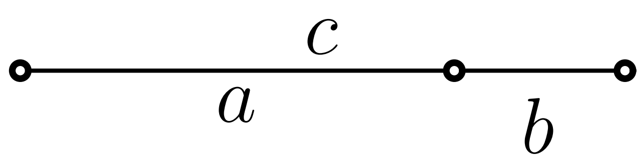
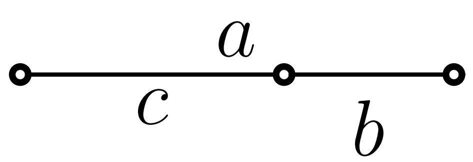
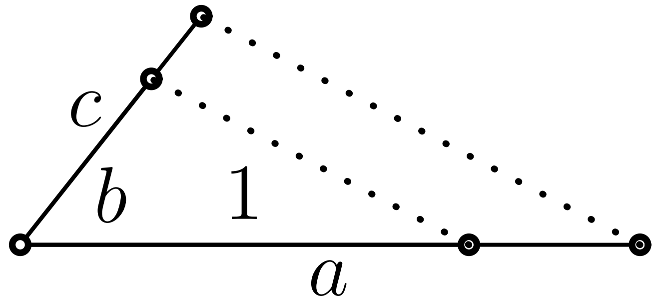
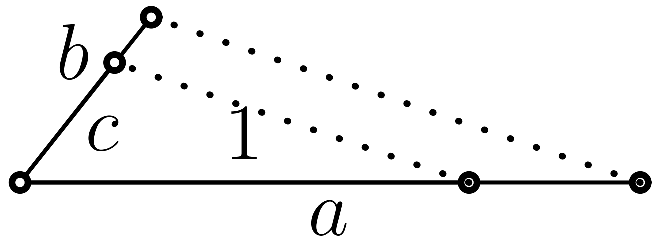
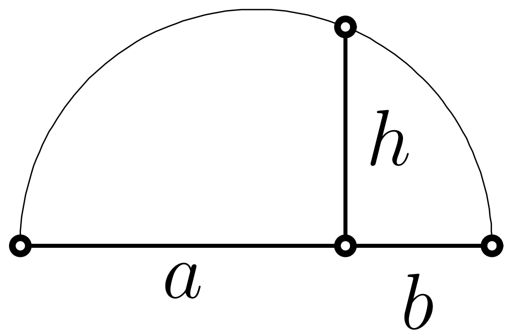
Géométrie analytique

. .. affin de faire voir qu'on peut construire tous les Problesmes de la Geometrie ordinaire, sans faire autre chose que le peu qui est compris dans les quatre figures que i'ay expliquées. Ce que ie ne croy que les anciens ayent remarqué, car autrement ils n'eussent pas pris la peine d'en escrire tant de gros liures, ou le seul ordre de leurs propositions nous fait connoistre qu'ils n'ont point eu la vraye methode pour les trouuer toutes, mais qu'ils ont seulement ramassé celles qu'ils ont rencontrées.

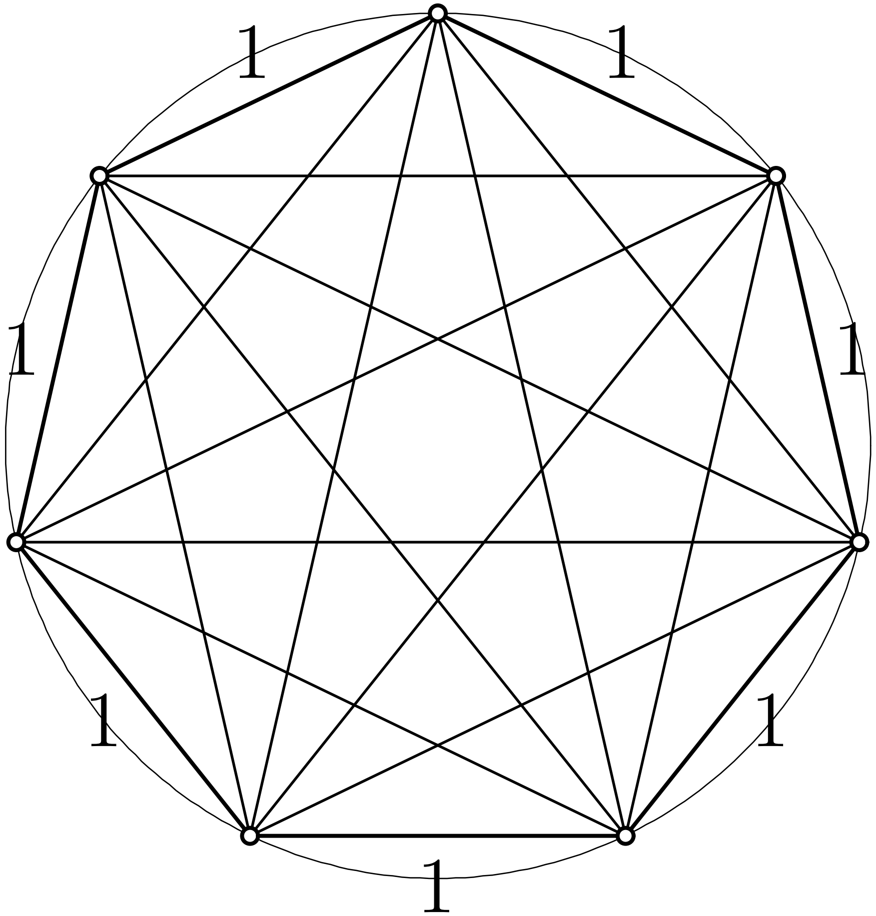
(R. Descartes, *La Geometrie*, 1637, p. 304)

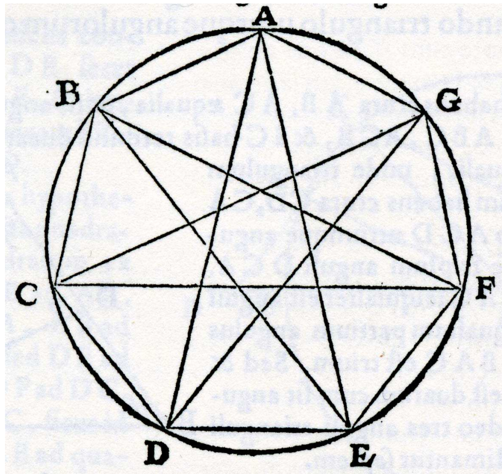
... en cherchant une question de géométrie ... je ne considère point d'autres théorèmes, sinon que le côtés des triangles semblables ont semblable proportion entre eux, et que dans les triangles rectangles le carré de la base est égal aux deux carrés des côtés ;

(Descartes, *Lettre à Mme La princesse Élisabeth*, 1643)

<table>
<tr><th>Geometrie</th><th>Algebra</th></tr>
<tr><td>
</td><td>somme $\quad c = a + b$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>différence $\quad c = a - b$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>produit $\quad c = a \cdot b$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>quotient $\quad c = \dfrac{b}{a}$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>racine $\quad h = \sqrt{a \cdot b}$ $\quad$ (Eucl. II.14)</td></tr>
</table>

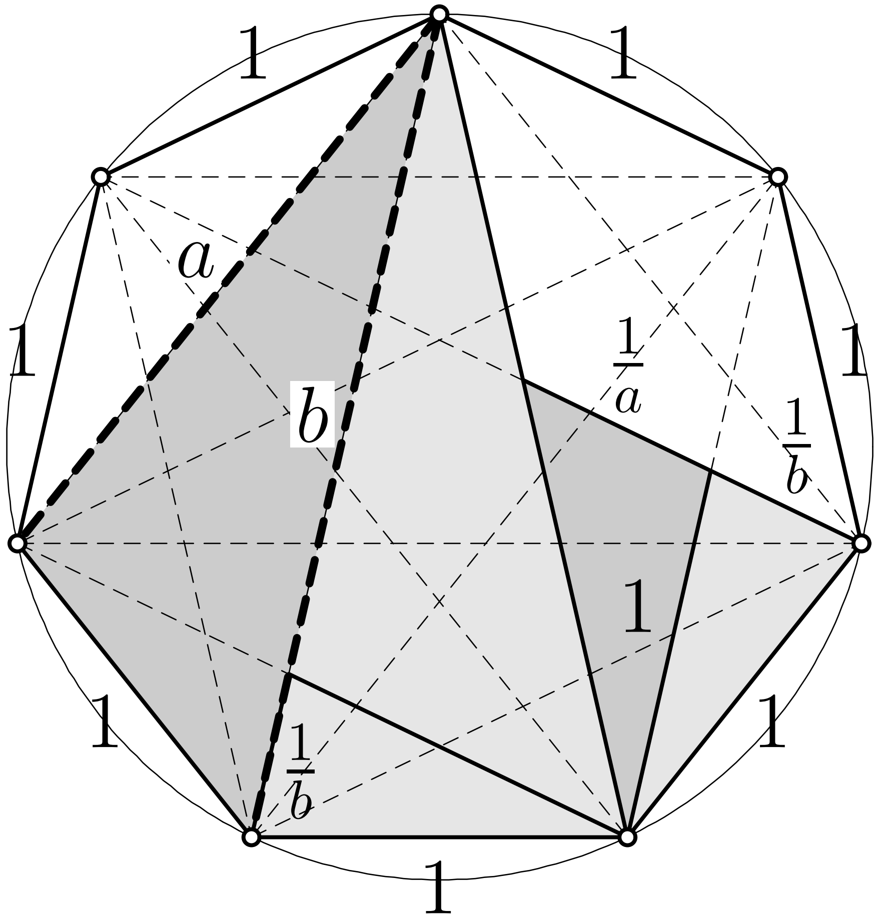
L’heptagone régulier. (Viète 1593)

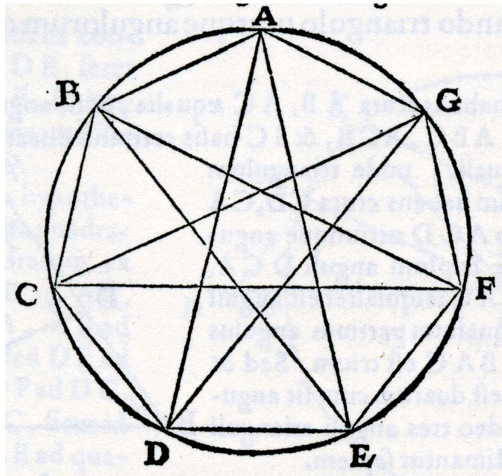


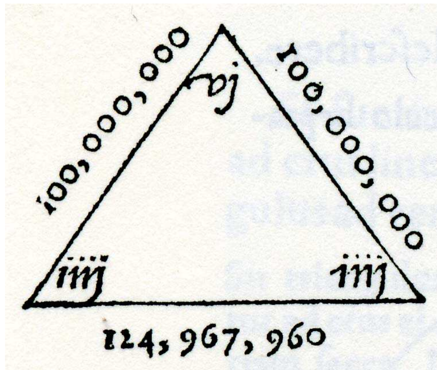


??

L’heptagone régulier. (Viète 1593)







1 C + 1 Q — 2 N, æquatur 1.

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1 \qquad \text{et} \qquad b-\frac{1}{b}=a\,.$$

Algèbre:

$$b^3 - 2b^2 - b + 1 = 0\,, \qquad \text{and} \qquad a^3 - a^2 - 2a + 1 = 0\,,$$

équations de degré 3.

$$b = \tfrac{2}{3} + \tfrac{2\sqrt{7}}{3}\sin(\tfrac{1}{3}\arcsin(\tfrac{\sqrt{7}}{14})) = 2.246979603717467\ldots$$

$$a = \tfrac{1}{3} + \tfrac{2\sqrt{7}}{3}\sin(\tfrac{1}{3}\arcsin(-\tfrac{\sqrt{7}}{14})) = 1.801937735804838\ldots$$

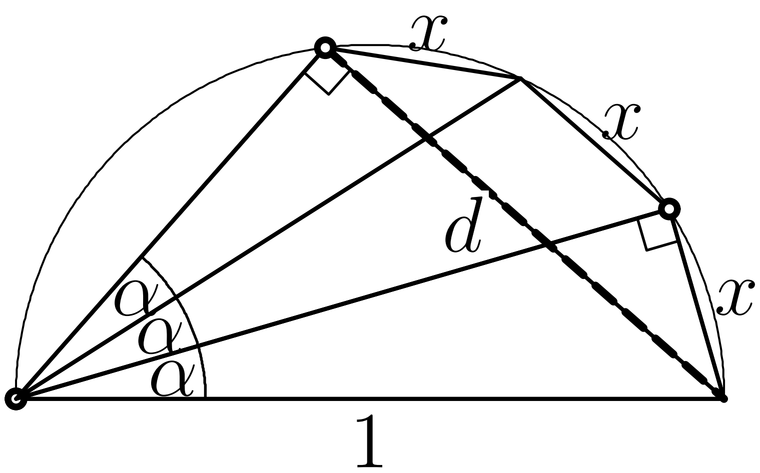
1 C + 1 Q — 2 N, *æquatur* 1.

est l'équation pour $b-1$ dans la notation de Viète.

Trisection d'un Angle et équations cubiques.

Quid igitur quærit à Geometris ? Datum angulum trifariam secare. Quid ab Analystis ? Datum solidum sub latere & dato coëfficiente plano adfectum, multa cubi, resolvere.

(F. Viète 1595)

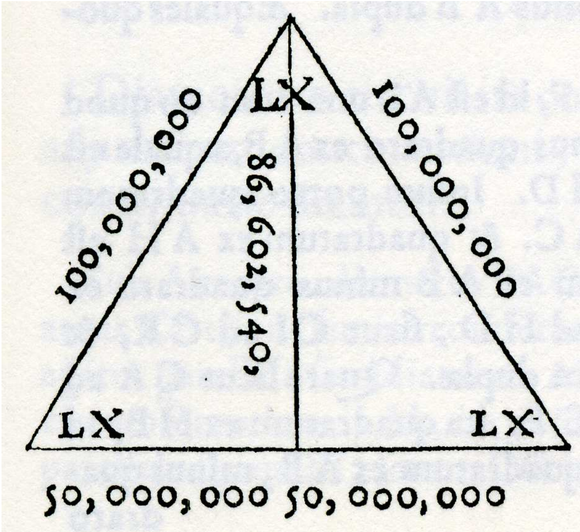


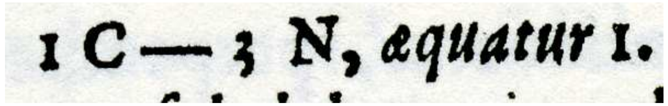
$$\sin 3\alpha = \sin(2\alpha+\alpha) = 3\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$

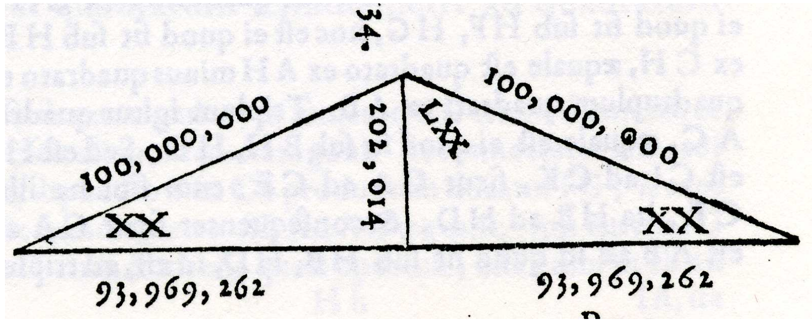
donc

$$\sin^3\alpha - \frac{3}{4}\sin\alpha + \frac{\sin 3\alpha}{4} = 0 \qquad \text{or} \qquad x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{d}{4} = 0\,.$$

Exemple.




1 C — 3 N, *aequatur* 1.



Trisection de l' angle $60°$ par Viète 1593 à l'aide de l'équation $y^3 - 3y = 1$ pour $y = 2\cos 20°$; toutes les décimales correctes.

Résoudre équations cubiques. (Viète 1595)

$$z^3 + az^2 + bz + c = 0 \qquad (z + \tfrac{a}{3} = y)$$

$$y^3 - py + q = 0 \quad \text{où} \quad p = \frac{a^2}{3} - b, \quad q = \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c\,.$$

Posons $y = \mu \sin \alpha$ et $x = \frac{y}{\mu}$ dans $x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{d}{4} = 0$.

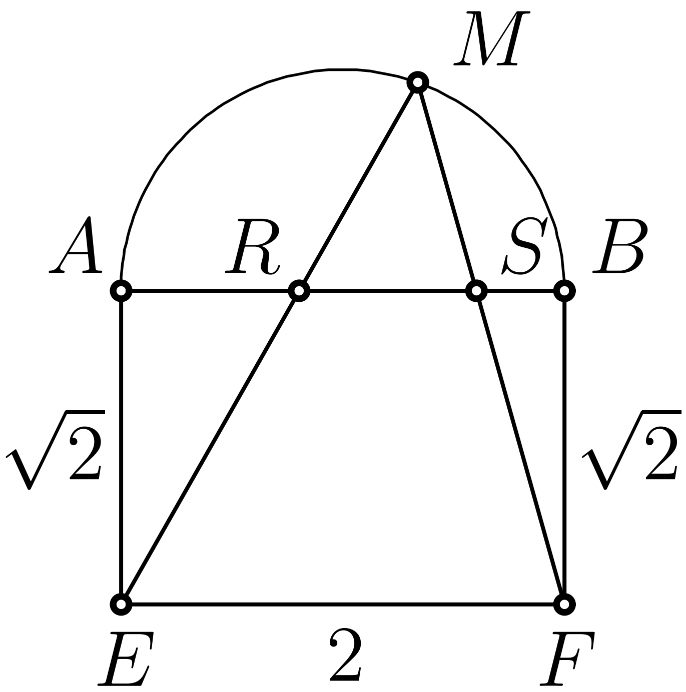
$$p = \frac{3\mu^2}{4} \qquad \text{et} \qquad q = \frac{\mu^3 \sin 3\alpha}{4}\,.$$

$$z = -\frac{a}{3} + 2\sqrt{\frac{p}{3}} \sin\Big(\frac{1}{3}\arcsin\Big(\frac{q}{2}(\frac{3}{p})^{\frac{3}{2}}\Big) + \frac{2k\pi}{3}\Big) \qquad k = 0, 1, 2\,.$$

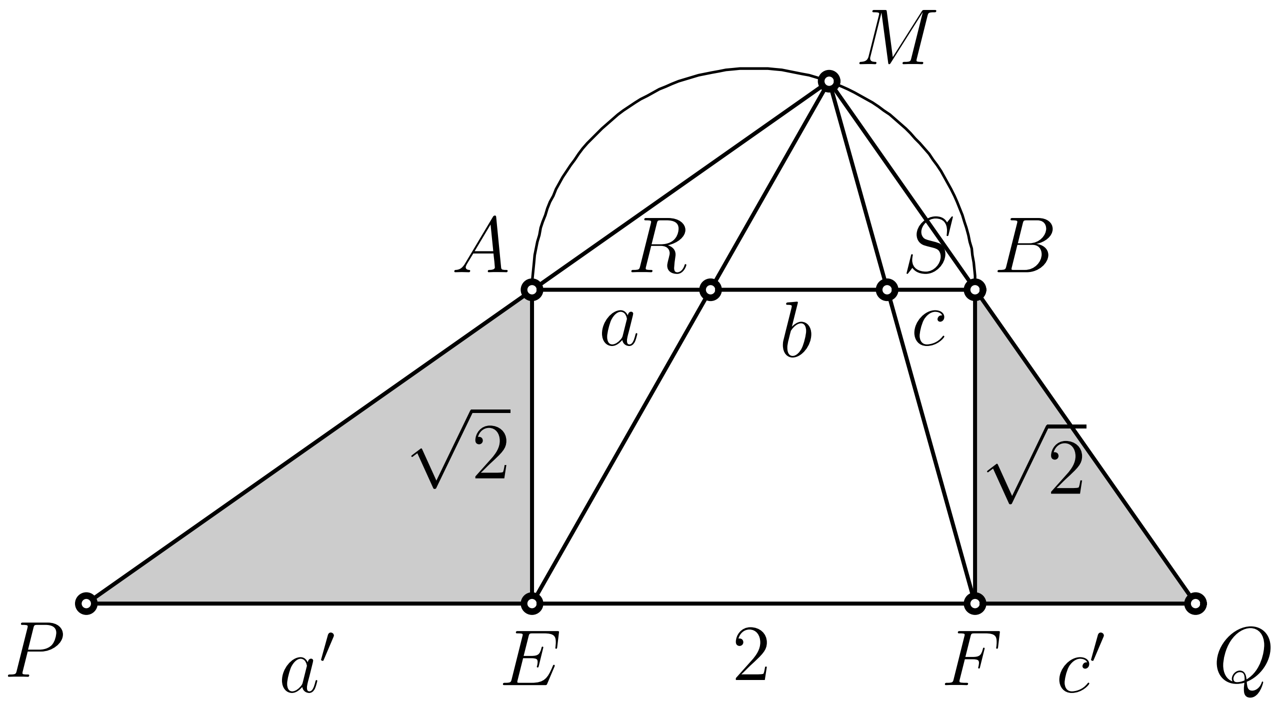
Un théorème de Fermat.

The following theorem was, without proof, part of a letter of Fermat (June 1658) to Digby and addressed to the “Illustrissimos Viros Vicecomitum Brouncker et Johannem Wallisium” in order to demonstrate to these Englishmen (“quae Angliam invisere non erubescent”) his ability, not only in “numeros integros”, but also in “Geometria”.

Théorème:



$$\Rightarrow \qquad AS^2 + RB^2 = AB^2 \ .$$



Preuve:

$$(a+b)^2 + (b+c)^2 = (a+b+c)^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad b^2 = 2ac\ .$$

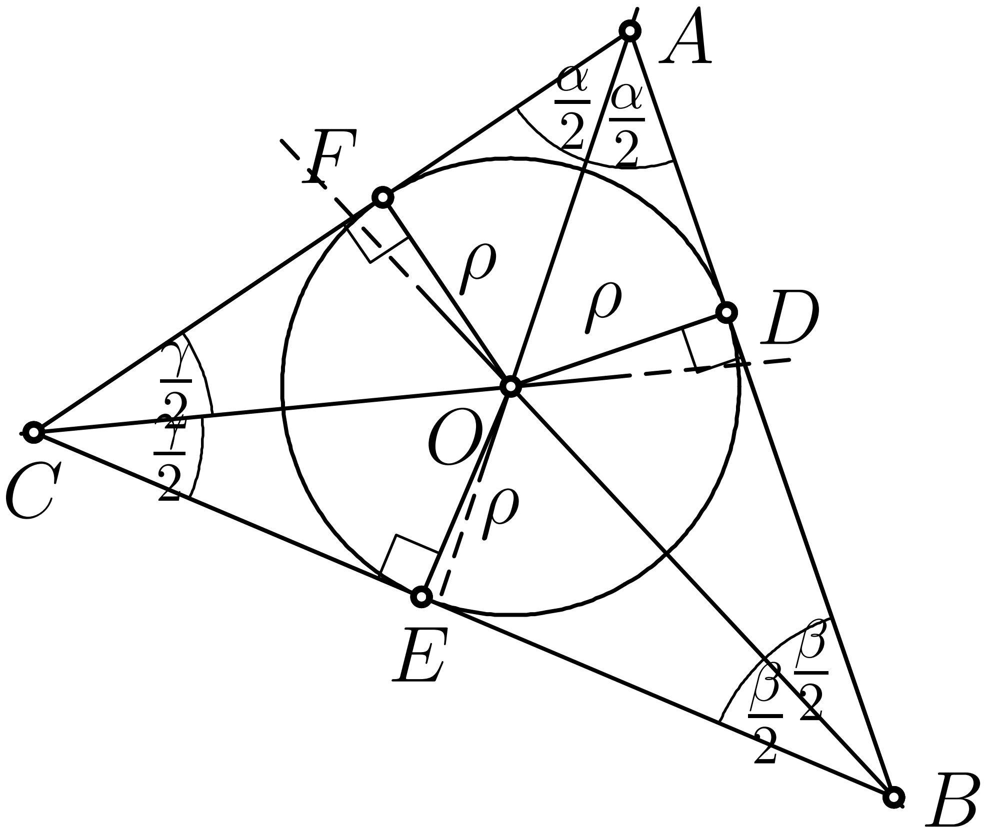
$$\frac{a'}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{c'} \qquad \text{or} \qquad a'c' = 2\ .$$

$$\frac{a}{a'} = \frac{c}{c'} = \frac{b}{2} \qquad \text{or} \qquad ac = \frac{a'c'b^2}{4} = \frac{b^2}{2}.$$

Formule de Héron pour l'aire d'un triangle.

It may perhaps not be inappropriate to give at this point Heron's elegant proof of the formula for the area of a triangle, ... although it ... uses some ungeometrical expressions, e.g. the product of two areas and the "side" of such a product ... The proof is given in the *Metrica*, I.8, and in the *Dioptra*, 30 ...

(Sir Thomas L. Heath, Euclid, vol. II, p. 87)

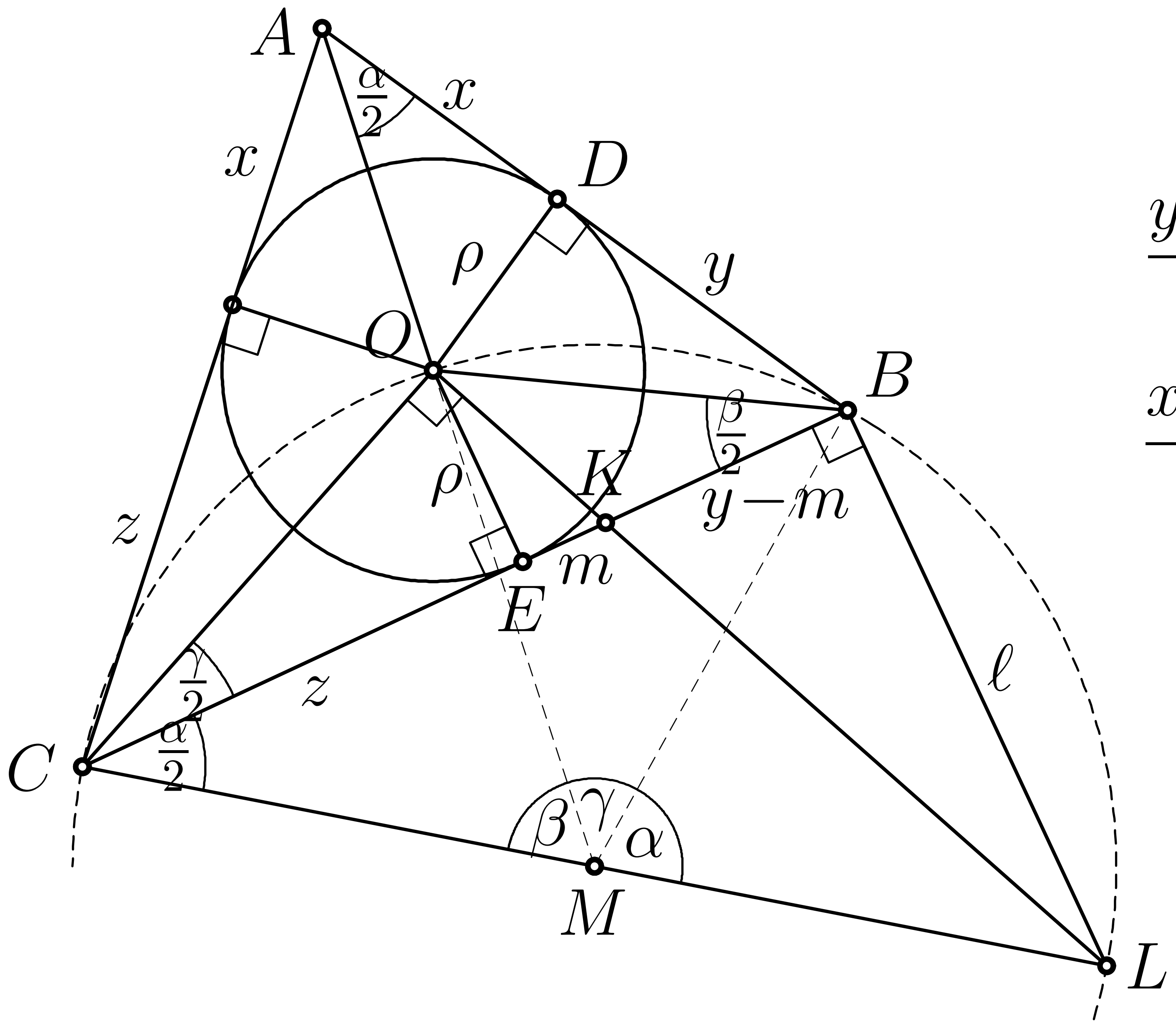


$$\mathcal{A} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

$$\rho = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}\,.$$

Preuve:



$$\frac{y+z}{x} = \frac{\ell}{\rho} = \frac{y-m}{m}\,,$$

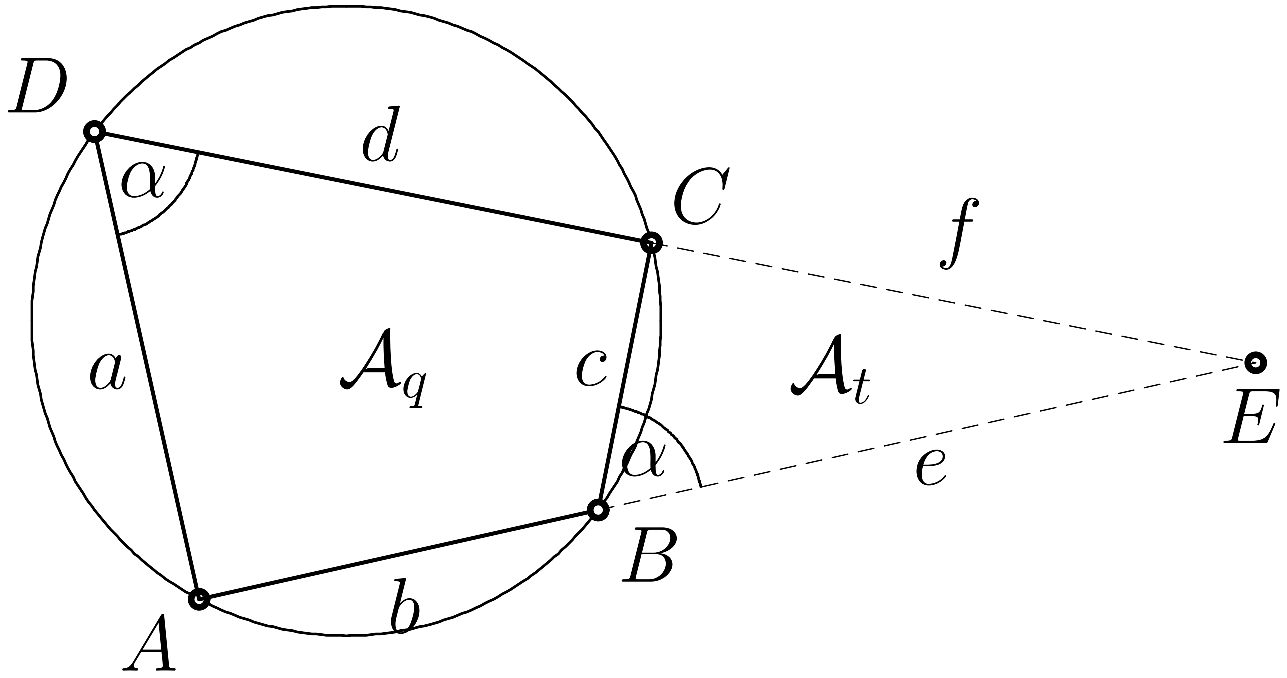
$$\frac{x+y+z}{x} = \frac{s}{x} = \frac{y}{m}\,,$$

$$m = \frac{xy}{s}$$

$$\rho^2 = zm = \frac{xyz}{s}\,,$$

Euler-Bramagupta Formule pour quadrilatero circulo incripti.

$$\mathcal{A}_q = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)} \quad \text{où} \quad s = \frac{a+b+c+d}{2}$$



Preuve:

$$\mathcal{A}_q = \mathcal{A}_t \cdot (\frac{a^2}{c^2} - 1) = \mathcal{A}_t \cdot (\frac{a^2 - c^2}{c^2}) = \mathcal{A}_t \cdot (\frac{a-c}{c})(\frac{a+c}{c})$$

$$\frac{e}{c} = \frac{f+d}{a}\,, \qquad \frac{f}{c} = \frac{e+b}{a}$$

$$(e+f)\,(\frac{1}{c} - \frac{1}{a}) = \frac{b+d}{a} \qquad \text{or} \qquad \frac{e+f}{c} = \frac{d+b}{a-c}$$

$$(f-e)\,(\frac{1}{c} + \frac{1}{a}) = \frac{b-d}{a} \qquad \text{or} \qquad \frac{f-e}{c} = \frac{b-d}{a+c}\,.$$

$$\frac{a-c}{c}(e+f+c)\cdot\frac{a-c}{c}(e+f-c)\cdot\frac{a+c}{c}(c+f-e)\cdot\frac{a+c}{c}(c-f+e)$$

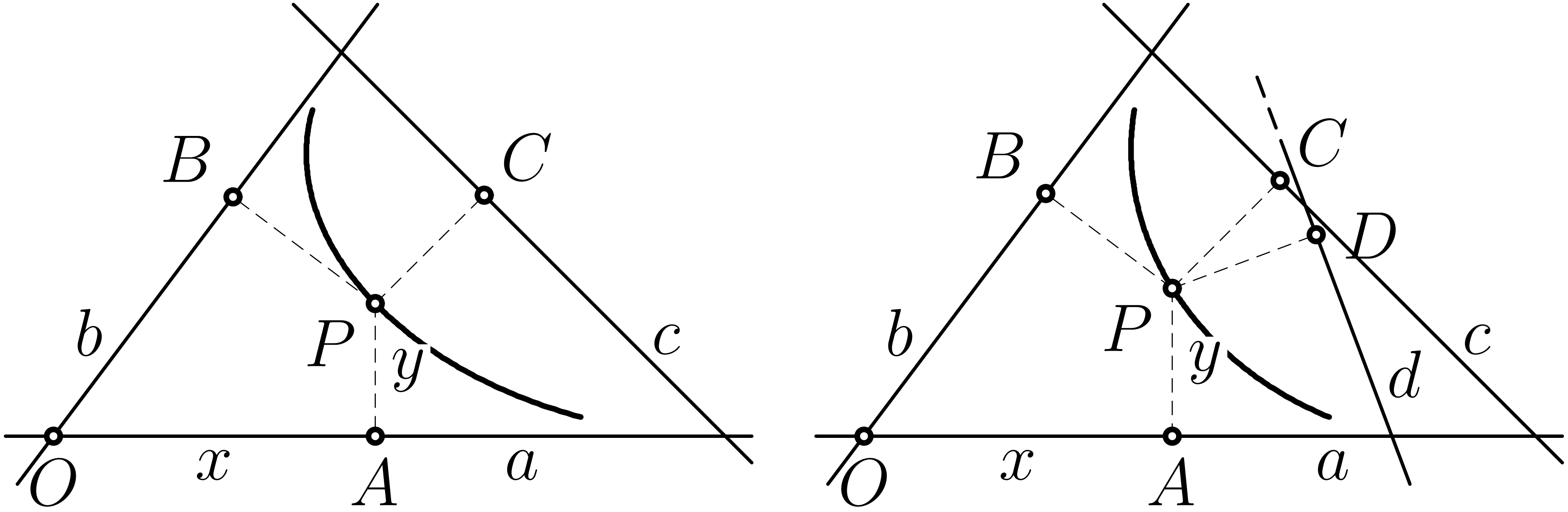
$$= (a-c)(\frac{e+f}{c}+1)\cdot(a-c)(\frac{e+f}{c}-1)\cdot(a+c)(1+\frac{f-e}{c})\cdot(a+c)$$

$$16\mathcal{A}_q^2 = (d+b+a-c)(d+b-a+c)(a+c+b-d)(a+c+d-b)$$

Descartes et le problème de Pappus.

> C’est à l’aide de ce secret que Descartes, à l’âge de vingt ans, parcourant l’Europe dans le simple appareil d’un jeune soldat volontaire, résolvait d’un coup d’œil, et comme en se jouant, tous les problèmes géométriques que les mathématiciens de divers pays s’envoyaient mutuellement ...
>
> (J.-B. Biot, *Essai de Géométrie analytique*, 1823, p. 75)

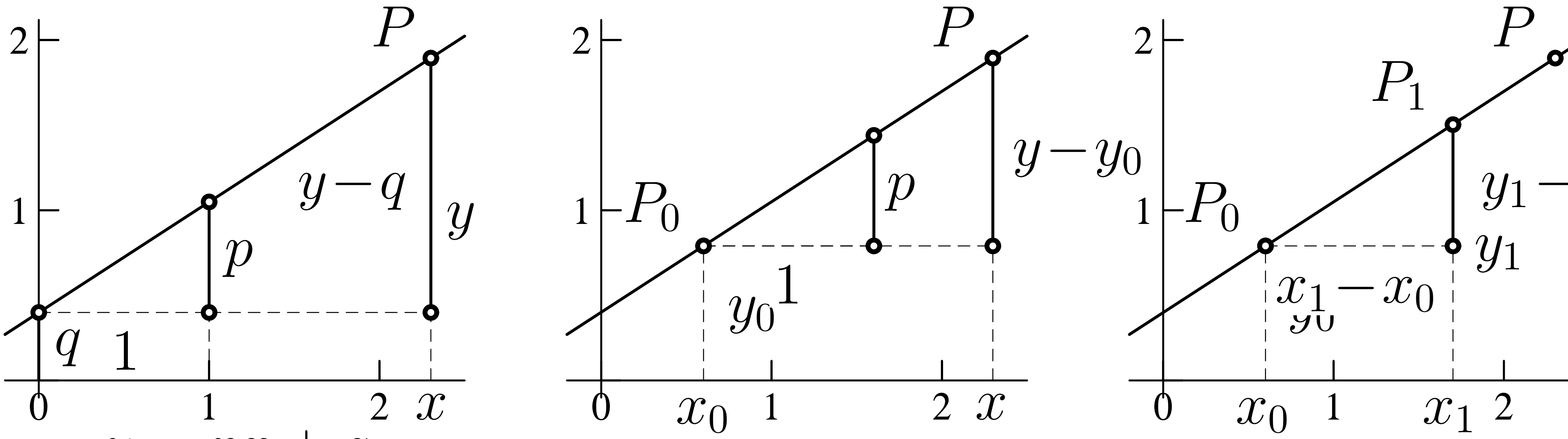
Voici **LE** problème historique, qui a absorbé Descartes pendant 5 à 6 semaines ; il est à l’origine de **SA** géométrie : “La question donc qui auoit esté commencée a resoudre par Euclide, & poursuiuie par Apollonius, sans auoir esté acheuée par personne, estoit telle” (Descartes, p. 306) :



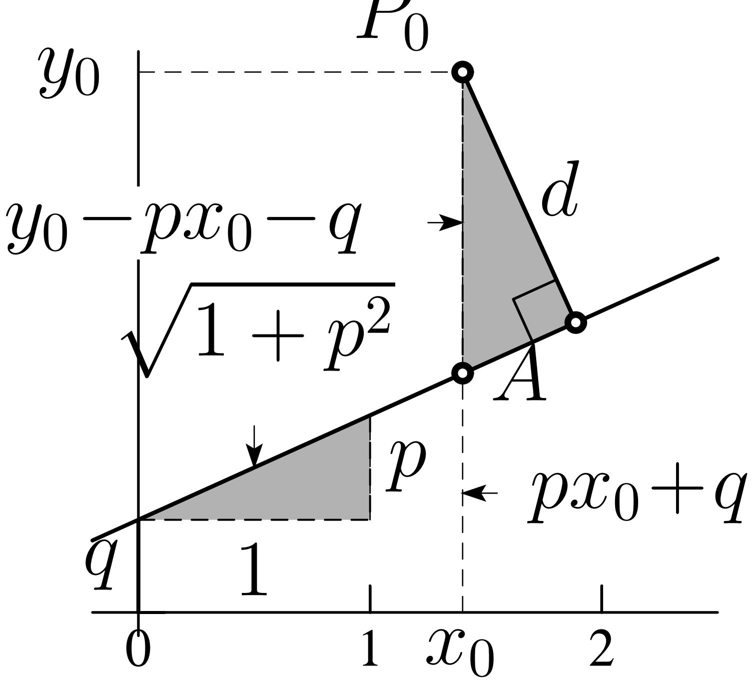
$$PA \cdot PB = PC^2 \quad \text{resp.} \quad PA \cdot PB = PC \cdot PD\ ,$$

Pappus prétend que pour le cas de trois ou quatre droites, la courbe “est unam ex tribus conicis sectionibus” ; par contre, pour plus de quatre lignes, les courbes seraient “non adhuc cognitos”.

Solution. Descartes propose de fixer le point P par $x = OA$, et ensuite par $y = AP$ (“Que le segment de la ligne AB, qui est entre les points A & B, soit nommé x. & que BC soit nommé y”). Ainsi sont nées les *coordonnées cartésiennes*.



$$y = px + q \qquad y = y_0 + p(x - x_0) \qquad y = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x$$



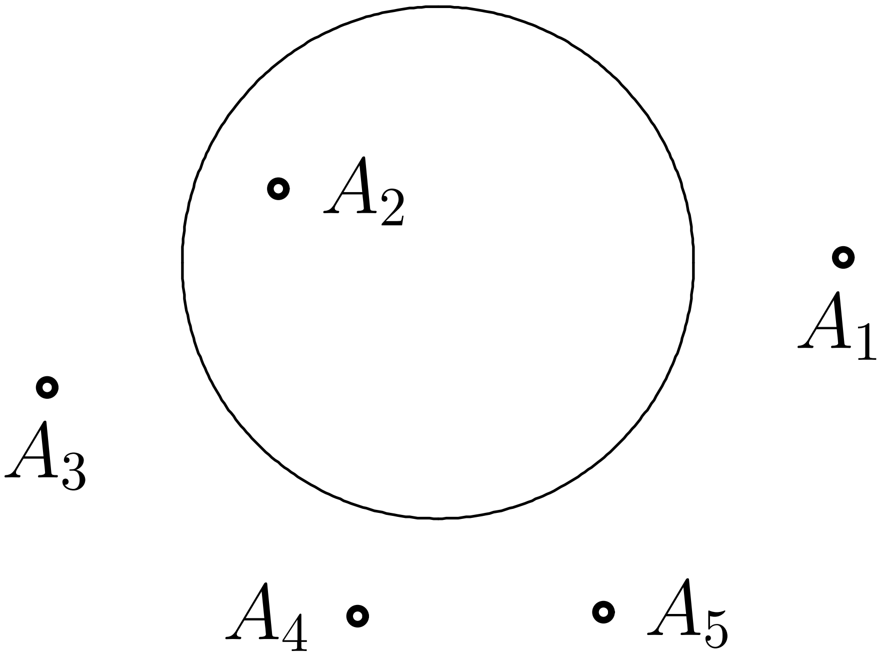
On calcule P_0A ;

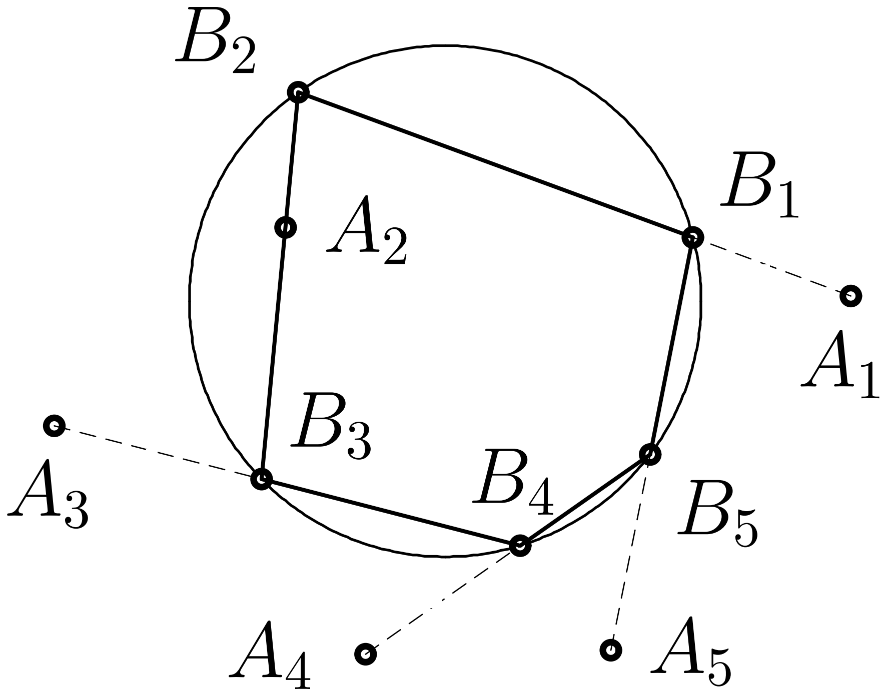
triangles grises sont semblables

Thalès : $\quad d = \dfrac{|px_0 + q - y_0|}{\sqrt{1+p^2}}$.

$$\Rightarrow ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0 \quad \text{(conique).}$$

Le Problème de Pappus–Cramer–Castillon.





Problem. Gegeben n Punkte $A_1, A_2, \ldots, A_n$ und ein Kreis. Gesucht eingeschriebenes n Polygon $B_1, B_2, \ldots, B_n$ sodass (B_iB_{i+1}) durch A_i geht.

“Dans ma jeunesse ... un vieux Géometre, pour essayer mes forces en ce genre, me proposa le Problème que je vous proposai, tentez de le résoudre et vous verrez, combien il est difficile.”

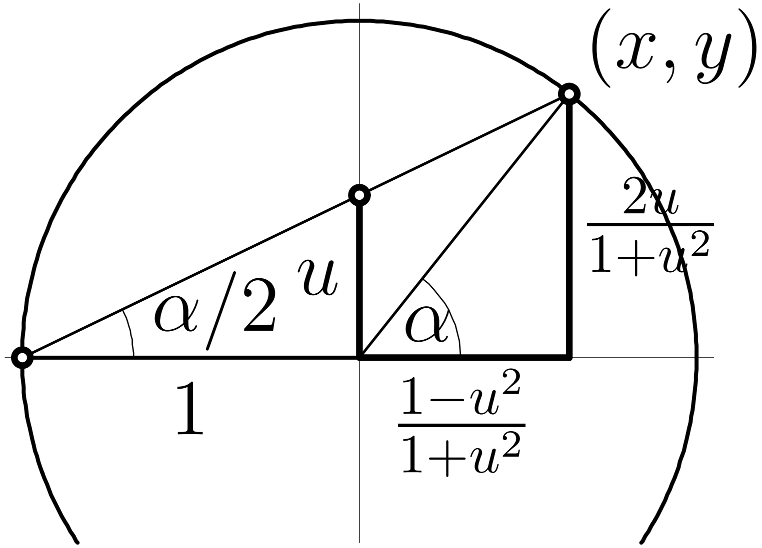
(G. Cramer in 1742 ; quoted in Euler’s *Opera*, vol. 26)

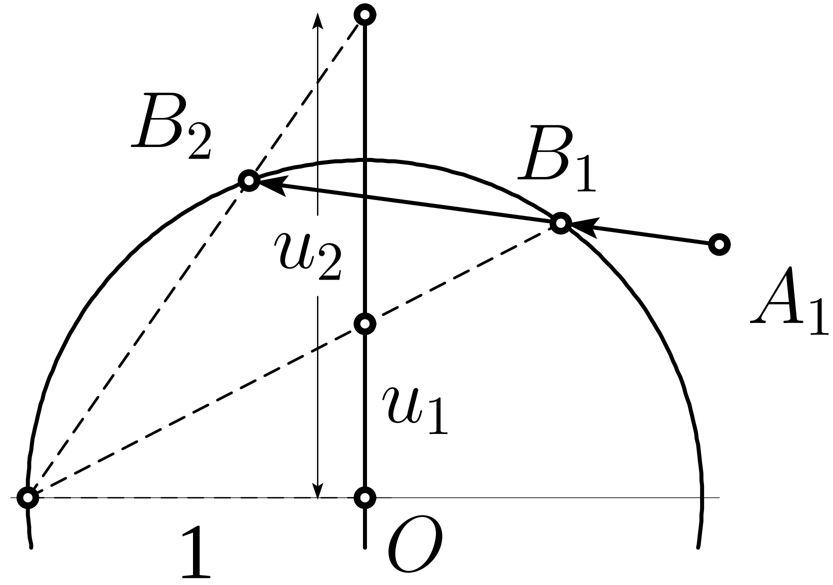
“Ce problème passe pour difficile, et il a fixé l’attention de plusieurs grands géomètres.”

(L. Carnot, *Géométrie de Position*, 1803, p. 383)

“Le lendemain du jour dans lequel je lus à l’Académie ma solution du Problème concernant le cercle et le triangle à inscrire dans ce cercle, en sorte que chaque côté passe par un de trois points donnés, M. de la Grange m’en envoya la solution algébrique suivante.”

(Castillon 1776 ; see *Oeuvres de Lagrange*, vol. 4, p. 335)



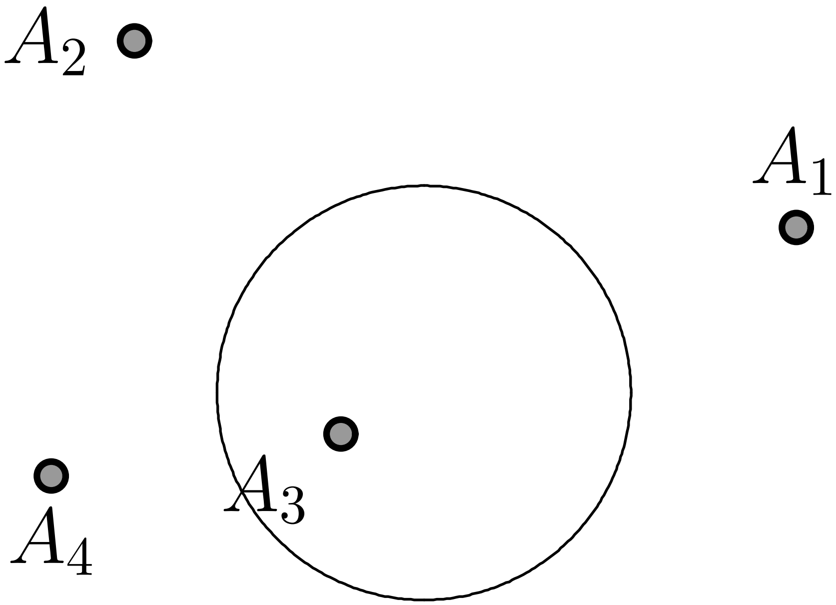


Analyt. Lösung (Lagrange 1776, Carnot 1803, Gauss 1810) : Pythagoreische Koordinaten auf dem Kreis: Dann ist die Projektion $B_1 \mapsto B_2$ durch A_1 eine *Möbius Transformation* :

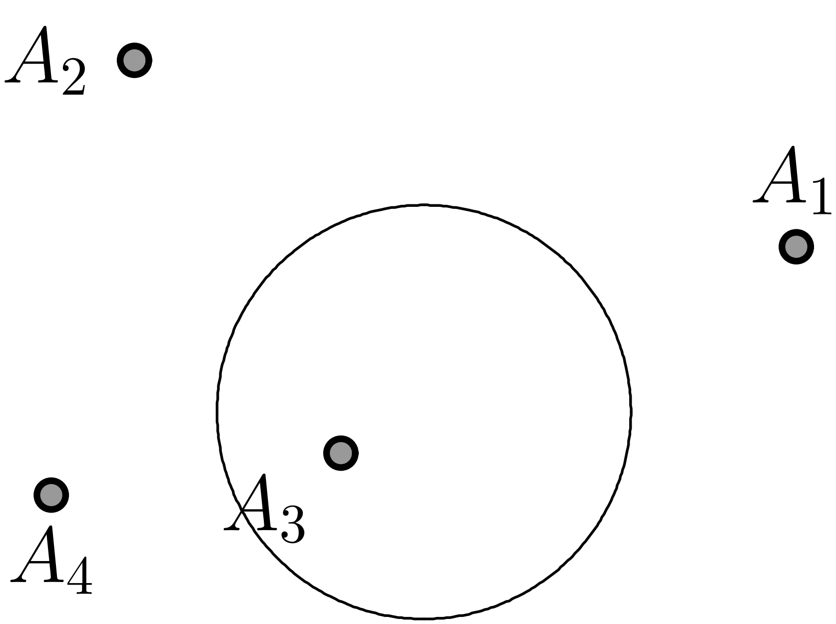
$$u_2 = \frac{-b_1 u_1 + 1 - a_1}{-(a_1+1)u_1 + b_1} \qquad \begin{pmatrix} u_2 \\ 1 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} -b_1 & 1-a_1 \\ -a_1-1 & b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

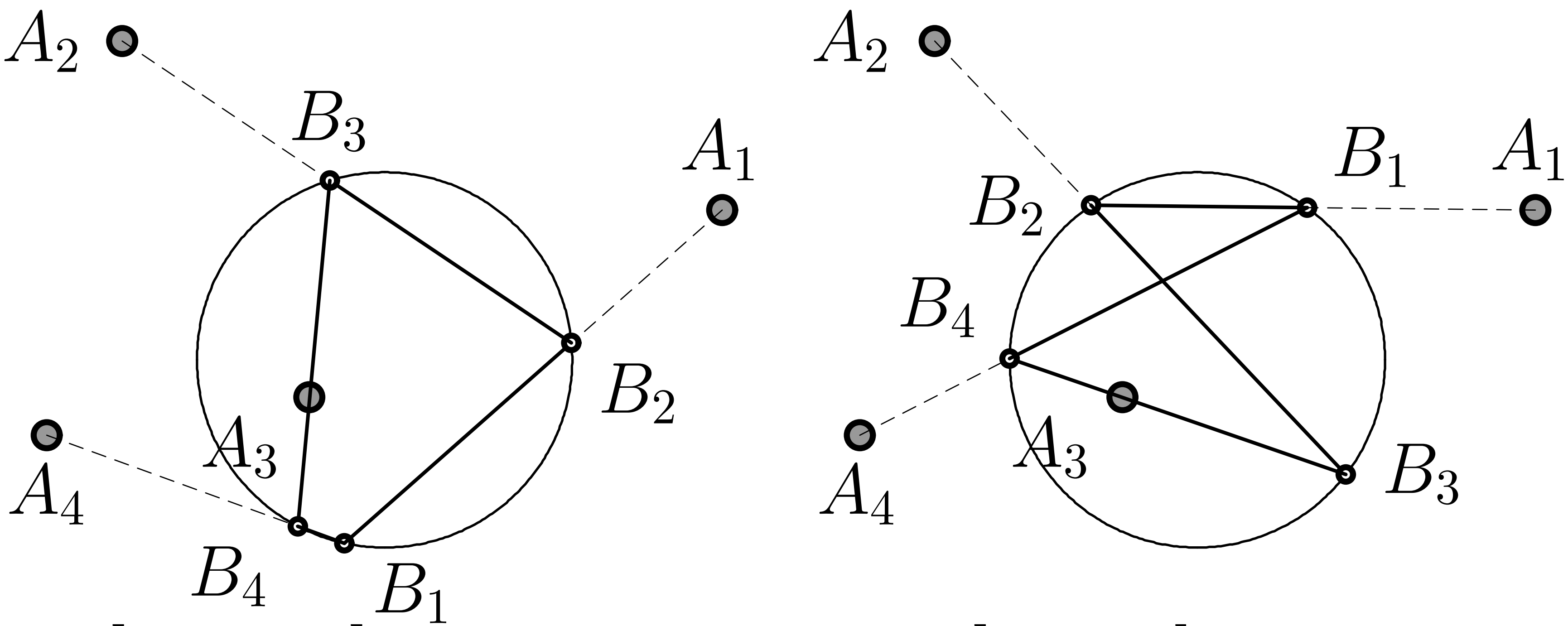
Zusammen $B_1 \mapsto B_2 \mapsto B_3 \mapsto \ldots \quad \Rightarrow \quad$ Matrizenprodukte ;
Bedingung $B_{n+1} = B_1 \quad \Rightarrow \quad$ quadratische Gleichung.

Exemple :



Exemple :





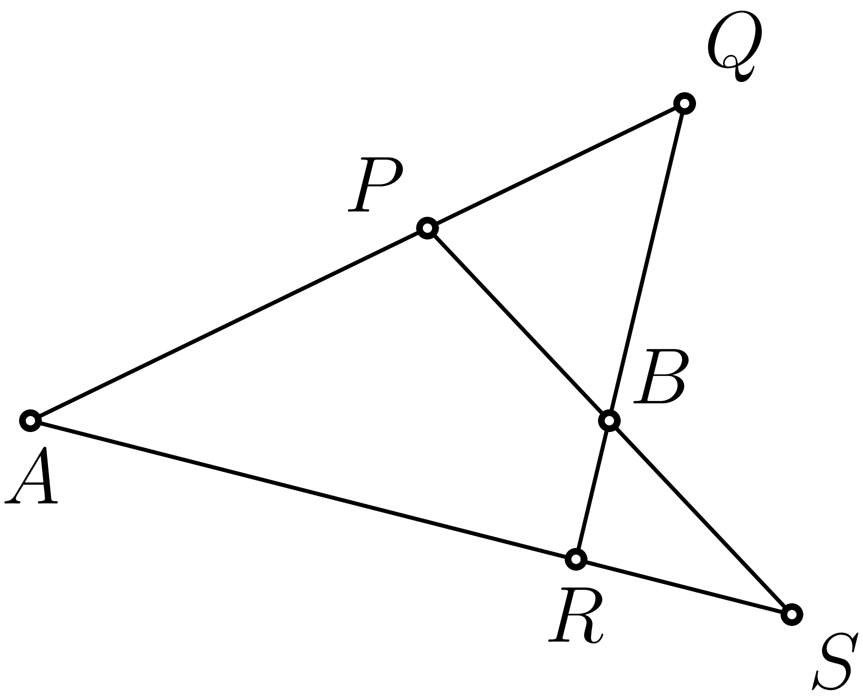
Also in der Regel zwei Lösungen ... oder gar keine.

Urquhart's 'Most Elementary Theorem of Euclidean Geometry'.

"Urquhart considered this to be the 'most elementary theorem', since it involves only the concepts of straight line and distance. The proof of this theorem by purely geometrical methods is not elementary."

(D. Elliot ; *J. Australian Math. Soc.* 1968, p. 129)

Theorem.



$$AP + PB = BR + RA$$

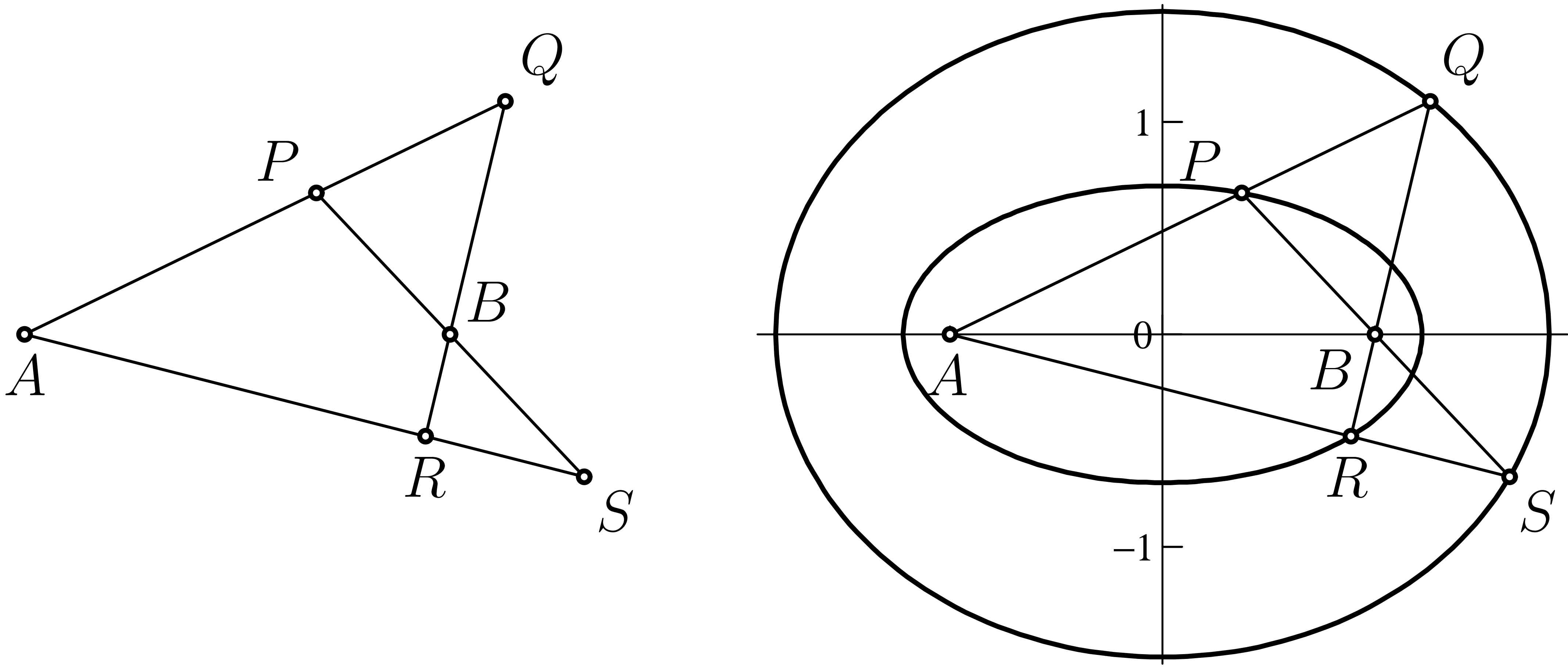
$$\Rightarrow \quad AQ + QB = BS + SA\,.$$

Urquhart's 'Most Elementary Theorem of Euclidean Geometry'.

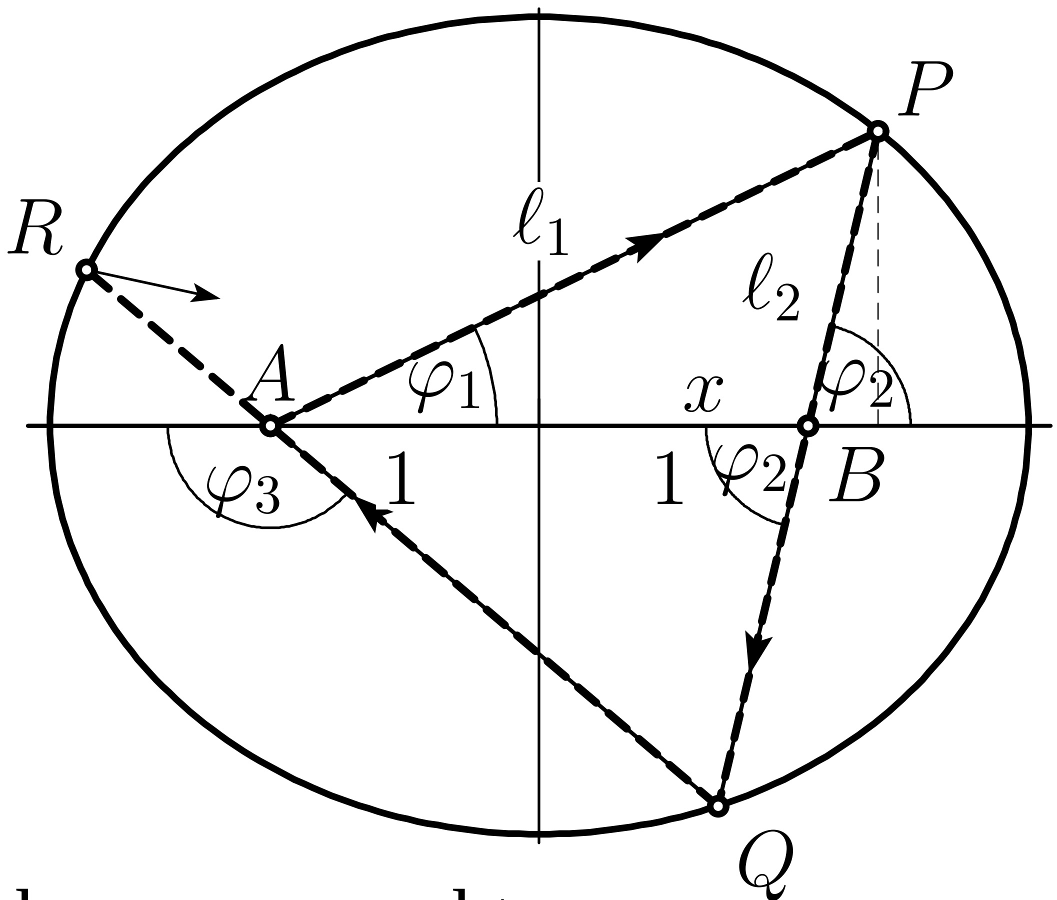
"Urquhart considered this to be the 'most elementary theorem', since it involves only the concepts of straight line and distance. The proof of this theorem by purely geometrical methods is not elementary."

(D. Elliot ; *J. Australian Math. Soc.* 1968, p. 129)

Theorem.



Preuve : Billiard dans une Ellipse.

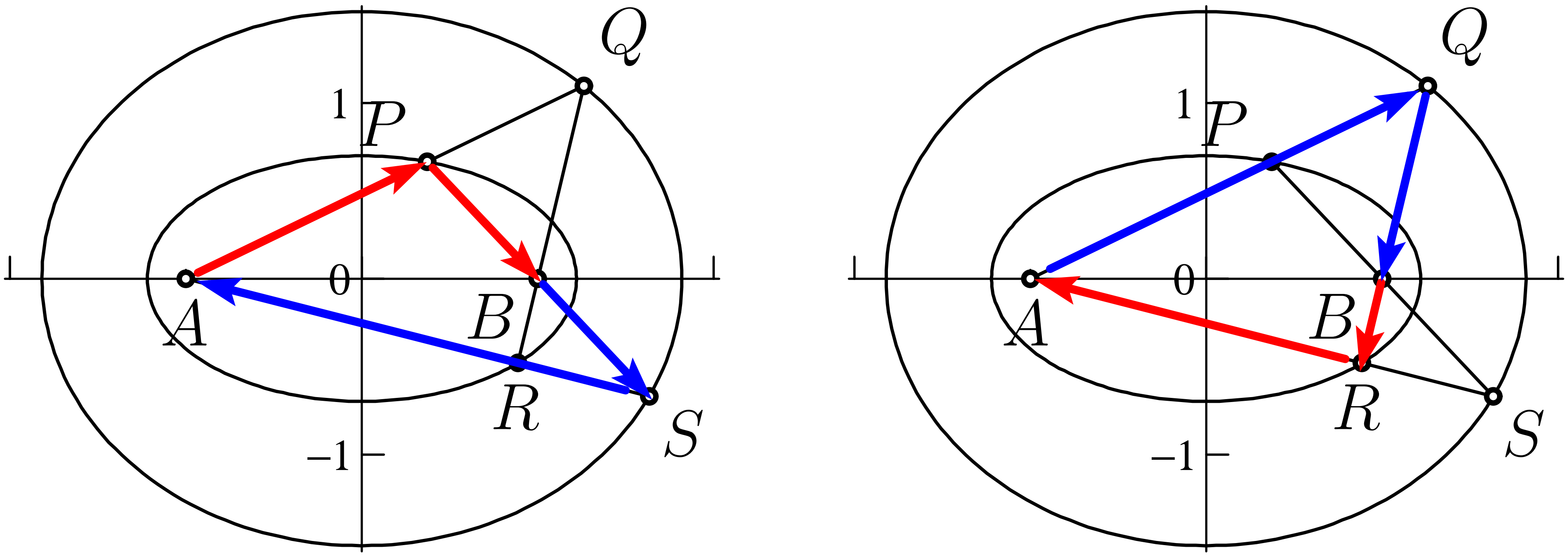


Problem. Gegeben φ_1, gesucht φ_2, φ_3, $\ldots$

Lösung. Mit $c_i = \cos\varphi_i$ gilt

$$c_2 = \frac{c_1 - \theta}{-\theta\ c_1 + 1} \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -\theta \\ -\theta & 1 \end{pmatrix}, \quad \theta = \frac{2e}{e^2 + 1}$$

La ‘most elementary’ preuve du thm. d’Urquhart :



$$\begin{pmatrix} 1 & -\psi \\ -\psi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\theta \\ -\theta & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\theta \\ -\theta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\psi \\ -\psi & 1 \end{pmatrix}$$

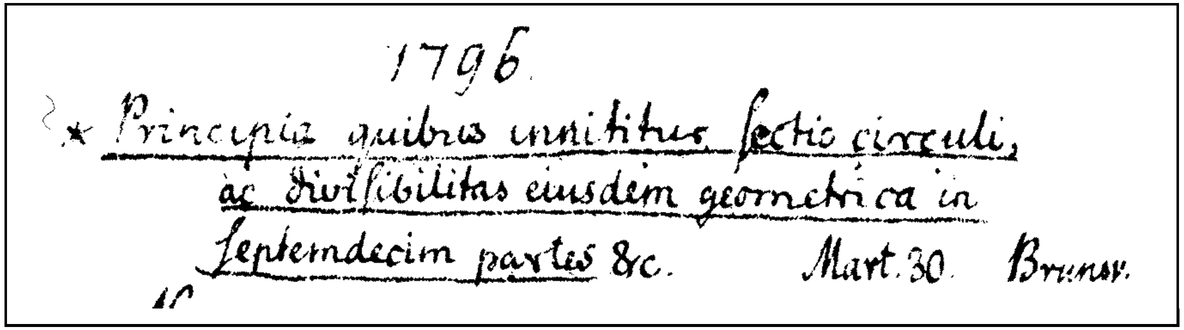
les matrices commutent

$\Rightarrow$ les deux chemins arrivent sous le même angle.

Kap. II.2. Constr. avec règle et compas (Gauss)

Magnopere sane est mirandum, quod, quum iam Euclidis temporibus circuli divisibilitas geometrica in tres et quinque partes nota fuerit, nihil his inventis intervallo 2000 annorum adiectum sit, ...

(C.F. Gauss, *Disquisitiones Arithmeticae*, 1801, Art. 365)



1796.

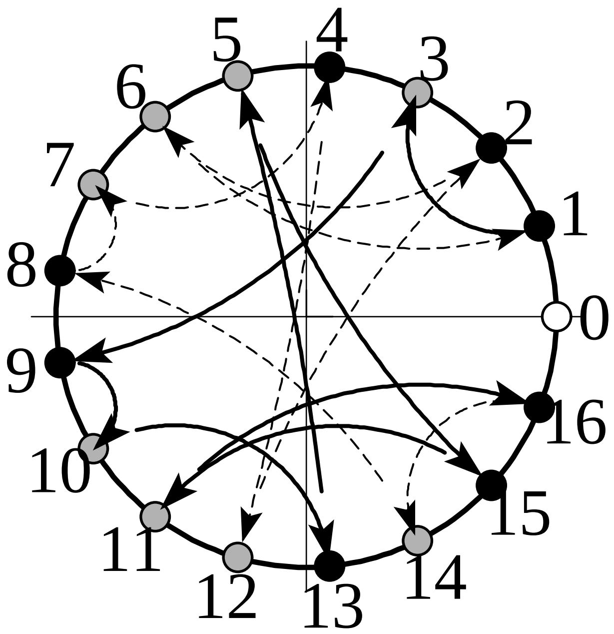
★ Principia quibus innititur sectio circuli, ac divisibilitas eiusdem geometrica in septemdecim partes &c. Mart. 30. Brunsv.

1.	Jan.	1801	⚳ entdeckt
19.	Febr.	1803	⚴ wiedergefunden
28.	März	1802	⚴ entdeckt
30.	März	1796	Construction des 17 Ecks
30.	April	1777	∗
7.	Dec.	1801	⚳ wiedergefunden

Es bedeutet hier ⚳ Ceres, ⚴ Pallas.

Fac-similé der ersten Eintragung des “Notizenjournals” von Gauss, 30. März 1796 in Braunschweig.

Regelmässiges 17-Eck :



Potenzen von 3 modulo 17 :

$$1 \to 3 \to 9 \to 10 \to 13 \to 5 \to 15 \to 11 \to 16 \to 14 \to 8 \to 7 \to 4 \to 12 \to 2 \to 6 \to 1$$

$$\eta_1 := \epsilon^1 + \epsilon^9 + \epsilon^{13} + \epsilon^{15} + \epsilon^{16} + \epsilon^8 + \epsilon^4 + \epsilon^2$$

$$\eta_2 := \epsilon^3 + \epsilon^{10} + \epsilon^5 + \epsilon^{11} + \epsilon^{14} + \epsilon^7 + \epsilon^{12} + \epsilon^6$$

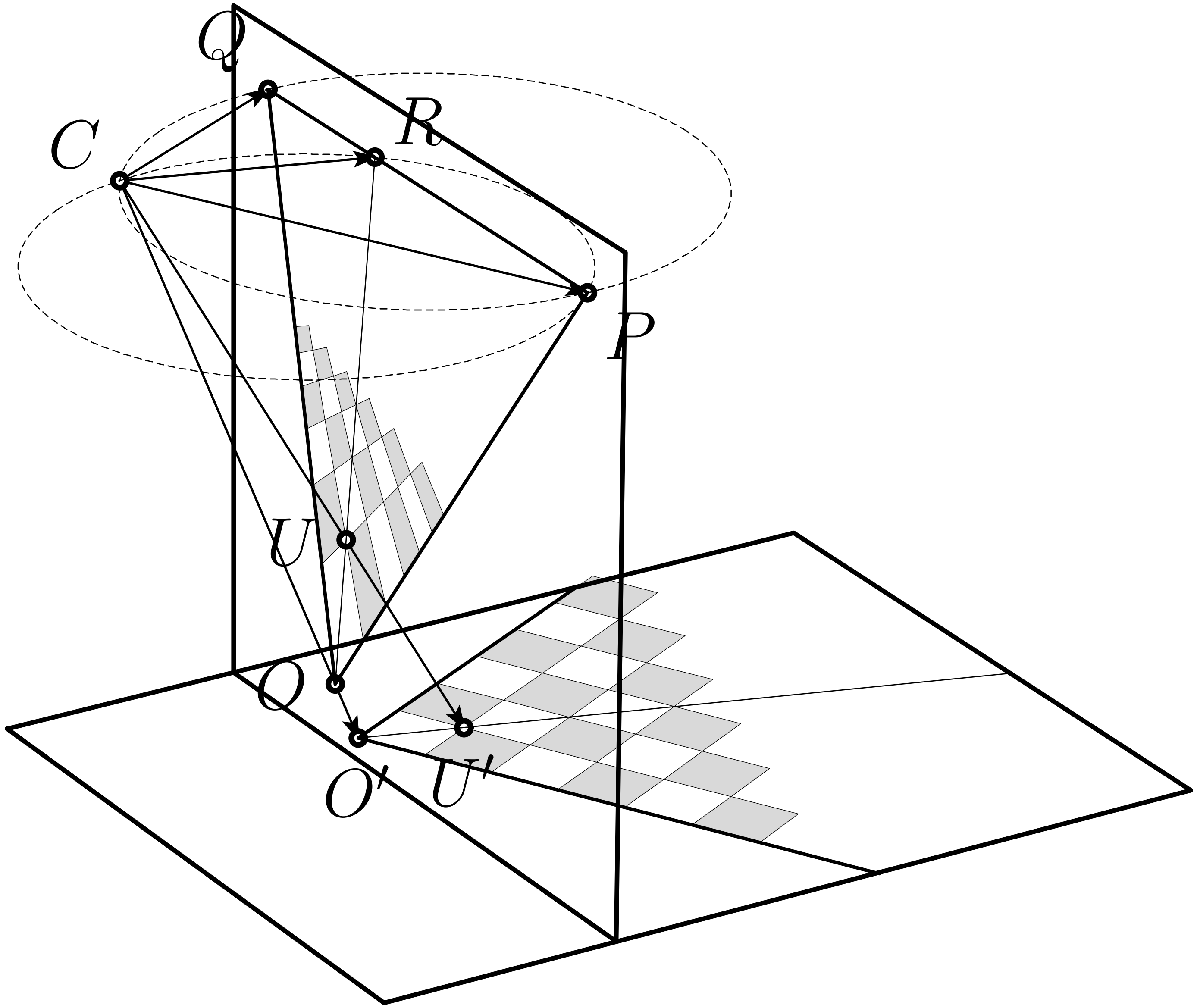
$$\Rightarrow \eta_1 + \eta_2 = -1, \quad \eta_1 \cdot \eta_2 = -4$$

$$\Rightarrow \quad \eta^2 + \eta - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \eta_1 = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}, \quad \eta_2 = \frac{-1-\sqrt{17}}{2}$$

3 mal wiederholen, fertig.

Unmöglichkeit (Heptagon, Winkeldreitlg, Würfelverdopp.) :
Gauss behauptet es, ohne Beweis.
Beweis : Wantzel 1837, Galois 1832, F. Klein 1908.

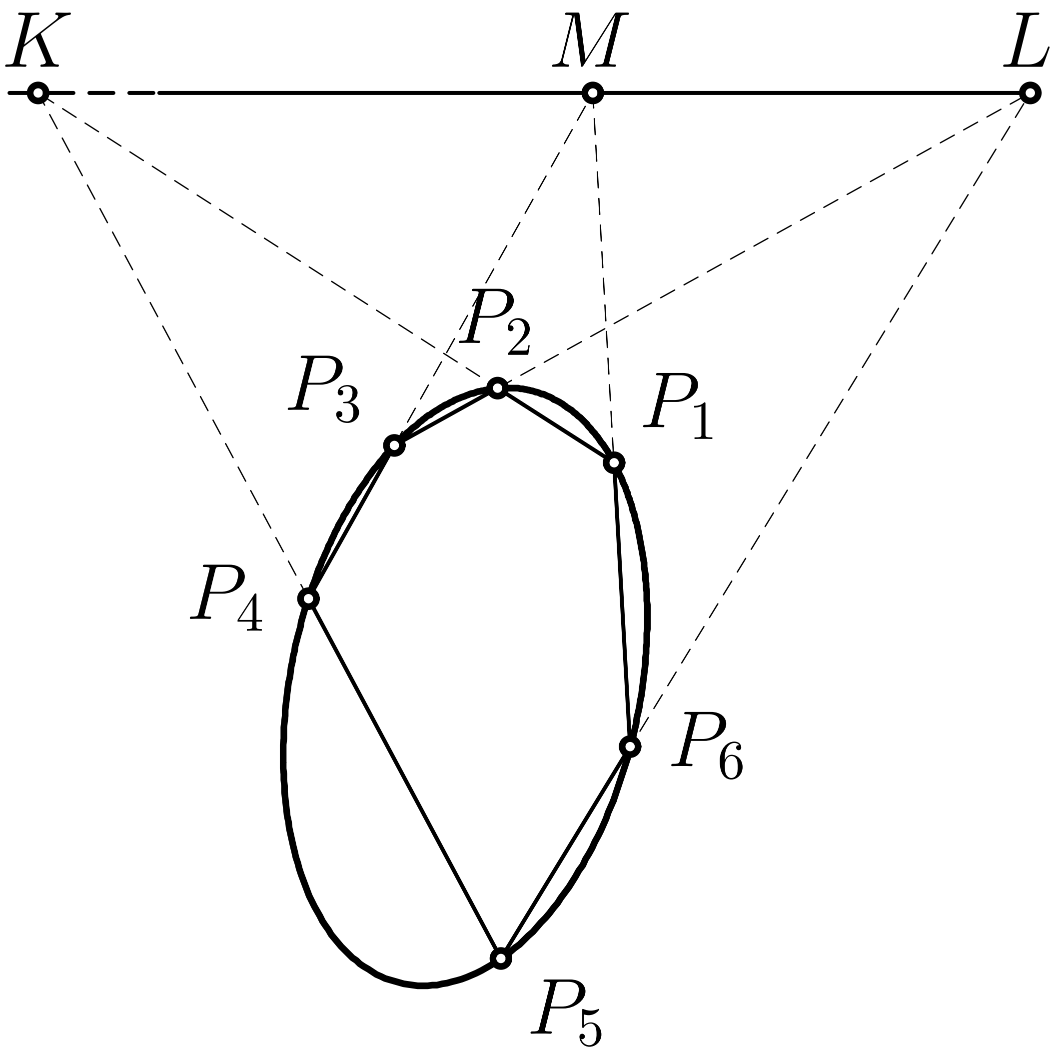
Kap. III. Projektive Geometrie (Poncelet 1822)

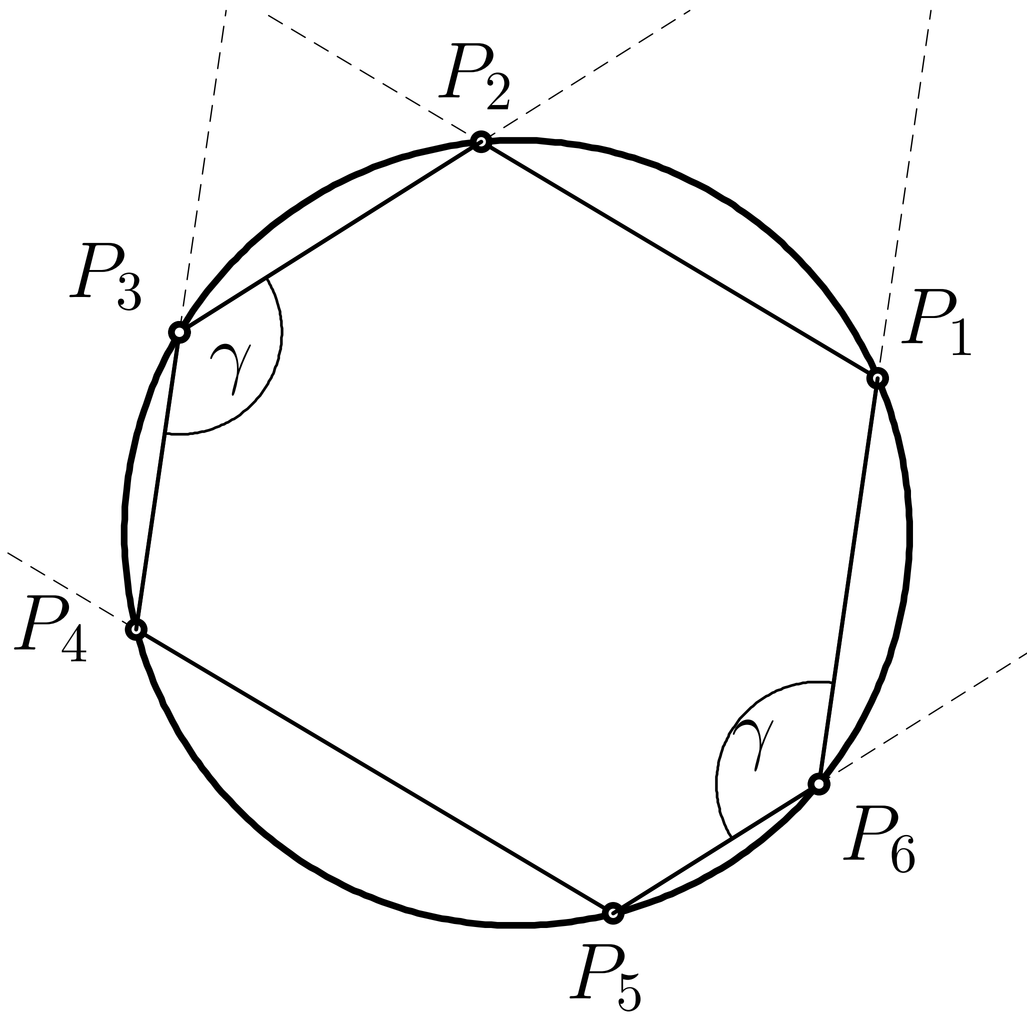


Idee : durch Zentralprojektion

komplíziertes Theorem in triviales Theorem verwandeln.

Beispiel :





Pascal (1640)

"hexagramma mysticum"

$\Leftrightarrow$

Euklid III.20.

Bilan ? “Prière de cocher les 5 paragraphes + intéressants”.

Resultat :

	I	**Géométrie classique**
15	I.1	Thalès et Pythagore
16	I.2	Les Éléments d'Euclide
12	I.3	Période alexandrine — les coniques
11	I.4	Trigonométrie
	II	**Géométrie analytique**
14	II.1	La Géométrie de Descartes
7	II.2	Constructibilium omnium, et inconstructib
5	II.3	Géométrie de l'espace et calcul vectoriel
2	II.4	Matrices et applications linéaires
	III	**Géométrie non euclidienne**
10	III.1	Géométrie projective

Schlusswort.

> Il est fâcheux que Mr. Newton se soit contenté d'étaler ses découvertes sans y joindre les démonstrations, et qu'il a préféré le plaisir de se faire admirer à celui d'instruire.
>
> (Gabriel Cramer 1750, cité d'après I. Benguigui 1998)

Schlusswort.

Il est fâcheux que Mr. Newton se soit contenté d'étaler ses découvertes sans y joindre les démonstrations, et qu'il a préféré le plaisir de se faire admirer à celui d'instruire.

(Gabriel Cramer 1750, cité d'après I. Benguigui 1998)

... il n'y a rien de si important que de voir les origines des inventions qu valent mieux à mon avis que les inventions mêmes, à cause de leur fécondité, et parce qu'elles contiennent en elles la source d'une infinité d'autres ...

(Leibniz, cité d'après Parmentier 1989)

Schlusswort.

Il est fâcheux que Mr. Newton se soit contenté d'étaler ses découvertes sans y joindre les démonstrations, et qu'il a préféré le plaisir de se faire admirer à celui d'instruire.

(Gabriel Cramer 1750, cité d'après I. Benguigui 1998)

... il n'y a rien de si important que de voir les origines des inventions qu valent mieux à mon avis que les inventions mêmes, à cause de leur fécondité, et parce qu'elles contiennent en elles la source d'une infinité d'autres ...

(Leibniz, cité d'après Parmentier 1989)

Zu den Tugenden eines echten wissenschaftlichen Vortrages gehört ohne Zweifel auch noch ... dass wir bei jeder Aufstellung eines Satzes ... auch zeigen, ... auf welche Weise man ihn gefunden habe, oder doch hätte finden können.

(B. Bolzano, *Grössenlehre*, p. 65r, 1848)