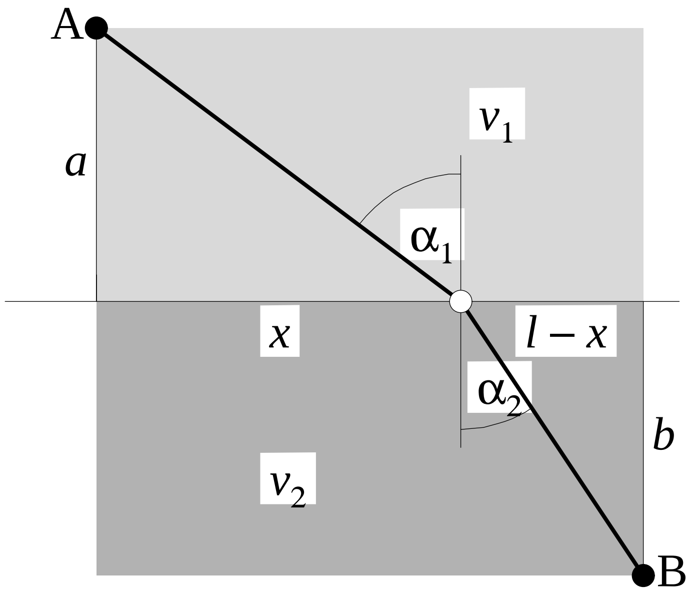
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$$

Problèmes “de maximis et minimis”

Exemple : Principe de Fermat

. . . et trouver la raison de la réfraction dans notre principe commun, qui est que la nature agit toujours par les voies les plus courtes et les plus aisées.

(Lettre de Fermat à De La Chambre, août 1657, *Œuvres* **2**, p. 354)



“cujus accuratissimam demonstrationem a principio nostro derivatam exhibet superoir analysis”

“Mais, parce que j’en jugeai l’invention très difficile et très embarrassée, puisque ces questions de maximis et minimis conduisent d’ordinaire à des opérations de longue haleine et qui se brouillent aisément par une infinité d’asymmétries qu’on trouve sur son chemin, je laissai là ma pensée pendant plusieurs années, en attendant que quelque géomètre moins paresseux que moi en fît ou la découverte ou la démonstration. Personne ne voulut entreprendre ce travail; ...".

(Fermat 1664)

Solution du Principe de Fermat.

Leibniz (1684) est fier d'avoir calculé la solution “in tribus lineis” :

$$T=\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{v_1}+\frac{\sqrt{b^2+(\ell-x)^2}}{v_2}=\text{min !}$$

La dérivée de T par rapport à x est

$$T'=\frac{1}{v_1}\frac{2x}{2\sqrt{a^2+x^2}}+\frac{-2(\ell-x)}{2\sqrt{b^2+(\ell-x)^2}}\frac{1}{v_2}.$$

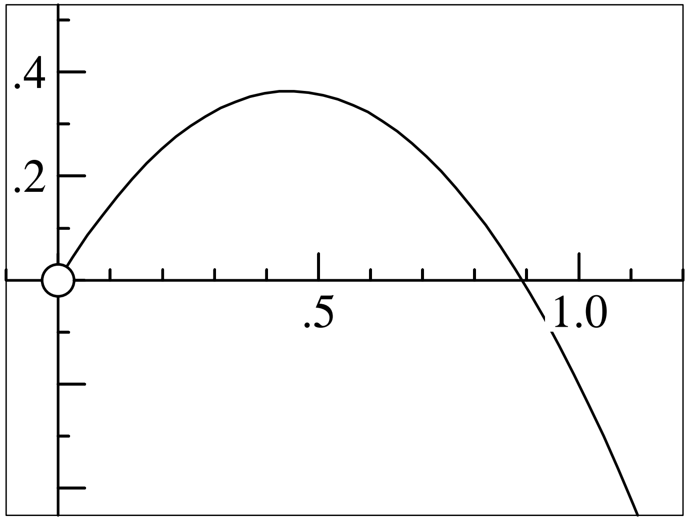
Puisque $\sin\alpha_1=x/\sqrt{a^2+x^2}$ et $\sin\alpha_2=(\ell-x)/\sqrt{b^2+(\ell-x)^2}$, cette dérivée s'annule si

$$\frac{\sin\alpha_1}{v_1}=\frac{\sin\alpha_2}{v_2}\qquad\text{(loi de Snellius-Descartes).}$$

§2. Enveloppes, caustiques, parabole de tir

Mon *Frére*, Professeur à *Bâle*, a pris de là occasion de rechercher plusieurs courbes que la Nature nous met tous les jours devant les yeux . . .

(Joh. Bernoulli 1692)

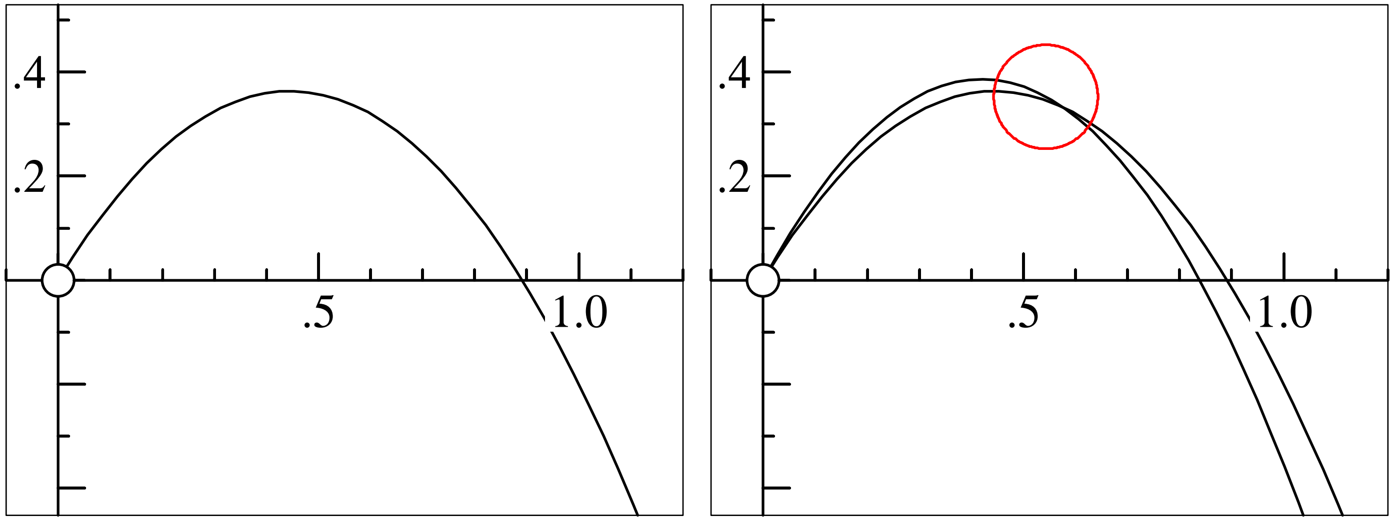


$$y = ax - \frac{x^2(1+a^2)}{2}$$

§2. Enveloppes, caustiques, parabole de tir

Mon *Frére*, Professeur à *Bâle*, a pris de là occasion de rechercher plusieurs courbes que la Nature nous met tous les jours devant les yeux . . .

(Joh. Bernoulli 1692)

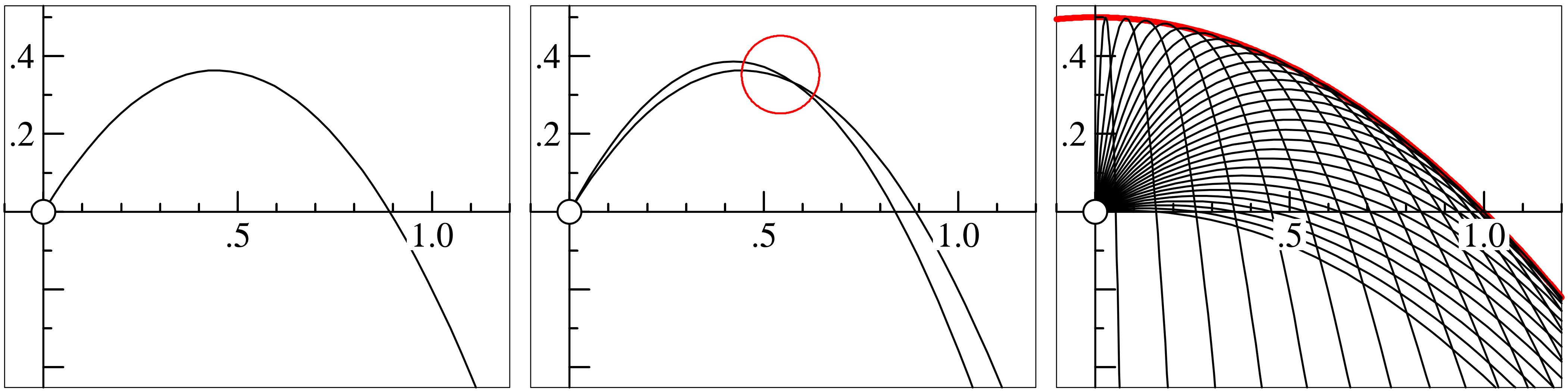


$$y = ax - \frac{x^2(1+a^2)}{2} \qquad \boxed{\frac{\partial y}{\partial a} = 0}$$

§2. Enveloppes, caustiques, parabole de tir

Mon *Frére*, Professeur à *Bâle*, a pris de là occasion de rechercher plusieurs courbes que la Nature nous met tous les jours devant les yeux . . .

(Joh. Bernoulli 1692)

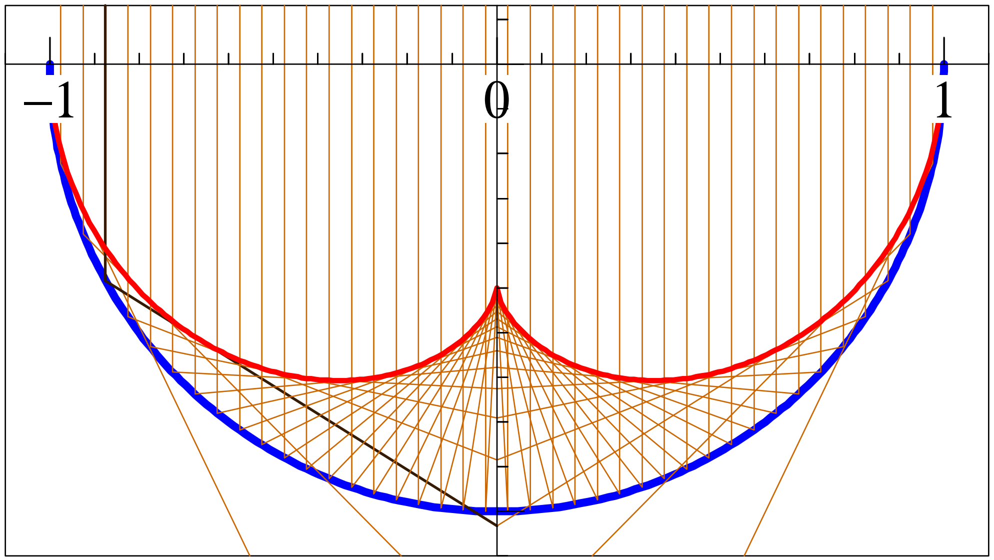


$$y = ax - \frac{x^2(1+a^2)}{2}$$

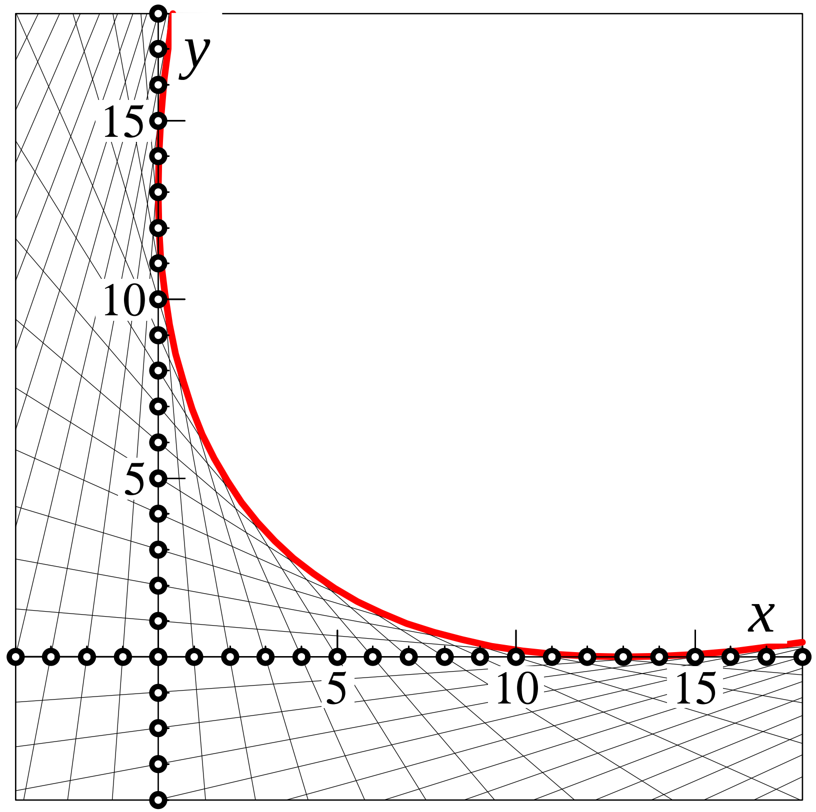
$$\boxed{\frac{\partial y}{\partial a} = 0}$$

$$y = (1-x^2)/2$$

Weitere Beispiele : (Jac. und Joh. Bernoulli 1692)

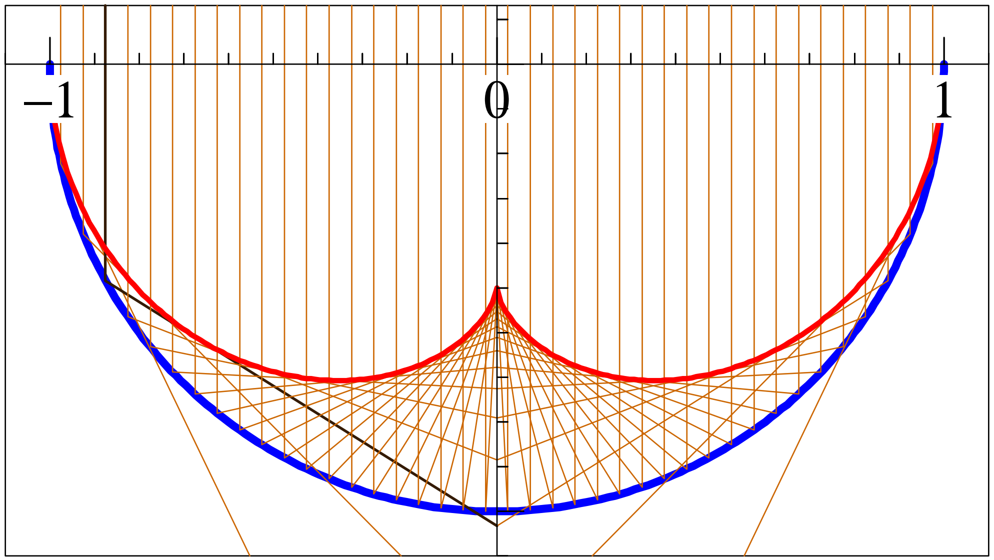


Kaustik eines Kreises



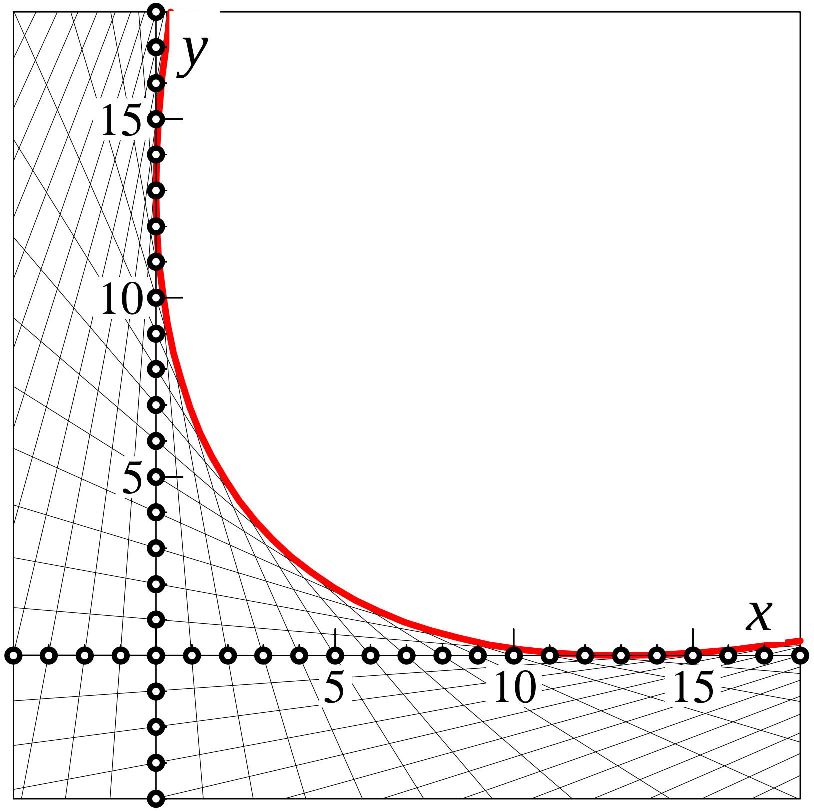
Geradenschar

Weitere Beispiele : (Jac. und Joh. Bernoulli 1692)



Kaustik eines Kreises

$$y = -\sqrt{1-x^{2/3}}\left(\frac{1}{2}+x^{2/3}\right)$$

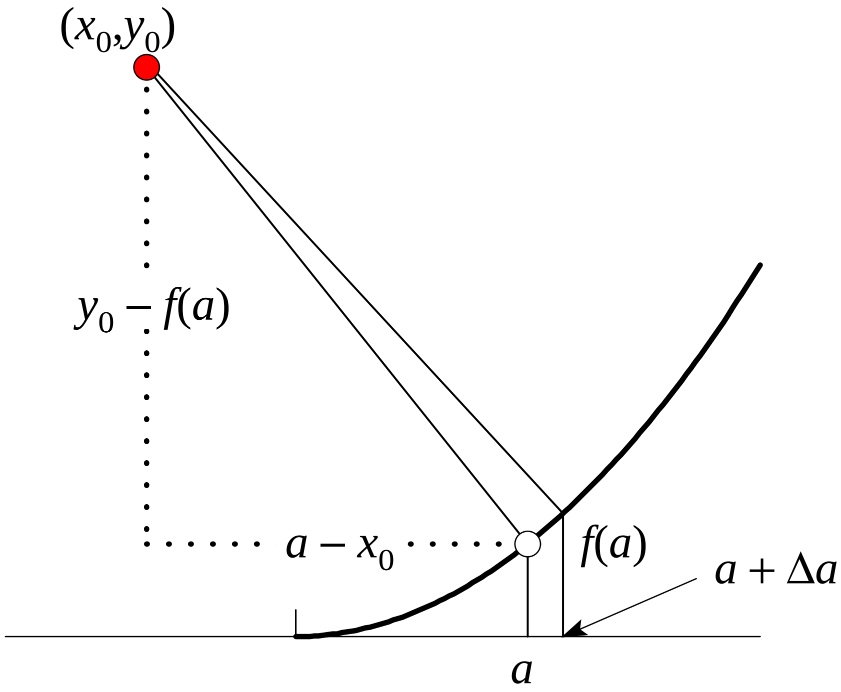


Geradenschar

$$y = x - 2\sqrt{13x} + 13$$

Courbure.

> There are few Problems concerning Curves more elegant than this, or that give a greater Insight into their nature.
>
> (Newton 1671, Engl. pub. 1736, p. 59)

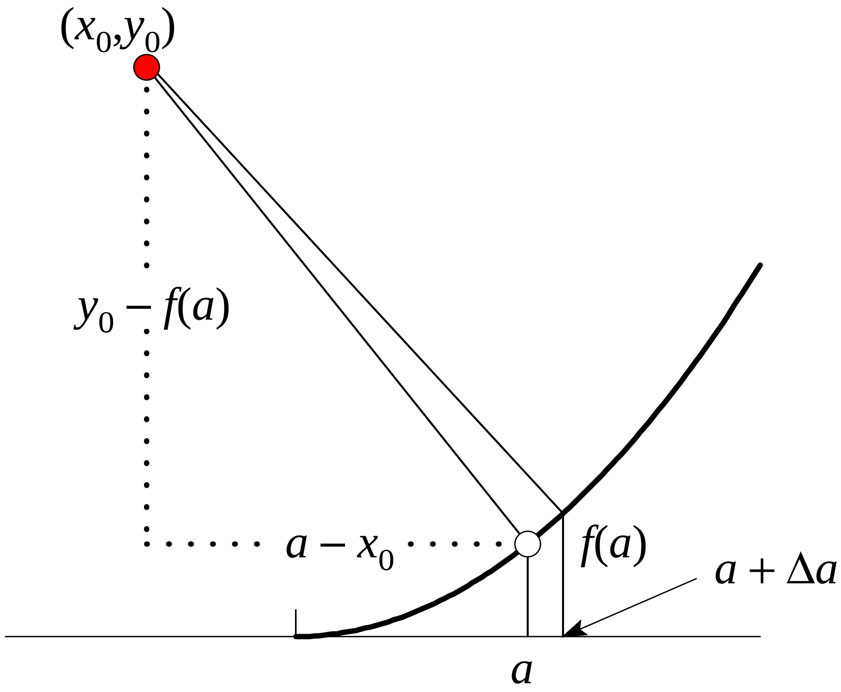


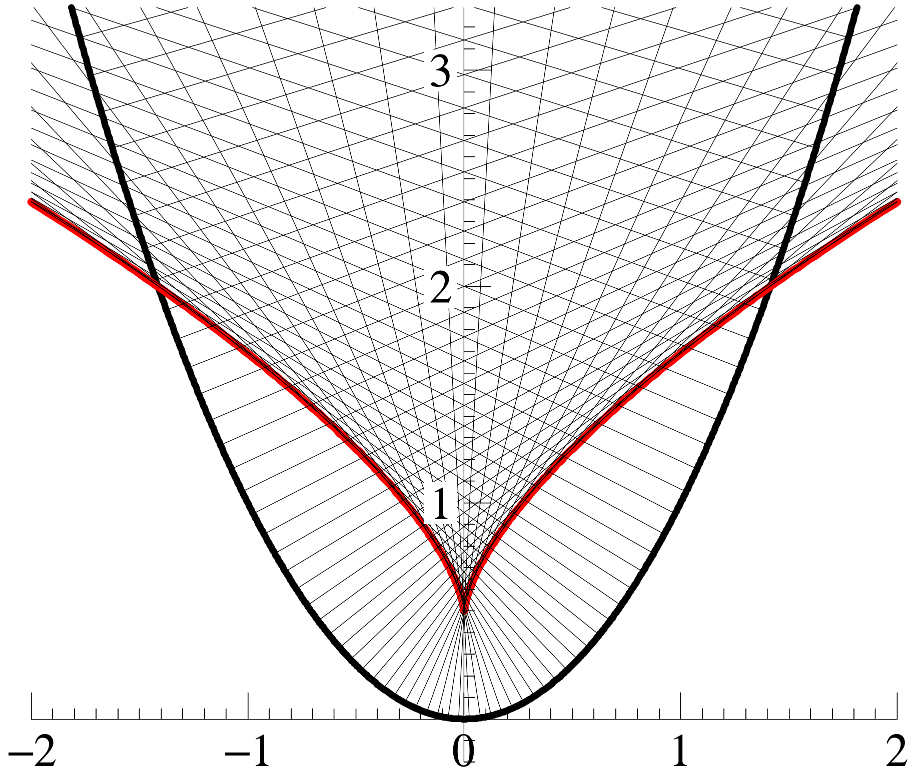
$$y = f(a) - \frac{1}{f'(a)}(x-a)$$

Courbure.

There are few Problems concerning Curves more elegant than this, or that give a greater Insight into their nature.

(Newton 1671, Engl. pub. 1736, p. 59)





$$y = f(a) - \frac{1}{f'(a)}(x-a)$$

$$r = \frac{(1+(f'(a))^2)^{3/2}}{|f''(a)|}$$

§3. Calcul intégral.

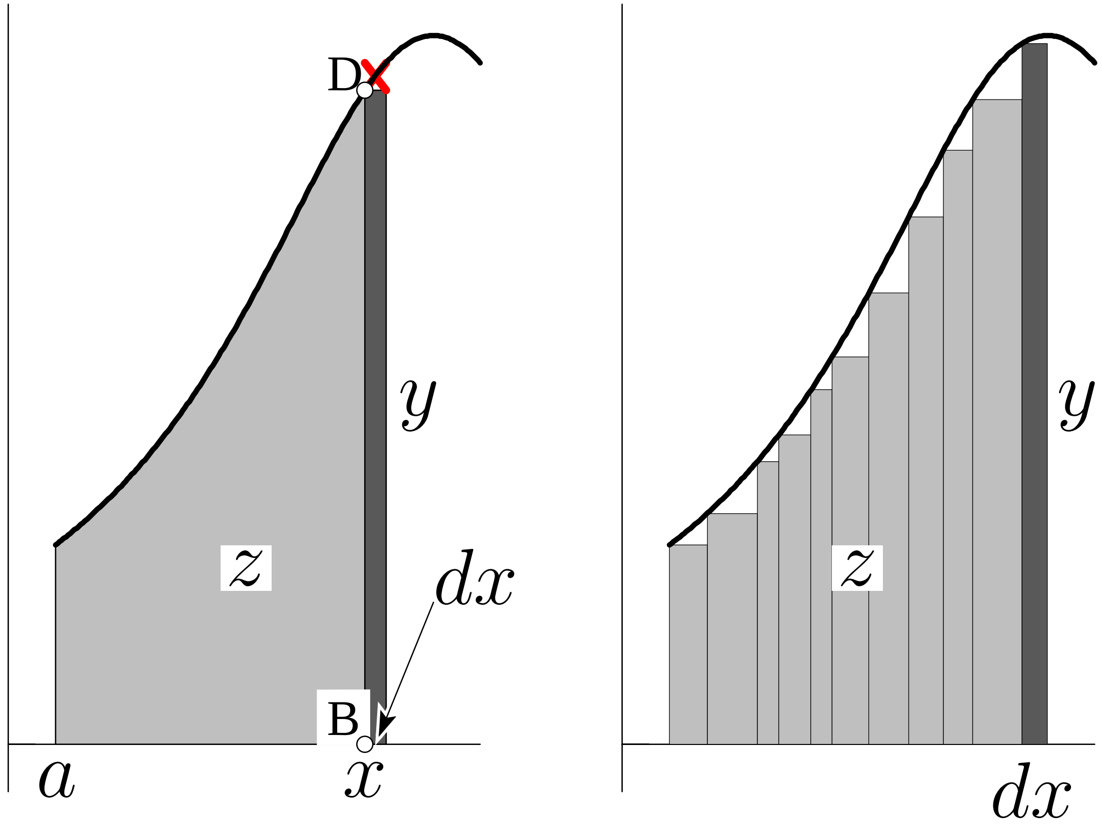
. . . notam $\int$ pro summis, ut adhibetur nota d pro differentiis . . .

(Letter of Leibniz to Joh. Bernoulli, March 8/18, 1696)

. . . vocabulum i n t e g r a l i s etiamnum usurpaverim . . .

(Letter of Joh. Bernoulli to Leibniz, April 7, 1696)

$\boxed{dz = y\,dx}$



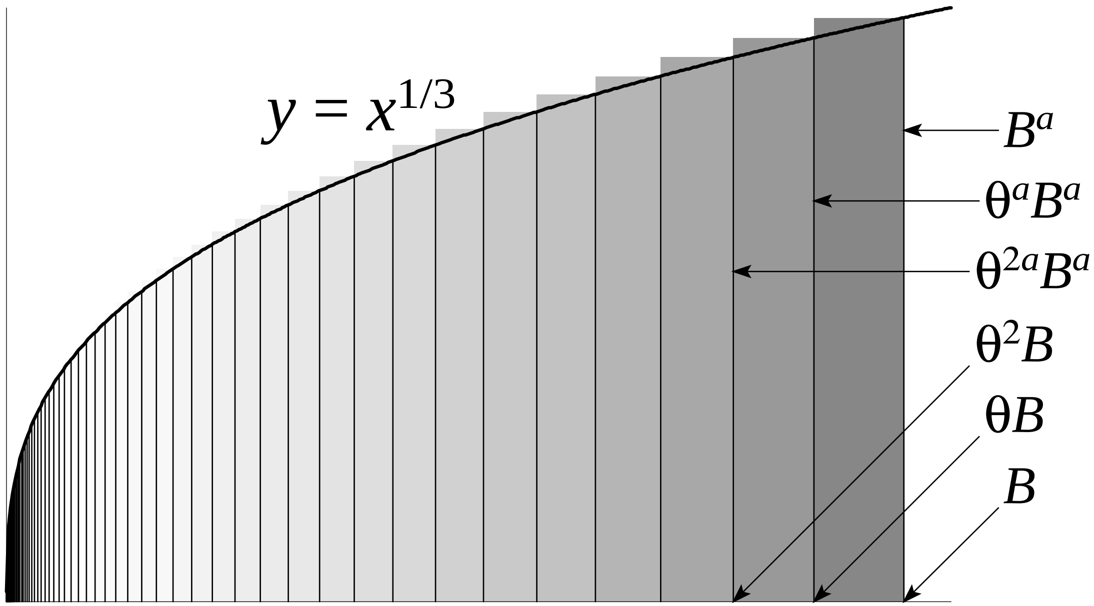
$\boxed{z = \int y\,dx}$

"... sic nobis summæ & differentiæ seu $\int$ & d, reciproquæ sunt."

Exemples. 1. Fermat

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$$

Calcul d'aires sous $y = x^a$ (Fermat 1638) :

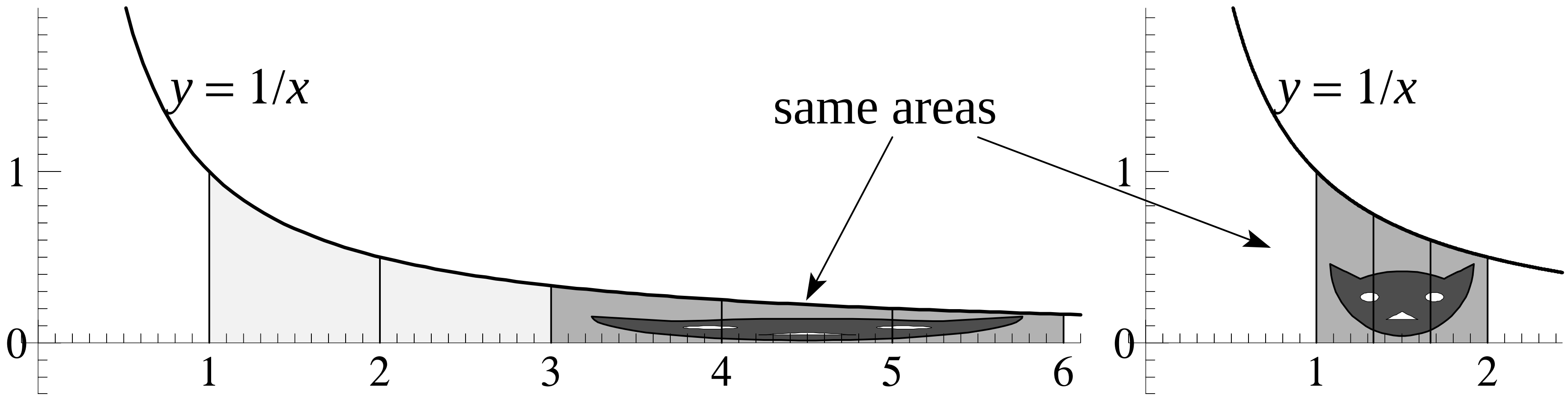


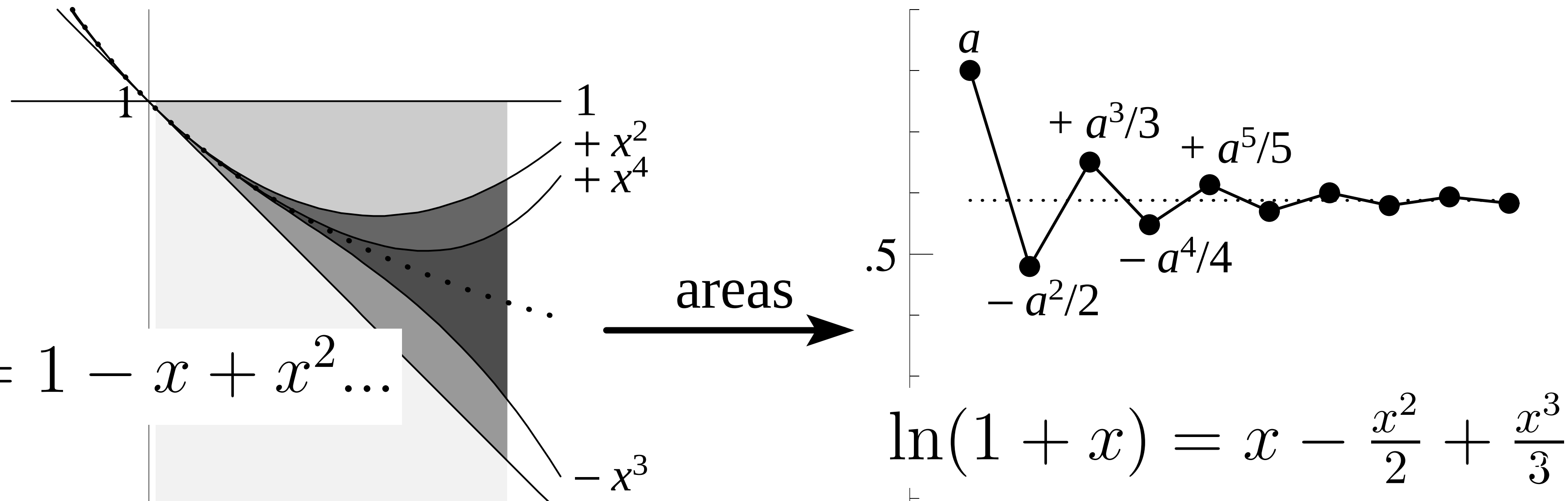
$$F = \quad \text{ser. géom.} \quad = \frac{B^{a+1}}{a+1} \quad \text{if} \quad a > -1.$$

ne marche pas pour $a = -1$ ......

2. Logarithmes (Gregory of St. Vincent 1647, Mercator 1668) :

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln x + C$$



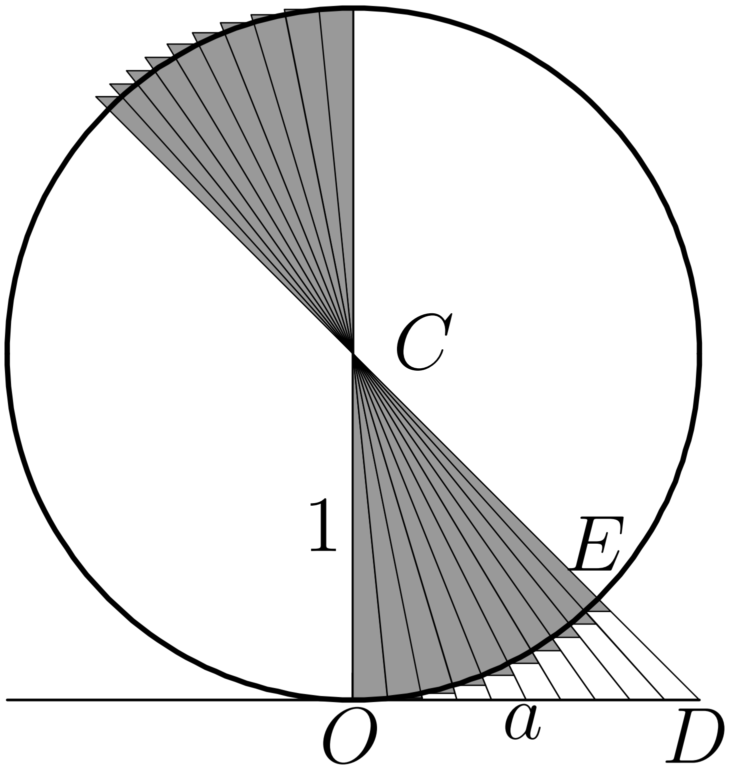


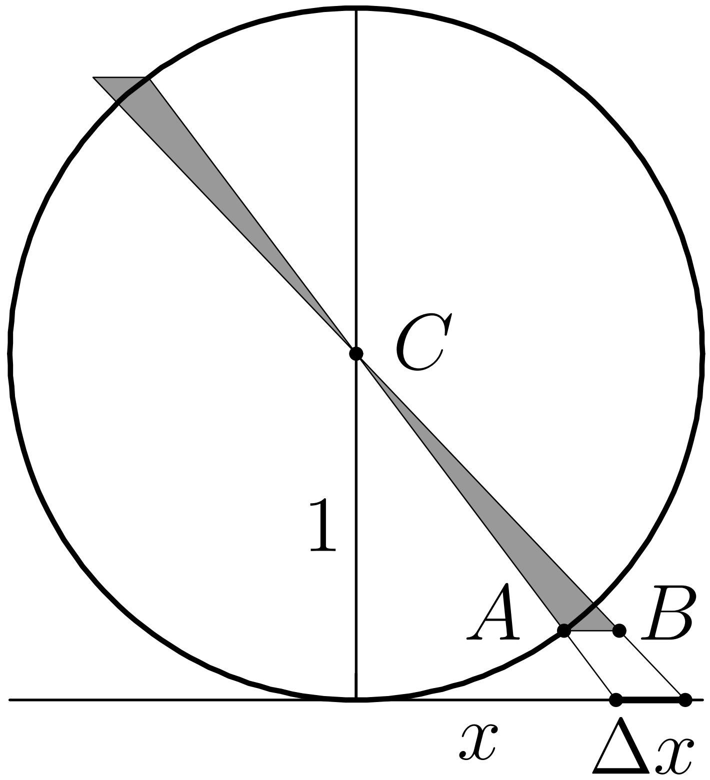
$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 \ldots$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \ldots$$

3. Arcustangens (Gregory1669, Leibniz 1675):

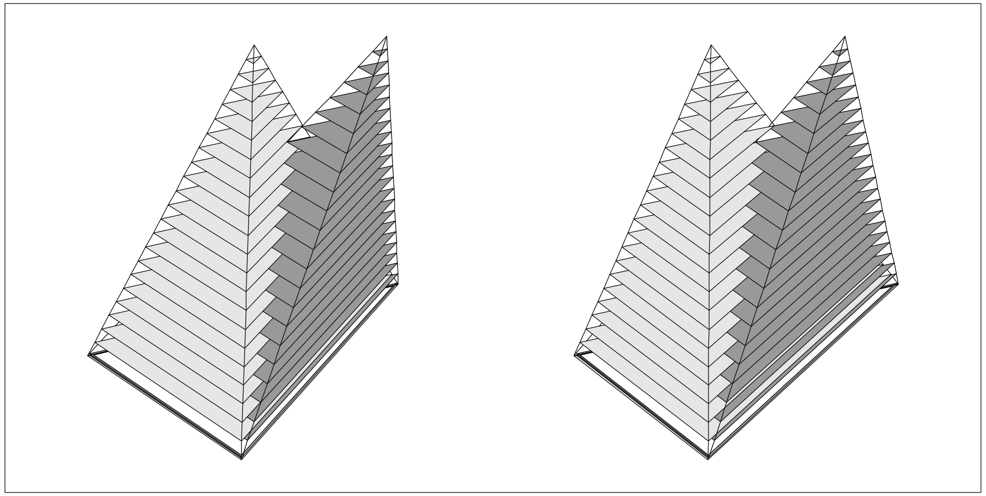
$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + C$$



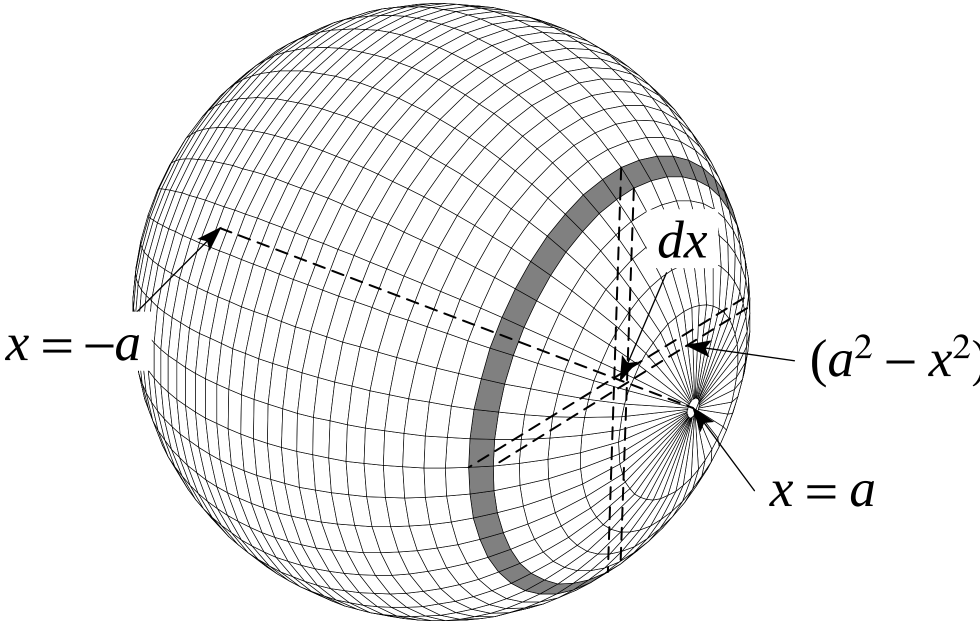


$F = \frac{\Delta x}{1+x^2} = (1-x^2+x^4-x^6\ldots)\cdot\Delta x.\ \Rightarrow\ \boxed{\arctan a = a - \frac{a^3}{3} + \frac{a^5}{5} -}$

4. Volumes (Euclide XII.9, Archimède)



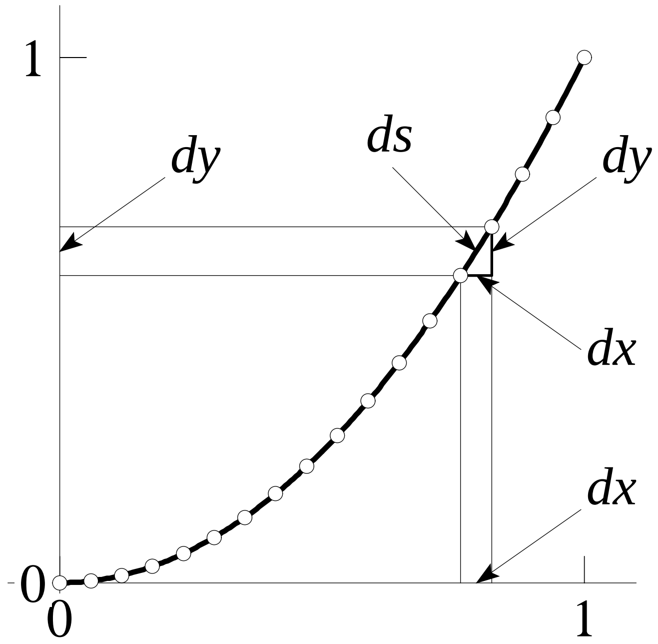
volume pyramide



$$\mathcal{V} = \int_0^1 \mathcal{A}(h)\, dh = \int_0^1 \mathcal{A} \cdot h^2\, dh = \frac{\mathcal{A}}{3}$$

$$\mathcal{V} = \int_{-a}^{a} \mathcal{A}(x)\, dx = \int_{-a}^{a} \pi \cdot \rho^2\, dx = \int_{-a}^{a} \pi \cdot (r^2 - x^2)\, dx = \frac{4\pi a^3}{3}$$

5. Longueur d'arc



$$L = \int \sqrt{dx^2 + dy^2}$$
$$= \int \sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

Exemple (Newton 1671). Pour le cercle $y = \sqrt{1 - x^2}$

$$\arcsin x = \int_0^x \sqrt{1 + \frac{t^2}{1 - t^2}}\, dt = \int_0^x (1 - t^2)^{-1/2}\, dt$$

$$= \int_0^x (1 + \frac{1}{2}\, t^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\, t^4 + \ldots) dt = x + \frac{1}{2}\, \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\, \frac{x^5}{5} + \ldots$$

Exemple : Périmètre de l'ellipse.

Ellipse de demi-axes 1 et b :

$$x^2 + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{ou} \qquad x = \cos t, \quad y = b \sin t.$$

Comme $dx = -\sin t \, dt$ et $dy = b \cos t \, dt$, le périmètre est

$$P = \int \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int \sqrt{1 - k \cos^2 t} \, dt$$

où $k = 1 - b^2$.

Enfin, par $\cos^2 t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2t$ et la substitution

$\cos v = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \quad dv = \frac{2du}{1+u^2}$ on obtient encore

$$P = \int \sqrt{\alpha + \beta \cos v} \, dv = \int \sqrt{\text{Pol. dég. 4 en } u} \, \frac{du}{(1+u^2)^2}.$$

Intégrales elliptiques.

> . . . weil die Analysten nach allen Versuchen endlich geschlossen haben, daß man die Hoffnung aufgeben müsse, elliptische Bögen durch algebraische Formeln, Logarithmen und Circulbögen auszudrücken.
>
> (Lambert 1772, *Rectification elliptischer Bögen* . . ., Opera vol. I, p. 312)

> On s'assurera aisément par notre méthode que l'intégrale $\int \frac{e^x\,dx}{x}$, dont les Géomètres se sont beaucoup occupés, est impossible sous forme finie . . .
>
> (Liouville, *Crelle J.* 13, 1835, p. 113)

Toutes les intégrales de la page précédente n'ont pas de primitive élémentaire (voir citations). Legendre, Abel, Jacobi et Weierstrass consacrent une grande partie de leurs travaux à l'étude de ces intégrales "elliptiques" , et de leur fonctions réciproques, les "fonctions elliptiques".

§4. **Équations différentielles.** $\frac{dy}{dx} = f(x, y).$

Exemple : équation à variables séparées

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$$

“Recette”: on sépare les variables

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)\, dx \quad \text{et} \quad \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\, dx + C.$$

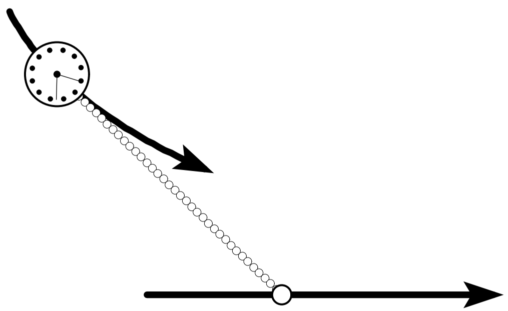
Si $G(y)$ et $F(x)$ sont des primitives de $1/g(y)$ et de $f(x)$ respectivement, la solution est exprimée par $G(y) = F(x) + C$.

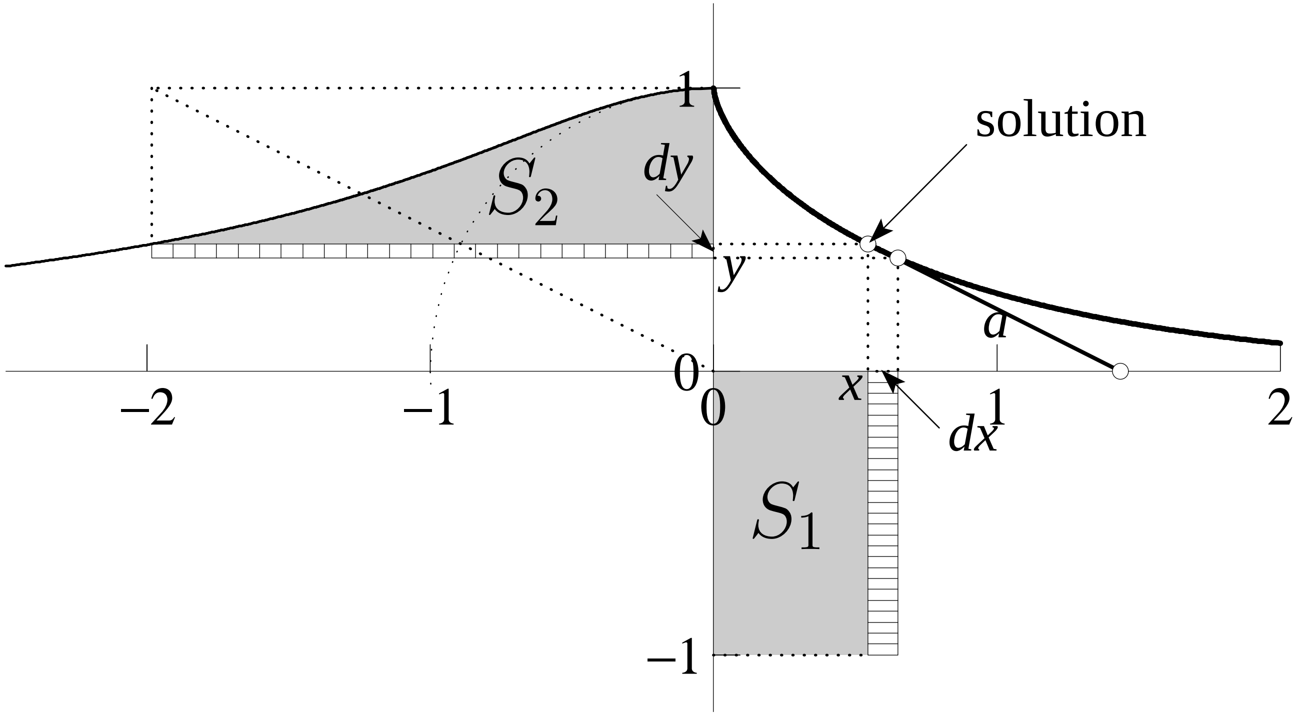
Critique fréquente : ceci n’est pas une “preuve rigoureuse ...”.

Mais les inventeurs de cette méthode, Jac. et Joh. Bernoulli et Leibniz, n’étaient pas si stupides que ça ...

Voyons un exemple historique :

Exemple : la tractrice (Claude Perrault 1674) :





Solution (Leibniz 1693) :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}}, \qquad \text{i.e.,} \qquad -\frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y}\, dy = dx,$$

$\Rightarrow$ $\boxed{S_1 = S_2}$ “Ergo & horum integralia aequantur”. (Jac. Bernoulli 1690)

Leibniz affirme que c'est un “fait bien-connu” que cette aire peut être exprimée à l'aide d'un logarithme, ce qui se vérifie avec la substitution $\sqrt{a^2-y^2}=v$, $a^2-y^2=v^2$, $-y\,dy=v\,dv$, qui mène à

$$x=\int_y^a \frac{\sqrt{a^2-y^2}}{y}dy=-\sqrt{a^2-y^2}-a\log\frac{a-\sqrt{a^2-y^2}}{y}$$

(voir les exercices).

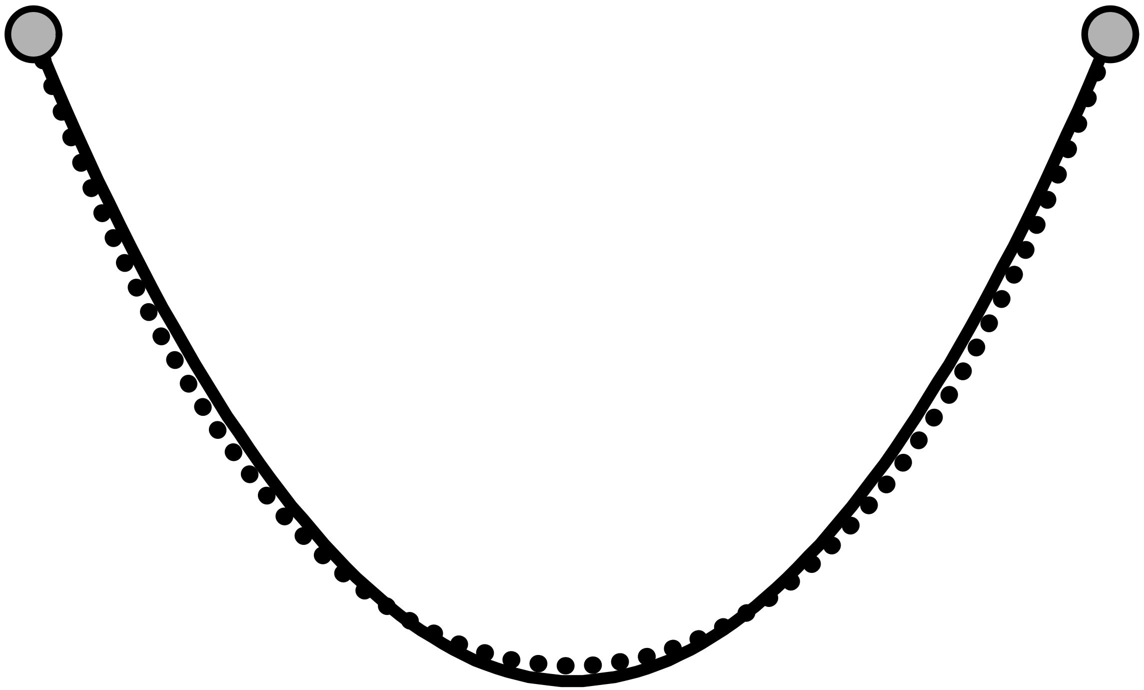
> Claudius Perraltus Medicus Parisinus insignis, tum & Mechanicis atque Architectonicis studiis egregius, & Vitruvii editione notus, idemque in Regia scientiarum Societate Gallica, dum viveret, non postremus, mihi & aliis ante me multis proposuit hoc problema, cujus nondum sibi occurrisse solutionem ingenue fatebatur ...
>
> (Leibniz 1693)

Autre exemple : la catenaire (Galilei 1638)

"une chaînette suspendue par deux clous contre un mur se place presque *ad unguem* au-dessus d'une parabole"

(G. Galilei, *Discorsi e Dimostrazioni Matematiche* 1638, (deuxième journée, p.186, quatrième journée, p.310))

Est-ce une parabole ?



Chr. Huygens à 16 ans : “Galilei est faux” !

Mais pour juger mieux de l’excellence de vostre Algorithme j’attens avec impatience de voir les choses que vous aurez trouvées touchant la ligne de la corde ou chaine pendante, que Mr. Bernouilly vous a proposé à trouver, dont je luy scay bon gré, parce que cette ligne renferme des proprietez singulieres et remarquables. Je l’avois considerée autre fois dans ma jeunesse, n’ayant que 15 ans, et j’avois demontré au P. Mersenne, que ce n’estoit pas une Parabole . . .

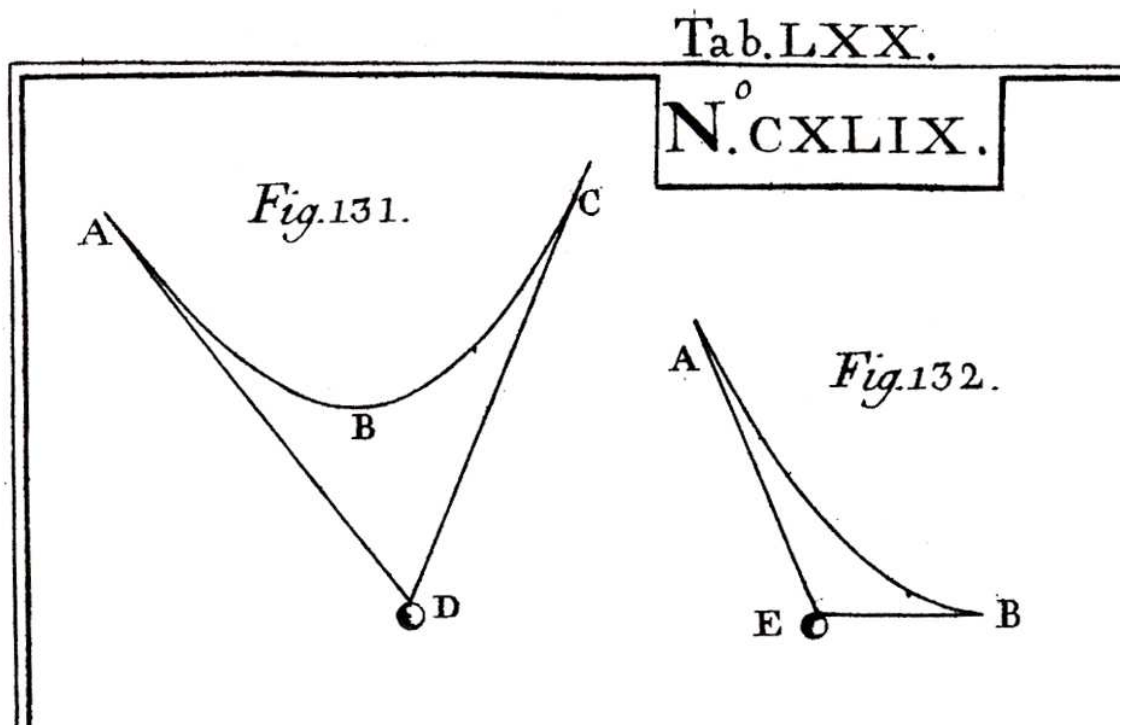
(Lettre de Huygens à Leibniz, le 9 oct. 1690)

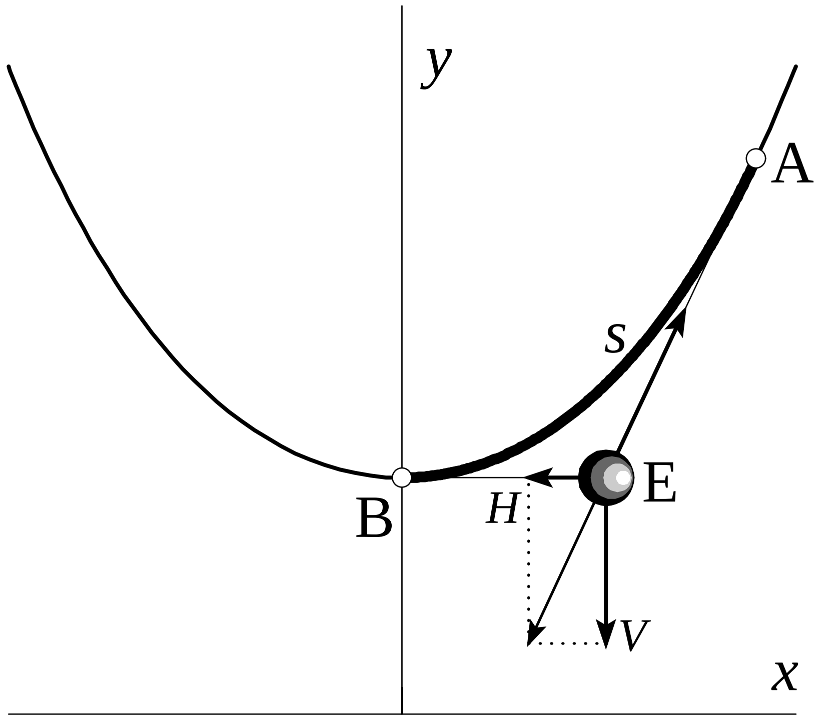
Les efforts de mon frere furent sans succès, pour moi, je fus plus heureux, car je trouvai l’adresse . . . Il est vrai que cela me couta des meditations qui me deroberent le repos d’une nuit entiere . . .

(Joh. Bernoulli, voir *Briefwechsel*, vol. 1, p. 98)

Solution (Leibniz 1691, Joh. Bernoulli 1691) :

“Je ne mets point ici la démonstration, parce que ceux qui entendent ces matiéres, la trouveront aisément, & qu’il faudroit trop de discours pour la faire comprendre aux autres." (Johann Bernoulli, 1692)





$$p = \frac{dy}{dx}$$

$$\boxed{C \cdot p = s}$$

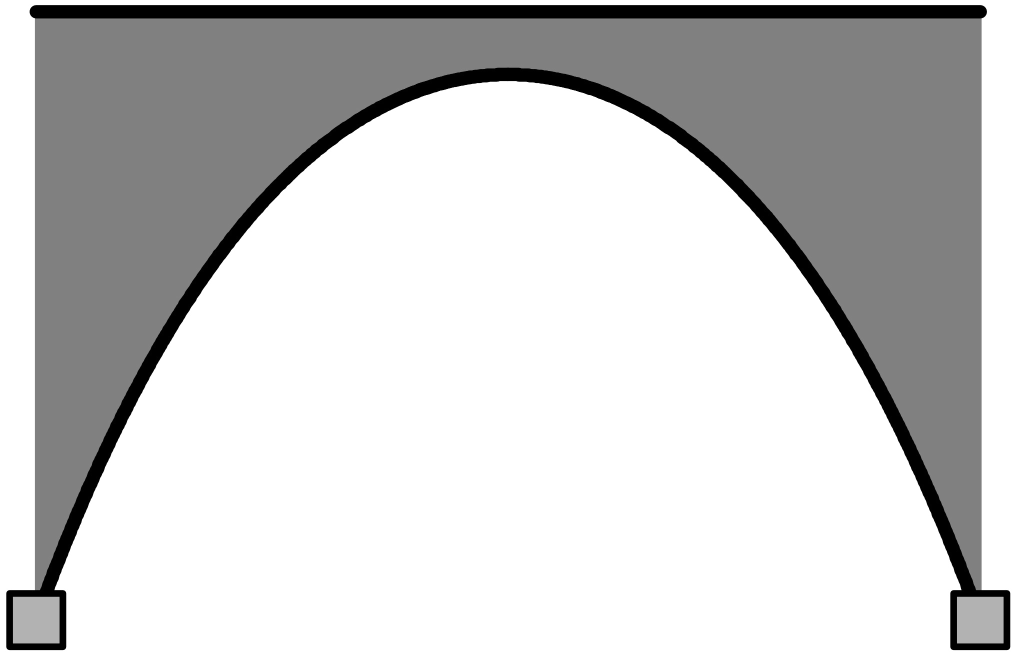
$$C \cdot dp = \sqrt{1+p^2}\,dx$$

(la pente en A est proportionnelle à la longueur d'arc)

$$C \int \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \int dx, \qquad \text{i.e.} \qquad \operatorname{arsinh}(p) = \frac{x-x_0}{C},$$

$$p = \sinh\left(\frac{x-x_0}{C}\right) \quad \text{et} \quad y = K + C \cdot \cosh\left(\frac{x-x_0}{C}\right).$$

Problème. La meilleure courbe de l'arche d'un pont :



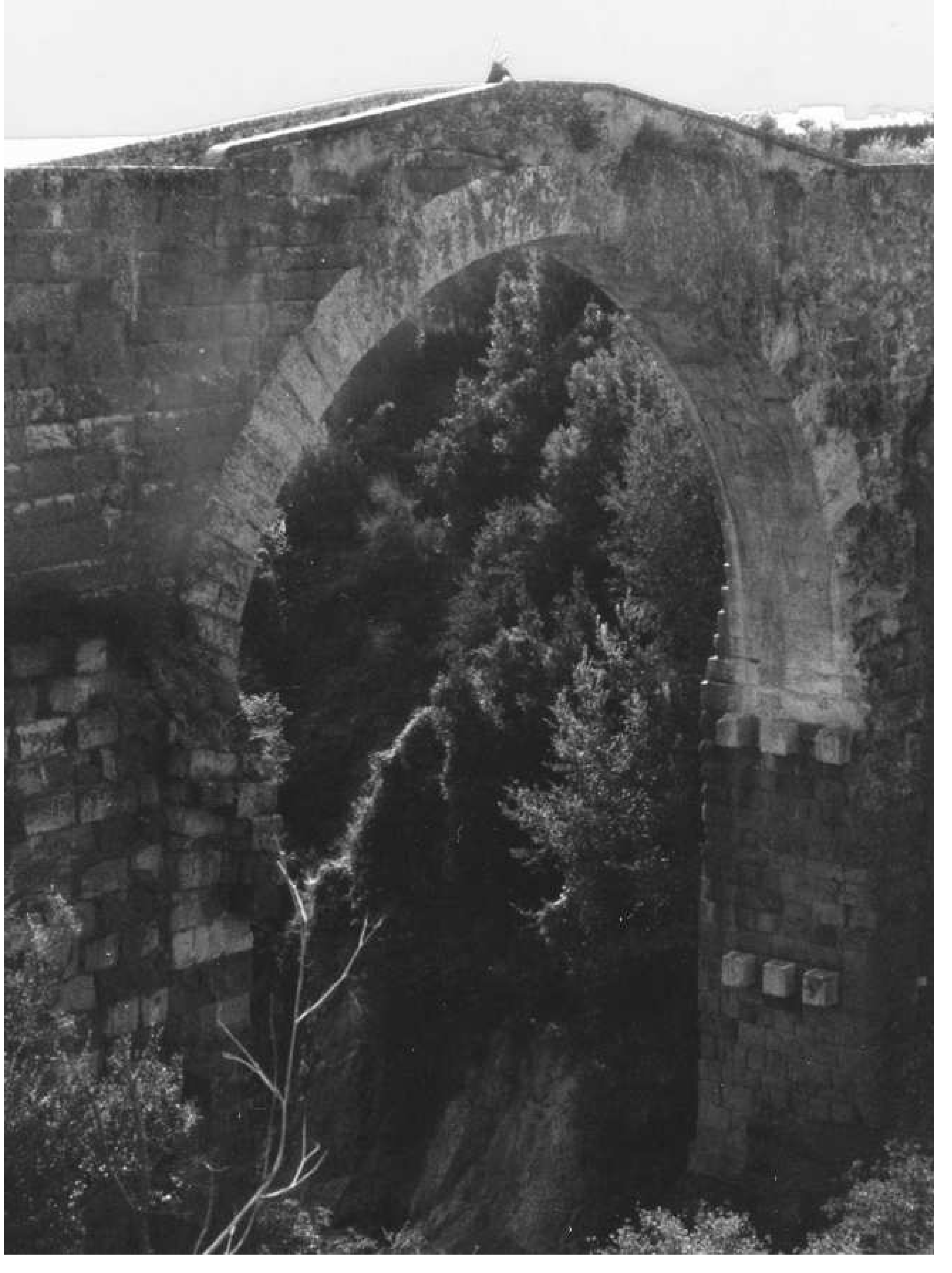
Bonjour,

En tant qu'ancien étudiant (et fan) de vos cours, j'ai une petite question matho-historique. Je cherche la formule qui exprimerait la courbe d'une voute (pont...). Certainement, le problème a été exprimé de manière propre et élégante, et je me suis dit que vous pourriez m'être d'un certain secours.

avec tous mes remerciements, Alexandre Masselot

(e-mail du 10 août 2001)

Pont romain à Vulci

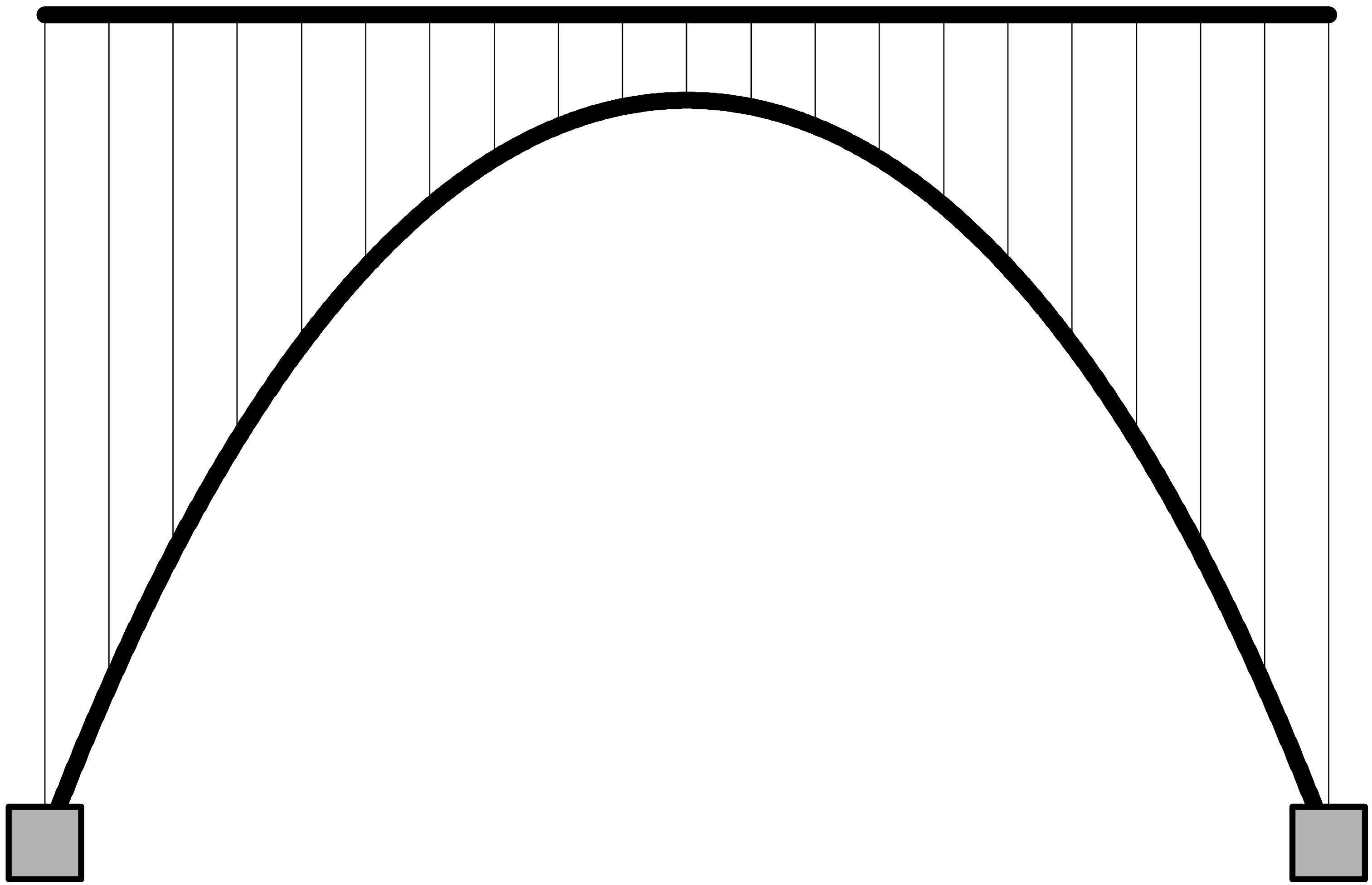


Solisbrücke 1901 (Chur-Thusis)

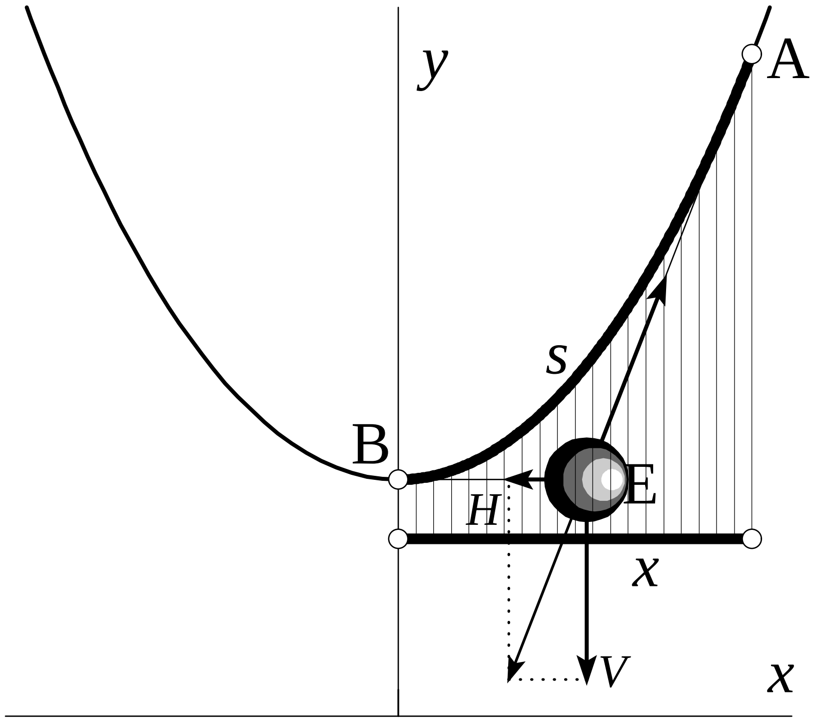
Davos-Filisur, Pflanzgartenviadukt 1908

Problème plus simple.

Sans le poids des piliers :



Solution du deuxième problème.



$$\boxed{C \cdot p = s + x}$$

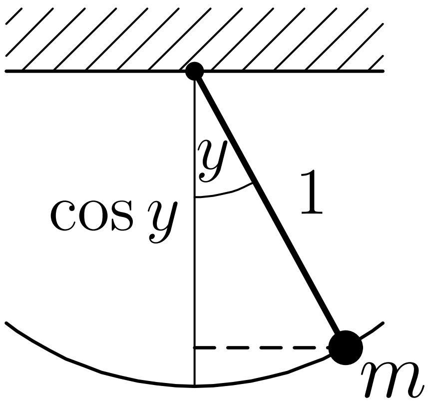
$$C \cdot dp = \sqrt{dx^2 + dy^2} + dx$$

$$C \cdot \frac{dp}{dx} = \sqrt{1+p^2} + 1 \quad \Rightarrow \quad C \int \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}+1} = \int dx$$

Les deux intégrales sont possibles en formules analytiques :

$\dfrac{1-\sqrt{1+p^2}}{p} + \operatorname{arsinh}(p) = x$ rés. pour $p = \Phi(x)$ et intégrer. **S.E.**

Autre exemple : le pendule (Chr. Huygens 1673)



$$\boxed{y'' + \sin y = 0}$$

$$\boxed{y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p' \cdot p}$$

(méthode de Riccati 1712)

$$p \cdot dp = -\sin y \cdot dy \quad \text{et} \quad \frac{p^2}{2} = \cos y + C.$$

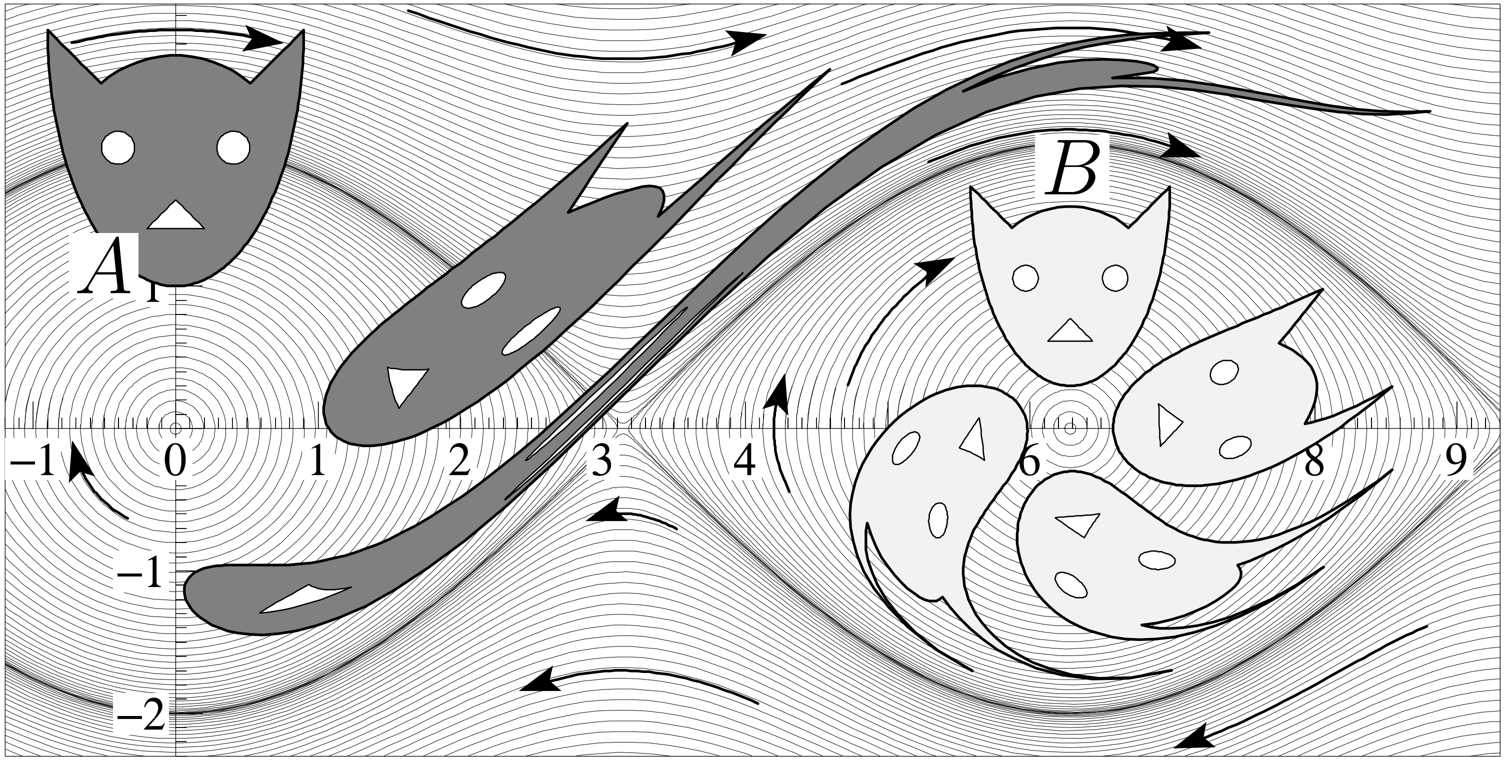
Si l'on dénote l'amplitude des oscillations par A (le cas où $p = y' = 0$), on obtient $C = -\cos A$ et par conséquent

$$p = \frac{dy}{dt} = \sqrt{2\cos y - 2\cos A},$$

à nouveau une équation différentielle pour y. Séparation des variables :

$$\int_0^y \frac{d\eta}{\sqrt{2\cos\eta - 2\cos A}} = t$$

une intégrale elliptique !!!



... et encore : la période dépend de l'amplitude !!

Équation différentielle linéaire homogène.

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot y \quad \text{var. sep.} \quad \frac{dy}{y} = f(x)\,dx \quad \Rightarrow$$

$$\ln y = \int f(x)\,dx + \overline{C}, \quad \text{ou} \quad y = C \cdot \exp(\int f(x)\,dx).$$

Constatation : dés qu'on connait une solution, on obtient toutes en la multipliant par une constante quelconque.

Équation différentielle de Bernoulli.

> En vérité rien n'est plus ingenieux que la solution que vous donnez de l'égalité de Mr. votre frere ; & cette solution est si simple qu'on est surpris que ce problême ait paru si difficile : c'est là ce qu'on appelle une élégante solution.
>
> (P. Varignon, lettre à Joh. Bernoulli "6 Aoust 1697")

En 1695, Jacob Bernoulli se donne beaucoup de mal pour résoudre

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot y + g(x) \cdot y^n$$

Voilà donc une bonne occasion de lancer un concours officiel. Malheureusement, Johann a aussitôt deux idées élégantes (1697). La première est le sujet d'un exercice. La seconde est de chercher une solution de la forme $y(x) = u(x) \cdot v(x)$.
On obtient ...

$$\frac{du}{dx}\cdot v+\frac{dv}{dx}\cdot u=f(x)\cdot u\cdot v+g(x)\cdot u^n\cdot v^n.$$

On peut maintenant égaler séparément les deux termes de chaque membre :

$$\tfrac{du}{dx}=f(x)\cdot u \qquad \text{équ. lin. pour obtenir } u,$$

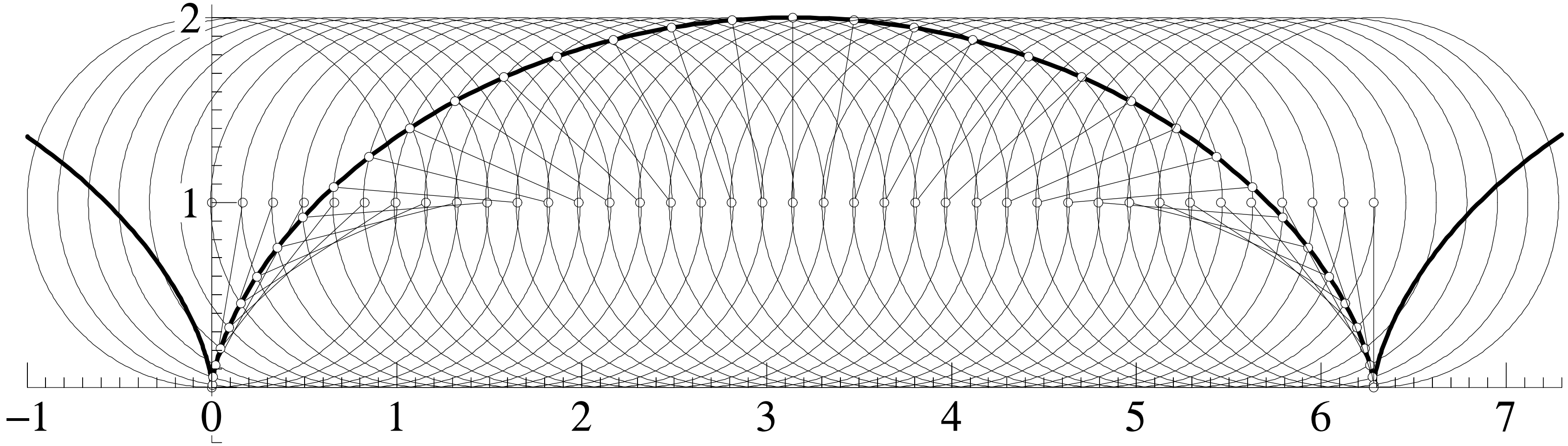
$$\tfrac{dv}{dx}=g(x)u^{n-1}(x)v^n \qquad \text{équ. sep. pour obtenir } v.$$

Exemple. Équ. lin. inhomogène : $\dfrac{dy}{dx}=f(x)y+g(x).$

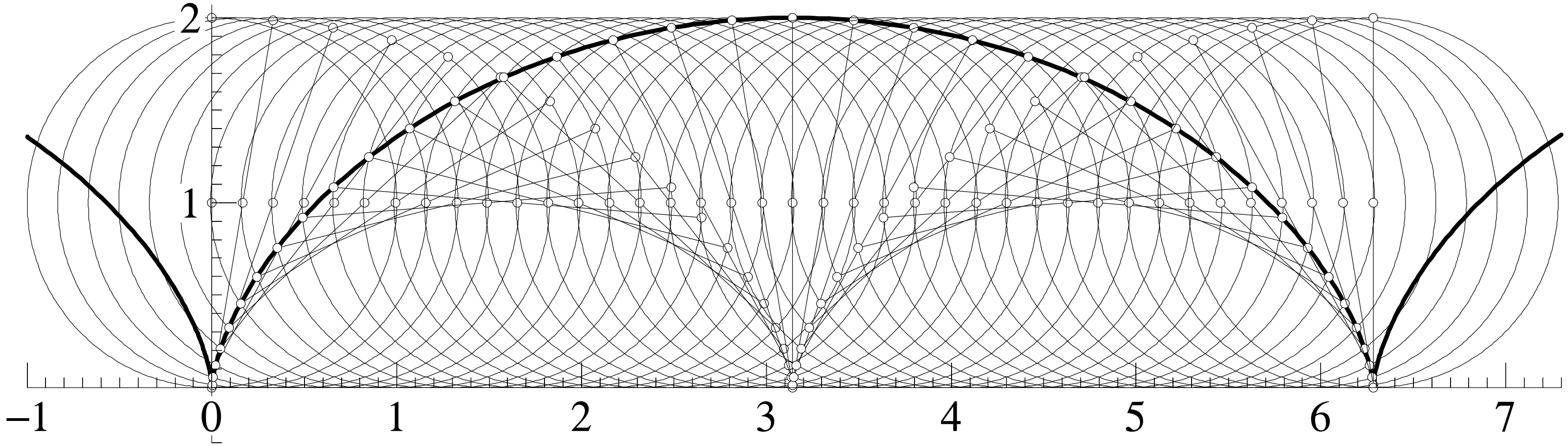
On pose ci-dessus $n=0$ et on obtient ainsi la solution

$$y(x)=C\cdot u(x)+u(x)\int_0^x\frac{g(t)}{u(t)}\,dt,\qquad u(x)=\exp(\int_0^x f(t)\,dt).$$

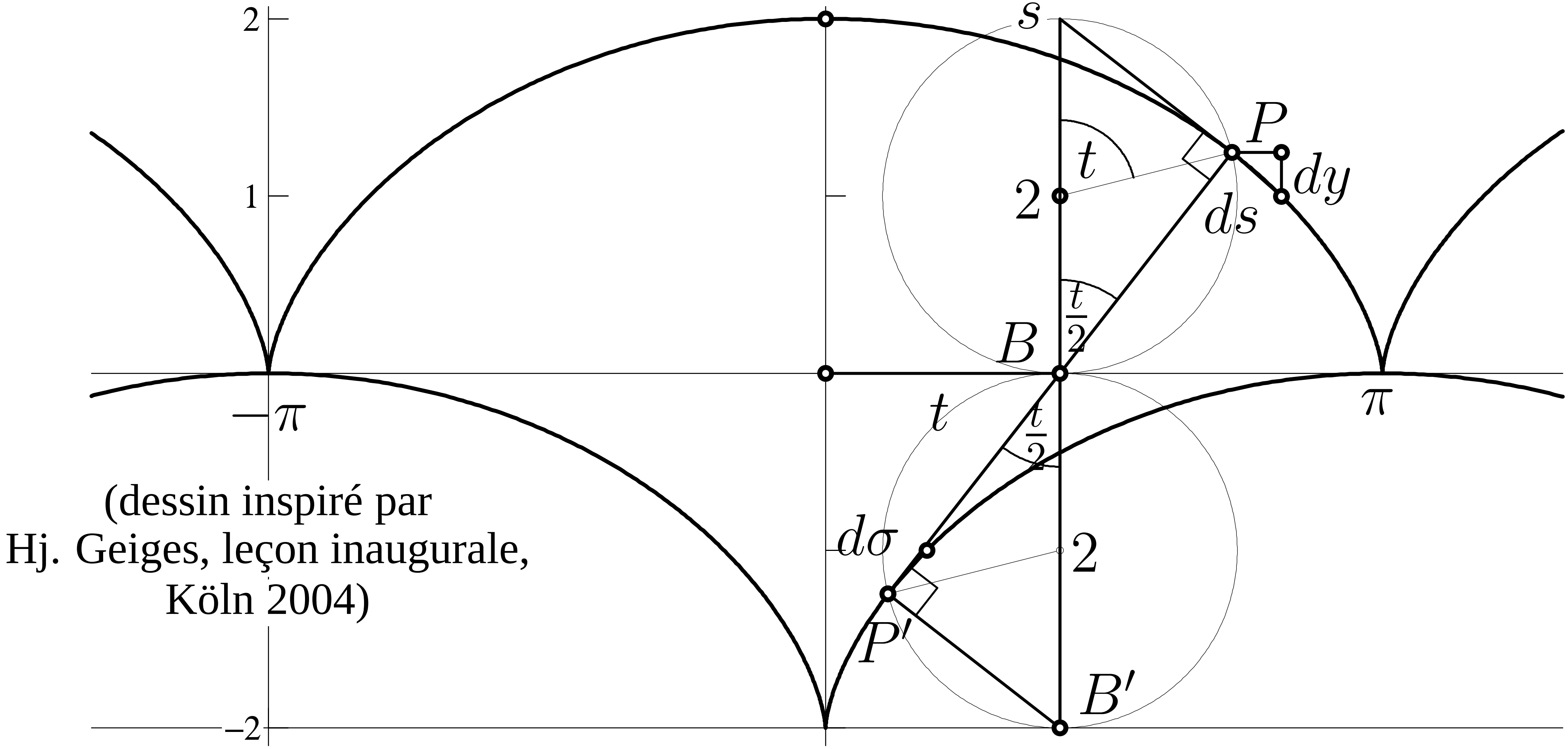
§5. La cycloïde ‘mirabile’ (le pendule isochrone, la développée ; Chr. Huygens, *Horologium oscillatorium* 1673)



Une roue, roulant sur une droite $\Rightarrow$ cycloïde.



Enveloppe d’un diamètre $\Rightarrow$ mini-cycloïde.

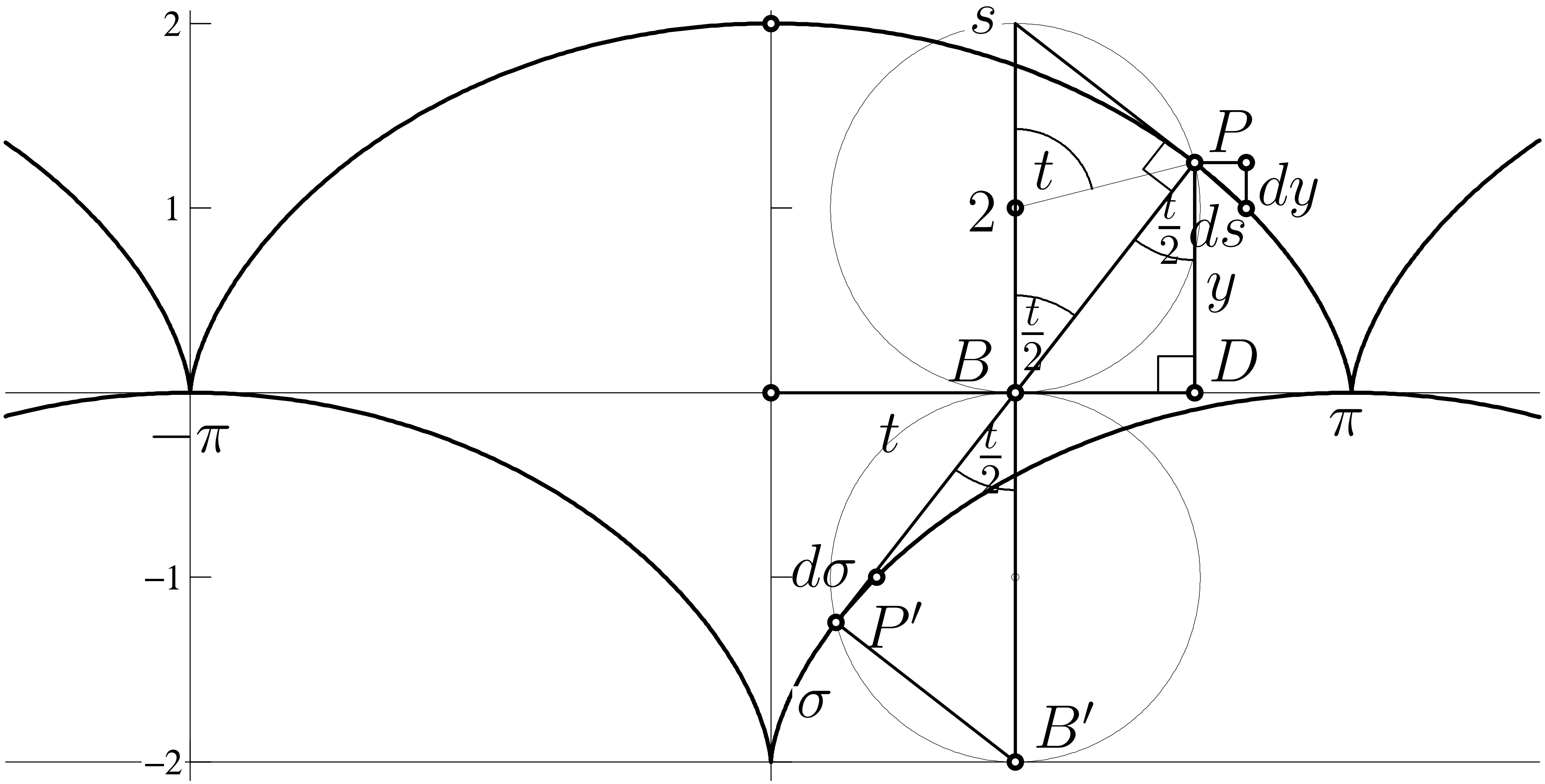


Eucl. III.20 $\Rightarrow$ $PB = 2\cos\frac{t}{2}\,,\quad P'B' = 2\sin\frac{t}{2}\,,\quad PP' = 4\cos\frac{t}{2}$

à chaque instant, la roue tourne autour de B $\Rightarrow$ tang. orth. PB,

$$ds = 2\cos\tfrac{t}{2}\,dt$$

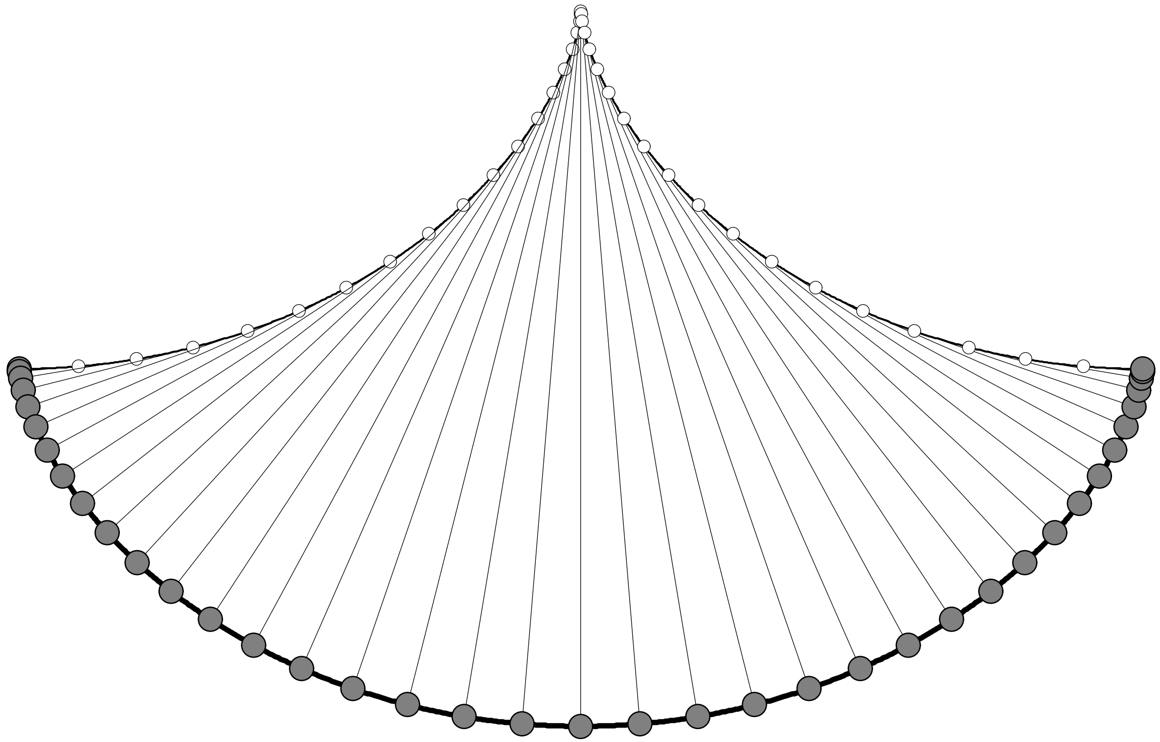
$$d\sigma = 2\sin\tfrac{t}{2}\,dt$$

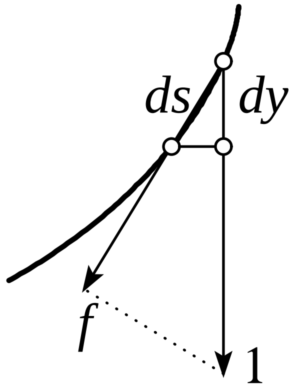


$$\frac{d(PP')}{dt} = -2\sin\frac{t}{2}\,,\ \frac{d\sigma}{dt} = 2\sin\frac{t}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{PP' + \sigma = \text{const} = 4.}$$

Cycloïde est développée de l'autre ; $P' =$ centre cercle oscul.

Le pendule isochrone.





Triangles semblables : $f = \dfrac{dy}{ds} = \sin\dfrac{t}{2} = \dfrac{s}{4}$

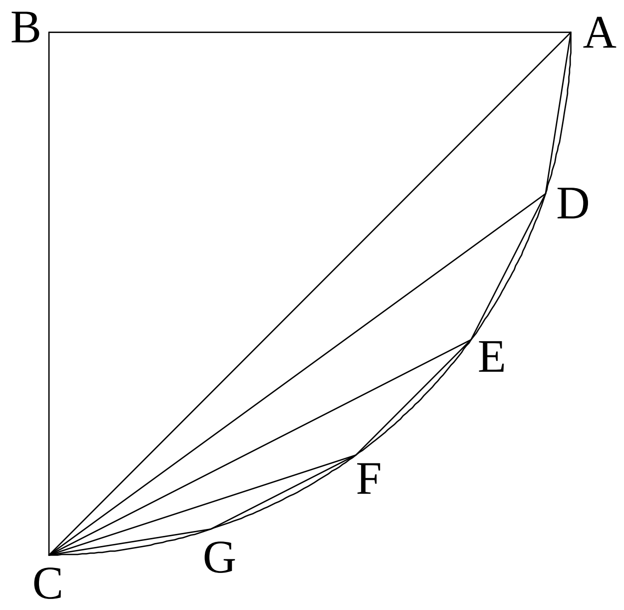
(car $s = \int_0^t 2\cos\frac{t}{2}\,dt = 4\sin\frac{t}{2}$).

$\Rightarrow$ pendule en forme de cycloïde satisfait

$\boxed{s'' + \dfrac{s}{4} = 0}$ $\Rightarrow$ $s = c_1\cos\dfrac{t}{2} + c_2\sin\dfrac{t}{2}$, **toujours** même pério

La brachystochrone. ($\beta\rho\alpha\chi\acute{\upsilon}\varsigma$ = court, $\chi\rho\acute{o}\nu o\varsigma$ = temps).

Erreur de Galilei (1638) :
ADC plus rapide que AC ;
$ADEC$ plus rapide que ADC ;
etc. $\ldots \Rightarrow$
cercle = chemin le plus rapide.

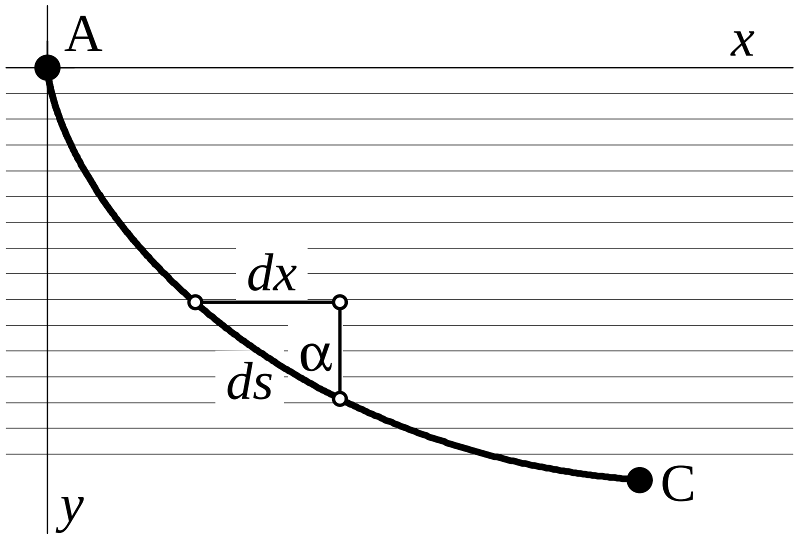


Profundioris in primis Mathesos cultori, Salutem!

PROBLEMA NOVUM Ad cujus solutionem Mathematici invitantur. Datis in plano verticali duobus punctis A et B assignare mobili M, viam AMB per quam gravitate sua descendens et moveri incipiens a puncto A, brevissimo tempore perveniat ad alterum punctum B.

(Joh. Bernoulli 1696)

Solution de la brachistochrone (Joh. Bernoulli 1697).



Nous avons la vitesse $\frac{v^2}{2} = y \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2y}$ (voir pendule).
Triangle BPD (voir page préc.) : $y = BP \cdot \cos \frac{t}{2} = 2 \cdot \cos^2 \frac{t}{2}$.
Donc $v = \sqrt{4 \cos^2 \frac{t}{2}} = 2 \sin \alpha$, i.e., $\frac{\sin \alpha}{v} = \text{const.}$
(= condition de Fermat pour le chemin le plus rapide (voir §1) :

"ex qua concludo Curvam *Brachystochronam* esse *Cycloidem vulgarem*".

Ce problème me paroist des plus curieux et des plus jolis que l'on ait encore proposé, et je serois bien aise de m'y appliquer, mais pour cela il seroit necessaire que vous me l'envoyassiez réduit à la mathematique pure, car le phisique m'embarasse ...

(L'Hospital, lettre à Joh. Bernoulli, 15 juin, 1696)

Voycy donc maintenant comme le probleme se reduit à la pure mathematique : D'entre toutes les lignes AMB qui joignent deux points donnés A et B on cherche la nature de celle dont

$$\int \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{\sqrt{y}}$$

soit la plus petite.

(Joh. Bernoulli, lettre à de l'Hôpital, 30 juin 1696)

§6. Le calcul variationnel

À la fin de sa solution de la brachystochrone, Jacob Bernoulli tend un piège à son frère et propose de résoudre un problème isopérimétrique: *On cherche une courbe entre A et B, $y(A) = y(B) = 0$, de longueur L donnée, de manière que l'intégrale*

$$\int_A^B y^m dx$$

devienne maximale. Il ajoute encore que son frère aura pour la solution correcte 50 pièces d'or "impériales".

Johann, devenu trop sûr de lui, envoie immédiatement sa solution, "trouvée en trois minutes", à Leibniz et au Journal. Comme la solution de Johann est fausse, Jacob fait passer dans le "Journal des Savans" une série de polémiques contre son frère qui paraissent en alternance avec les réponses non moins agressives de ce dernier (cf. citations).

Quelques difficiles que ces Problémes paroissent, je n’ai pas manqué de m’y attacher à l’instant même que je les ai lus: mais voyez avec quel succès; au lieu de trois mois qu’on me donne pour sonder le gué, & au lieu de tout le reste de cette année pour trouver la résolution, je n’ai employé en tout que trois minutes de tems pour tenter, commencer & achever d’approfondir tout le mystere; & bien au delà: Car je donnerai les resolutions mille fois plus generales...

(Johann Bernoulli, 2 déc. 1697)

AVIS Sur les Problémes dont il est parlé dans le Journal des Savans du 2. Décembre 1697. Monsieur BERNOULLI, Professeur à Bâle, Auteur de ces Problémes, prétend que la solution du principal, qui concerne les figures isopérimétres, n'y est pas entiérement conforme à la vérité. C'est pour cela qu'il veut ... s'engager à trois choses ... 1°. A deviner au juste l'Analyse qui a conduit son Frére à la Solution qui se voit dans ce Journal. 2°. ... à y faire voir des paralogismes ... 3°. A donner la véritable solution du Probléme dans toutes ses parties.

(Jacob Bernoulli, 17 fév. 1698)

REPONSE de Monsieur BERNOULLI, Professeur de Groningue, à l'Avis inseré dans le VII. Journal des Savans du 17. Février 1698. Je vois bien par cet Avis de mon Frére, que l'inconnu *Non nemo* n'a guére envie de se rendre à la raison; de peur sans doute d'être obligé de s'aquitter de sa promesse; autrement il accepteroit l'offre que je lui ai faite, de nous en rapporter à la décision de Mr. LEIBNITZ, comme d'un des plus grands Géométres de ce tems; auquel, pour cet effet, j'avois envoyé mes solutions comme en dépôt; & entre les mains de qui on devroit de même remettre le prix, si l'on ne veut passer pour juge & partie tout ensemble. Ou si l'on recule cet habile Mathématicien, qu'on en dise la raison, & qu'on en nomme un autre Car je suis prêt de subir le jugement de tout homme désintéressé, & versé dans ces matiéres. Sans cela, quoiqu'on objecte, je ne répondrai plus à rien, & je mépriserai constamment toutes les chicanes qu'on me fera, & que je prévois déja bien qu'on me veut faire...

(Johann Bernoulli, 21 avril 1698)

AVIS de Mr. BERNOULLI, Professeur des Mathématiques à Bâle, sur la Réponse de son Frére inserée dans le Journal du 21. Avril 1698. Avant que de publier ma Réponse aux solutions de mon Frére, je le prie de repasser tout de nouveau sur sa derniére, d'en examiner attentivement tous les points, & de nous dire ensuite si tout va bien; lui déclarant, qu'après que j'aurai donné la mienne, les prétextes de précipitation ne seront plus écoutés.

(Jacob Bernoulli, 26 mai 1698)

REPONSE de Monsieur BERNOULLI, Professeur de Groningue, à l'Avis inseré dans le Journal du 26. Mai 1698. Je n'ai que faire de repasser sur mes solutions des Problémes de mon Frére: Je sai qu'en penser, & mon temps sera assûrément mieux employé à faire de nouvelles découvertes...

(Johann Bernoulli, 23 juin 1698)

> AVIS SUR LA REPONSE Inserée dans le Journal du 23. Juin dernier 1698. Je n'ai jamais cru que mon Frére possedât la véritable méthode pour le Probléme des isopérimétres; mais maintenant j'en doute plus que jamais, vu la difficulté qu'il fait de repasser sur ses solutions. Car enfin pourquoi nous refuser une chose si-tôt faite, si ce n'est qu'il ne se fie pas lui-même à sa méthode? S'il n'a emploié que trois minutes de temps, comme il le dit, pour tenter, commencer, & achever d'approfondir tout le mystère, il y a apparence que la revuë de ce qu'il a trouvé, ne lui en coûtera pas davantage: d'ailleurs quand il y en mettroit le double, est-ce que six minutes, emploiées à cet examen, diminueroient tant le nombre de ses nouvelles découvertes?...
>
> (Jacob Bernoulli, 1698)

La guerre impitoyable des frères ennemis ne prend fin qu'après la mort de Jacob en 1705. Johann devient alors son successeur à Bâle; excellent pédagogue, il trouve des élèves extraordinaires: ses trois fils et, surtout, Leonhard Euler.

L'équation différentielle d'Euler.

Exemple 1. Le problème de la brachystochnone "reduit à la pure mathematique" devient

$$\int \frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{\sqrt{y}} = \int_a^b \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}\,dx = \text{min!}$$

Exemple 2. La surface de rotation à aire minimale entre deux cercles donnés satisfait

$$2\pi \int y\sqrt{dx^2+dy^2} = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx = \text{min!}$$

Problème général. Donnée une fonction $F(x, y, y')$, chercher $y(x)$ tel que

$$\int_a^b F(x, y, y')\,dx = \text{min!} \qquad y(a) = A, \;\; y(b) = B.$$

Euler, en 1744, révolutionne le Calcul variationnel (*Opera Omnia* vol. XXIV, “... eines der schönsten mathematischen Werke, die je geschrieben worden sind" (C. Carathéodory)) en trouvant pour le problème variationnel général l’équation différentielle

$$\frac{d}{dx}(F_{y'}) - F_y \equiv F_{y'y'}\,y'' + F_{y'y}\,y' + F_{y'x} - F_y = 0\,.$$

C’est la célèbre équation différentielle d’Euler pour le problème variationnel.
Au cas où F est indépendant de x, cette équation peut encore être simplifiée en

$$y'F_{y'} - F = C \qquad (C \text{ const.})$$

comme on le vérifie facilement en dérivant cette formule par rapport à x.

Exemple. Surface de rotation minimale :

$$F(x,y,y') = y \cdot \sqrt{1+y'^2}\,, \qquad F_{y'} = \frac{y \cdot y'}{\sqrt{1+y'^2}}$$

et nous devons résoudre

$$\frac{y(1+y'^2) - yy'^2}{\sqrt{1+y'^2}} = C \quad \Rightarrow \quad \int \frac{C\,dy}{\sqrt{y^2-C^2}} = dx$$

et la substitution $y = C \cdot \cosh u$ donne

$$y(x) = C \cdot \cosh(\frac{x}{C} + D)\,. \quad \text{avec 2 const. à choix.}$$

Choississons 1ère condition de bord : $y(0) = 1$:

$$\Rightarrow D = \text{arcosh}\,(\frac{1}{C})\,.$$

La preuve de Lagrange.

Le 12 août 1755 un jeune homme franco-italien de 19 ans de nom *Ludovico de la Grange Tournier* écrit un lettre à *Vir amplissime atque celeberrime* L. Euler avec une idée géniale : démontrer l'équation différentielle d'Euler simplément par une variation de la solution $y(x)$, i.e., on remplace $y(x)$ par

$$y(x) + \delta y(x) = y(x) + \varepsilon h(x) \qquad h(a) = h(b) = 0\,.$$

Euler, enthousiasmé par l'idée de ce *Vir praestantissime atque excellentissime*, nomme tout le sujet "calcul variationnel" ("... tamen gloria primae inventionis acutissimo Geometrae Taurinensi La Grange erat reservata"). Ainsi, la dérivée

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \int_a^b F(x, y(x) + \varepsilon h(x), y'(x) + \varepsilon h'(x))\, dx$$

doit s'annuler pour $\varepsilon = 0$! Faisons le calcul :

Nous dérivons sous l'intégrale par rapport à ε (Analyse I, Théorème IV.3.11) et posons $\varepsilon = 0$:

$$\int_a^b \left(F_y(x, y(x), y'(x)) \cdot h(x) + F_{y'}(x, y(x), y'(x)) \cdot h'(x)\right) \, dx = 0$$

Ici, nous faisons une intégration par parties et utilisons $h(a) = h(b) = 0$. Ainsi, $h'(x) \mapsto h(x)$ et devient facteur commun :

$$\int_a^b \left(F_y(x, y(x), y'(x)) - \frac{d}{dx} F_{y'}(x, y(x), y'(x)) \right) \cdot h(x) \, dx = 0 \, .$$

Cette intégrale doit être nulle **quelque soit** $h(x)$!! Un génie de la trempe de Lagrange voit alors que nécessairement le facteur bleu doit être nul entièrement, i.e., l'équation d' Euler doit être satisfaite. Un génie de la trempe d'Euler, dans sa lettre du 6 sept. 1755, exige, par contre, une preuve rigoureuse...

Importance du calcul variationnel:

- Mécanique de Lagrange (1788), Hamilton (1835), Jacobi (1842);
- Lignes géodésiques; Géométrie de Riemann (1854);
- Principe de Dirichlet, Existence pour EDPs. (Lax-Milgram)
- Calcul scientifique moderne (méth. éléments finis.)