Euler e l'analisi degli infiniti

Umberto Bottazzini
Dipartimento di Matematica 'F. Enriques'
Università di Milano

August 25, 2007

1 Introduzione

Con un'espressione che il libro *I grandi matematici* di Bell ha reso popolare, Euler è, per antonomasia, l' 'incarnazione' dell'analisi del Settecento. Il suo contributo all'analisi è immenso, e riempie gran parte degli oltre 800 lavori della classificazione di Eneström, che costituisce il punto di partenza di ogni ricerca su Euler. L' 'analisi degli infiniti' di Euler del titolo allude naturalmente all'*Introductio in analysin infinitorum*, un trattato apparso in due volumi nel 1748, che viene talvolta considerato il più importante trattato di analisi mai scritto. Di cosa parla l'*Introductio*? Limitandoci al primo volume potremmo dire che il suo contenuto è quello che, ancora all'inizio del secolo scorso, veniva indicato con 'analisi algebrica', ossia, brevemente, raccoglie le conoscenze analitiche che sono preliminari al calcolo infinitesimale vero e proprio. (Il secondo volume tratta invece delle applicazioni alle curve e alle superficie). L' 'analisi degli infiniti' di cui parla Euler in quella che si può considerare una 'summa' delle conoscenze del tempo sull'argomento, tocca questioni delicate riguardanti le funzioni, gli sviluppi in serie di potenze, l'uso di variabili complesse. Euler affronta invece la questione, altrettanto delicata, dei fondamenti del calcolo infinitesimale nel suo trattato *Institutiones calculi differentialis* (1755), che costituì il testo di riferimento per generazioni di matematici.

2 Variabili e funzioni

Se si apre il primo volume dell'*Introductio in analysin infinitorum* ci si imbatte subito nella definizione di funzione. Oggi questo concetto è diventato tanto familiare che riesce persino difficile immaginare di poter fare matematica senza di esso. Per questo forse non si apprezza abbastanza la grande novità concettuale introdotta da Euler nell'*Introductio*. Infatti, come si sa, anche dopo la *Géométrie* (1637) di Descartes si continuava a ragionare in termini di curve. Ed è in termini di curve, tangenti e sottotangenti che il calcolo infinitesimale viene introdotto da Newton e Leibniz. Problemi che risultano difficili da trattare dal punto di vista analitico, anche ai nostri giorni, venivano risolti in modo geometrico. Uno di questi è legato allo studio delle evolventi di una curva, uno studio introdotto da Huygens nel suo *Horologium oscillatorium* (1673).

Cos'è l'evolvente di una curva? Se immaginiamo data una curva, la sua evolvente è la trajettoria descritta dall'estremità di un filo teso (con un'estremità fissata in un punto O della curva) che avvolge la curva. Una caratteristica notevole dell'evolvente è che ha una cuspide nel punto P. Geometricamente ci si rende conto di questo fatto osservando che il raggio del cerchio osculatore in un punto X dell'evolvente è uguale alla lunghezza dell'estremità libera del filo XY (Y è il punto corrente sulla curva e, poiché il filo diventa sempre più corto man mano che il punto X si avvicina al punto P, la curvatura in P diventa infinita (e P diventa un punto singolare). Per Huygens il problema è importante per decidere la forma del giogo a cui si avvolge la corda del pendolo per ottenere oscillazioni (non solo piccole) isocrone (e scopre che la forma deve essere quella di una curva allora celebre e assai studiata, la cicloide, la cui evolvente è ancora una cicloide.) Un problema analogo si incontra anche nel primo trattato di analisi l'*Analyse des infiniments petits* (1696) del marchese de l'Hopital, quando studia la famiglia delle evolventi di una curva in prossimità di un punto di flesso[1]. Ho ricordato questo esempio per mostrare che, i matematici del Seicento riuscivano a trattare in termini geometrici problemi piuttosto sofisticati. (Un esempio analogo mette in difficoltà anche Euler, come si vede nelle lettere che scambia con d'Alembert nel 1748).

Torniamo al concetto di funzione. Da dove viene questo termine e questo concetto? Il termine figura per la prima volta in Leibniz (1692), e ancora in un altro articole del 1694, ma in quegli anni la discussione su quel concetto si affaccia ripetutamente nelle lettere che Leibniz scambia con Johann Bernoulli. Lo stesso Bernoulli ne diede questa definizione un un lavoro su problemi isoperimetrici pubblicato nel 1718: "Chiamo funzione di una grandezza variabile una quantità composta in modo qualunque da questa grandezza variabile e da costanti". Una definizione che viene spesso ripetuta nel corso del Settecento.

La definizione di Bernoulli viene ripresa e riformulata anche da Euler. Allo scopo, inzittutto egli definisce che cos'è una variabile. Anche questo concetto sembra assai naturale, perfino banale. Una variabile è una quantità che varia. Ma cosa vuol dire esattamente? varia nel tempo? Newton, per esempio, doveva pensare in questi termini quando scriveva che le curve sono generate dal moto continuo dei punti, o le superfici dal moto continuo delle curve. Anche Cauchy per esempio, un matematico che come Euler ha segnato la propria epoca, scrive nel *Cours d'analyse* (1821)che si considera come variabile una quantità che "deve assumere successivamente più valori diversi tra loro". 'Successivamente'? Cioè vuol dire che la variabile acquista uno dopo l'altro valori diversi, facendo un tacito riferimento al

[1]Questo problema è discusso da un punto di vista moderno in V. I. Arnol'd, Huygens e Barrow, Newton e Hooke, Torino 1996, 48-56.

tempo? Se è così potremmo dire che siamo di fronte a una concezione 'dinamica' di variabile. Oggi pensiamo ad una variabile in termini di insiemi. Quando scriviamo che $x \in X$ intendiamo che x è un elemento generico dell'insieme X. È sparita ogni concezione dinamica, ogni riferimento al tempo.

Come definisce Euler una variabile? "Una quantità variabile è una quantità indeterminata o universale che abbraccia in sé tutti i valori (*omnes omnino valores*) determinati'. E aggiunge: "Siccome tutti i valori determinati richiedono di essere espressi da numeri, una quantità variabile involve tutti i numeri di qualunque genere". Qui Euler non precisa ulteriormente. Si potrebbe sbrigativamente concludere che ha in mente tutti i numeri reali e complessi (o 'immaginari', come ancora si diceva all'epoca). E in effetti, come vedremo, Euler usa nell'*Introductio* sia i numeri reali che i numeri 'immaginari'. Ma in realtà in questo modo si finisce per sorvolare su una questione che a noi può sembrare piuttosto bizzara, ma che all'epoca non lo era affatto, anzi era ancora largamente dibattuta. La questione si potrebbe riassumere nella domanda: quante specie di numeri 'immaginari' esistono? Se per esempio si considera la potenza

$$(a + b\sqrt{-1})^{(m+n\sqrt{-1})}$$

otterremo un numero immaginario di 'seconda specie', e reiterando l'esponenziazione n volte, di 'n-sima specie', o il risultato sarà invece un familiare numero 'immaginario' come $\alpha+\beta\sqrt{-1}$? Lo stesso Euler in una lettera a Nicolaus Bernoulli del 14 maggio 1743 scrive che, pur condividendo l'opinione di quest'ultimo che le quantità immaginarie che si ottengono mediante le usuali operazioni, comprese le potenze del tipo sopra visto, sono sempre tutte della forma $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, non sa tuttavia come dimostrarlo. Ricordiamo che all'epoca Euler stava appunto lavorando alla redazione dell'*Introductio*. Per la verità, all'insaputa di Euler, una risposta alla questione è già stata data da d'Alembert (1746) quando l'*Introductio* non è ancora apparsa a stampa. Se si ha un'espressione immaginaria qualunque di una radice di un polinomio qualunque, o più in generale di una quantità qualunque, afferma d'Alembert, si potrà sempre trovare un'espressione $p + q\sqrt{-1}$ che sarà uguale all'espressione data. L'anno precedente, in un trattato di calcolo integrale rimasto manoscritto[2], lo stesso d'Alembert aveva dimostrato, passando ai logaritmi e poi differenziando, che $(a + b\sqrt{-1})^{(m+n\sqrt{-1})}$ può sempre essere supposto uguale a $x + y\sqrt{-1}$. Nel corso dell'Ottocento la questione che si tradurrà nella seguente, matematicamente più precisa: il campo complesso è algebricamente chiuso? Una dimostrazione rigorosa verrà data da Weierstrass nelle sue lezioni all'università di Berlino all'inizio degli anni Sessanta dell'Ottocento, cioè più di un secolo dopo la pubblicazione dell'*Introductio*.

Quanto a Euler, una definizione più esauriente di cosa siano i numeri 'immaginari' si trova nel Cap. XIII della sua *Algebra* (1770). Dopo aver osservato che la radice quadrata di un numero negativo non può essere né positiva né negativa, egli afferma che quelle radici

[2]Quel trattato è inserito nel vol. IVa delle *Œuvres complètes* di d'Alembert, a cura di Ch. Gilain, in corso di stampa.

"devono appartenere a una specie completamente diversa di numeri", che "non sono né maggiori né minori di nulla, e neppure possiamo dire che siano 0". Di conseguenza, siccome "tutti i numeri che si possono concepire sono o maggiori o minori di 0, o sono lo stesso 0 ... siamo dunque portati all'idea di numeri che per la loro natura sono impossibili, e pertanto sono di solito chiamati *quantità imamginarie* perché esistono solo nella nostra immaginazione". Questa concezione piuttosto moderna dei numeri complessi come creazioni della mente non si inquadra molto bene con l'idea di matematica come scienza della quantità che, per esempio, d'Alembert aveva sostenuto nella voce 'Matematica' dell' *Encyclopédie*, e non è affatto sorprendente che la natura delle quantità complesse fosse uno degli argomenti di discussione nella lunga *querelle* tra Euler e d'Alembert sui logaritmi dei numeri negativi e la dimostrazione del teorema fondamentale dell'algebra, *querelle* intercorsa proprio nel periodo in cui Euler stava lavorando alla stesura dell'*Introductio*, che fu completata nel 1744, anche se il trattato fu pubblicato a Ginevra solo quattro anni dopo.

Comunque sia, nella definizione di variabile data da Euler è sparito ogni possibile riferimento al movimento (e dunque al tempo). La variabile viene identificata con una 'indeterminata', una concezione che Lagrange farà propria e, in fondo, non è molto dissimile da quella oggi usuale. Definita cos'è una quantità variabile, Euler presenta la propria definizione di funzione: "Una funzione di una quantità variabile è un'espressione analitica composta in modo qualunque da quella quantità variabile e da numeri o quantità costanti". "Ogni espressione analitica" di una variabile z, si affretta a precisare Euler, sarà una funzione di z, aggiungendo che, a sua volta, "una funzione di una quantità variabile sarà essa stessa quantità variabile" e, in quanto tale, può assumere ogni valore determinato, compresi quelli 'immaginari'.

La classificazione delle funzioni in algebriche e trascendenti è affidata da Euler alla natura dell'espressione analitica che la definisce, e alla conseguente distinzione in espressioni *algebriche* in cui figurano operazioni algebriche (oltre alle operazioni razionali, l'elevamento a potenza e l'estrazione di radici, "alla quale si riferisce la soluzione delle equazioni") e *trascendenti* quali l'esponenziale, il logaritmo "e le innumerevoli altre che ci fornisce il calcolo integrale". Ma, come vedremo, questa classificazione sottintende una questione delicata, che si presenta immediatamente quando ci si chiede *quante* operazioni sono coinvolte? in altri termini, cosa succede se il numero delle operazioni implicate dall'espressione analitica che definisce la funzione non è finito? Euler non si pone per ora la questione, che vedremo essere tuttavia implicita nelle pagine seguenti dell'*Introductio*. Egli afferma invece che rappresentano funzioni algebriche tutte le epressioni composte mediante operazioni algebriche, "anche se non si possono esibire esplicitamente". Euler sceglie un esempio *ad hoc*, la funzione $Z(z)$ definita (implicitamente) dall'equazione $Z^5 = az^2Z^3 - bz^4Z^2 + cz^3Z - 1$. Infatti, anche se non si sa risolvere l'equazione, dice Euler, tuttavia è chiaro (*constat*) che comunque Z sarà uguale a un'espressione composta della variabile z e di costanti, e dunque sarà una funzione di z. Ma il punto delicato sarà proprio decidere della natura di tale funzione. Euler è convinto che tutte le equazioni algebriche siano risolubili algebricamente ('per radicali', si diceva allora) e occorrerà attendere ben oltre la morte di Euler, fino ai lavori prima di Ruffini (1799) e poi di Abel (1826) per scoprire che in generale le equazioni algebriche, già a partire dal quinto grado, *non* sono algebricamente risolubili.

C'è un'altra distinzione circa la natura delle funzioni, che è suggerita dall'esempio precedente, e che Euler precisa. Le funzioni si distinguono in 'uniformi' e 'multiformi'. Di che cosa si tratta? Le funzioni 'uniformi', dice Euler, sono quelle che assumono per ogni valore determinato della variabile un unico valore ben determinato. 'Multiformi' sono invece le funzioni che per ogni valore determinato della variabile assumono più valori determinati. Come si vede, si tratta di una distinzione oggi obsoleta, e del tutto sparita dalla definizione oggi usuale di funzione come un'applicazione $f : X \to Y$, dove si richiede che ad ogni valore $x \in X$ di venga associato un unico valore $y \in Y$, altrimenti non si parla neppure di funzione. Per esempio, Z definita dall'equazione $Z^2 - PZ + Q = 0$, dove P e Q sono delle funzioni uniformi, è una funzione multiforme ('biforme', dice Euler) come insegna la regola elementare per risolvere le equazioni di secondo grado. Il ragionamento si estende in maniera naturale. Che dire di Z definita da

$$Z^n + PZ^{n-1} + QZ^{n-2} + \ldots = 0?$$

Sarà una funzione multiforme che, precisa Euler, "assume tanti valori quante sono le unità contenute in n".

Al lettore attento non sarà sfuggito che Euler qui sta (implicitamente) facendo riferimento al teorema fondamentale dell'algebra, più precisamente al suo enunciato nel campo complesso. Euler aggiunge che se i valori di Z sono immaginari, il loro numero sarà pari (in altri termini, che le radici complesse si presentano sempre insieme alle loro coniugate). Dal che segue, precisa Euler, che se n è dispari, ci sarà sempre almeno una radice reale, mentre se è pari, tutte le radici possono essere complesse coniugate e nessuna reale.

Qual era lo stato di questo teorema quando Euler scrive l'*Introductio*? Certo, era stato enunciato da Girard da oltre un secolo, ma che cosa si poteva dire della sua dimostrazione? "Vi devo dire francamente che all'epoca non avevo ancora una dimostrazione solida del fatto che ogni espressione algebrica è risolubile in fattori trinomi reali", confessa Euler a d'Alembert in una lettera del 28 settembre 1748. Il linguaggio impreciso, ma il senso è chiaro: Euler si sta riferendo alla dimostrazine del teorema fondamentale dell'algebra. Le cose sono cambiate nel frattempo grazie proprio a d'Alembert che nel 1745, a partire dalla sua dimostrazione della stabilità di espressioni come $x + y\sqrt{-1}$, cui abbiamo sopra accennato, pensa di poter ottenere una dimostrazione del teorema fondamentale dell'algebra ragionando in questo modo: se il polinomio ha una radice immaginaria, questa ha dunque necessariamente la forma $p + q\sqrt{-1}$. Gli resta solo da mostrare l'esistenza della coniugata per concludere l'esistenza di un fattore trinomio reale. Questa dimostrazione naturalmente suppone che le radici del polinomio si possano esprimere come funzioni (algebriche) dei coefficienti. Questa sarà proprio la linea dimostrativa seguita da Euler in un lavoro che appare tre anni dopo che d'Alembert (1746) avrà presentato all'Accademia di Berlino una dimostrazione del teorema seguendo una linea argomentativa completamente diversa, che si basa sull'uso di sviluppi in serie di potenze a esponente frazionario (serie del tipo di quelle introdotte da Puiseux un secolo più tardi)[3].

[3]Un'analisi dettagliata del lavoro di d'Alembert si trova nel vol. IVa delle sue *Œuvres complètes* sopra

Dal 1741 Euler si è trasferito da Pietroburgo a Berlino, dove è segretario della Classe di matematica dell'Accademia. Ricevuta la memoria di d'Alembert, il 29 dicembre 1746 egli scrive al matematico parigino che la sua dimostrazione che ogni polinomio $P(x)$ che non ha radici reali deve averne almeno una della forma $p + q\sqrt{-1}$ (e di conseguenza deve ammettere un fattore trinomio) "mi soddisfa completamente. Ma, da momento che procede attraverso lo sviluppo di x in serie infinita, non sono certo che tutti ne saranno convinti". Per la verità, il primo a non esserne convinto era proprio Euler, come rivela il carteggio di 8 lettere che, nell'arco di circa tre anni, intercorre tra i due sull'argomento.

Nel 1745 Euler aveva presentato all'Accademia di Berlino (ma non pubblicato) una propria memoria sul teorema fondamentale dell'algebra. Quattro anni dopo appare nelle Memorie dell'Accademia una sua dimostrazione 'algebrica' del teorema. Come scrive a d'Alembert, si tratta di una dimostrazione - a suo parere "alla portata di tutti" - che ogni polinomio di grado n, se n è una potenza di 2, è scomponibile in fattori reali di secondo grado, "e da ciò la stessa cosa consegue chiaramente per equazioni (polinomiali) di grado qualunque". In quella memoria Euler comincia col dimostrare la sua affermazione per le equazioni di quarto grado. Poi enuncia il teorema che ogni equazione algebrica di grado dispari ha almeno una radice reale. Per la dimostrazione Euler si serve dell'interpretazione geometrica del cosiddetto 'teorema degli zeri', considerando una curva di equazione

$$y = x^{2m+1} + Ax^{2m} + \ldots + N$$

che, egli afferma, è continua e dunque necessariamente taglia l'asse x almeno in un punto[4]. Dopo aver dimostrato che ogni equazione algebrica di ottavo e 16-simo grado si può scomporre in due fattori di quarto e ottavo grado rispettivamente, Euler enuncia il seguente teorema: "Ogni equazione il cui grado è una potenza 2^n si può sempre risolvere in due fattori reali di grado 2^{n-1}. Questo teorema, per Euler, costituisce la chiave di volta della dimostrazione cercata, poiché un'equazione di grado qualunque può sempre essere ridotta al caso in questione moltiplicandola per un fattore ax^h con h un intero opportuno, e poi ripetere il procedimento di fattorizzazione. Per la dimostrazione Euler considera (cosa sempre possibile senza perdita di generalità) che l'equazione si possa scrivere come

$$x^{2^n} + Bx^{2^n-2} + Cx^{2^n-3} + \ldots = 0$$

che suppone scomposta in due fattori

$$x^{2^{n-1}} + ux^{2^{n-1}-1} + \alpha x^{2^{n-1}-2} \ldots = 0$$

citato.

[4]Una dimostrazione rigorosa di questo teorema sarà data per la prima volta da Bolzano nel 1817, proprio a seguito di un'analisi critica della prima dimostrazione di Gauss (1799) del teorema fondamentale dell'algebra, che si basava anch'essa sullo stesso argomento di continuità.

$$x^{2^{n-1}} - ux^{2^{n-1}-1} + \lambda x^{2^{n-1}-2} \ldots = 0$$

dove il numero delle incognite $u, \alpha, \lambda, \ldots$ è $2^n - 1$. A questo punto Euler moltiplica tra loro le due equazioni e uguaglia i coeffienti dell'equazione ottenuta ai coeffcienti $B, C, \ldots$, ottenendo in questo modo $\alpha, \lambda, \ldots$ espressi come funzioni razionali di $u, B, C, \ldots$. Con un procedimento di successive sostituzioni e eliminazioni di $\alpha, \lambda, \ldots$ ottiene alla fine un'equazione in u di grado $\frac{2^n!}{2^{n-1}!(2^n-2^{n-1})!}$ che, come Euler dimostra, ha termine noto negativo, e dunque, per il 'teorema degli zeri' ha almeno una radice. "Per quanto riguarda la solidità della dimostrazione - concludeva Euler - non credo che non ci sia nulla da criticare". In ogni caso, se qualcuno avanzava delle difficoltà nel riconoscere la correttezza della dimostrazione, Euler forniva nel seguito un certo numero di di proposizioni e esempi indipendenti da quanto aveva appena dimostrato "per togliere ogni dubbio che qualcuno potesse ancora avere". In particolare, poi, egli dimostrava che le equazioni di grado $6, 4n+2, 8n+4, 16n+8, etc$ contengono sempre almeno un fattore reale di secondo grado.

Come d'Alembert, anche Euler enuncia il teorema nella forma : "Se un'equazione algebrica di grado qualunque ha radici immaginarie, ognuna di esse sarà compresa nella formula generale $M + N\sqrt{-1}$ con M e N quantità reali, e poi, come "importante conseguenza" dimostra che ogni quantità immaginaria, comunque complicata, è sempre riducibile alla forma $M + N\sqrt{-1}$. Egli prova la sua affermazione per potenze

$$(a + b\sqrt{-1})^{(m+n\sqrt{-1})}$$

e per le trascendenti elementari $\log, \sin, \cos, \ldots$ per un argomento 'immaginario'. Funzioni che aveva studiato in dettaglio nell'*Introductio*, dopo aver presentato nel cap. IV lo sviluppo delle funzioni in serie infinite.

3 Il numero *e*

Euler introduce l'argomento con una constatazione. Le funzioni razionali e irrazionali di una variabile z non si possono rappresentare in forma intera

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots$$

con un numero finito di termini. Anche le funzioni trascendenti si capiscono meglio se si rappresentano in forma intera con espressioni come la precedente, se pure continuata *in infinitum.* Ecco dunque che la serie (eventualmente infinita) di potenze sopra scritta gli appare "adattissima" a rappresentare tutte quante le funzioni che si possono imaginare. "Se qualcuno ne dubita, aggiunge Euler, il dubbio gli verra tolto dallo sviluppo effettivo di ogni funzione". Questo invito alla verifica empirica non poteva certo sopperire alla mancanza di una *dimostrazione* che una funzione qualunque $f(z)$ si poteva sempre sviluppare in serie intera, che d'altra parte Euler non poteva dare. Così egli aggiungeva all'affermazione precedente la (singolare) precisazione:

"Affinché la spiegazione precedente sia la più ampia possibile (*latius pateat*), oltre alle potenze di z con esponente intero positivo, si devono poter ammettere le potenze qualunque. Così non ci sarà più nessun dubbio che ogni funzione di z si possa trasformare in un'espressione infinita di questo tipo

$$Az^{\alpha} + Bz^{\beta} + Cz^{\gamma} + Dz^{\delta} + \dots$$

dove $\alpha, \beta, \gamma, \delta + \dots$ sono numeri *qualunque*" [corsivo U.B.].

Euler non ha fatto questa precisazione per amore di generalità, anche se di fatto il patrimonio di funzioni a disposizione degli analisti del tempo era costituito da funzioni analitiche nel senso moderno del termine, tranne al più in punti isolati. Come vedremo, egli ricorre a un'espressione di quel tipo per trovare uno dei risultati più noti dell'*Introductio*. Allo scopo Euler si serve del teorema del binomio di Newton, che ai suoi occhi costituisce il "teorema universale" che consente di sviluppare le funzioni irrazionali in serie infinite

$$(P+Q)^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \tfrac{m}{n} P^{\frac{m-n}{n}} Q + \tfrac{m}{n}\tfrac{m-n}{n} P^{\frac{m-2n}{n}} Q^2 + \dots.$$

Prima di considerare un'applicazione particolarmente importante del teorema del binomio, riprendiamo per un momento la classificazione di Euler delle funzioni in algebriche e trascendenti, e chiediamoci: il carattere algebrico o trascendente della funzione rivelato dall'espressione analitica che la rappresenta? Come suggerisce lo sviluppo in serie binomiale, l' 'espressione algebrica' costituita dalla somma di un numero infinito di operazioni algebriche elementari non caratterizza le funzioni algebriche.

Infatti, le serie intere possono infatti rappresentare funzioni *algebriche*, come per esempio

$$y = 1 + \tfrac{x^2}{2} - \tfrac{x^4}{2.4} + \tfrac{1}{2}\tfrac{3}{4}\tfrac{x^6}{6} - \dots = +\sqrt{1+x^2}$$

oppure funzioni *trascendenti* come per esempio

$$y = \tfrac{x^2}{1} - \tfrac{x^4}{2} + \tfrac{x^6}{3} - \dots = +\log(1+x^2) \text{ per } |x| < 1.$$

Come ha dimostrato Pringsheim nel 1899, contrariamente all'affermazione di Euler solo le funzioni razionali possono essere espresse da un numero finito di operazioni (razionali) elementari.

Il notissimo risultato di Euler, cui facevo riferimento, è dato dalla definizione di e. La maniera con la quale egli vi perviene è istruttiva sulla pratica allora comunemente accettata nella manipolazione di infiniti e infinitesimi. All'inizio del cap. VII egli considera la potenza a^ω, dove $a > 1$ e ω un numero infinitamente piccolo. Un semplice ragionamento dice che a^ω è uguale a $1 + \varpi$ con ϖ infinitesimo dello stesso ordine (diremmo noi) di ω, tale che si può porre $\varpi = k\omega$, con k una costante opportuna. Ne consegue che $a^\omega = 1 + k\omega$, e se si assume a come base logaritmica, si ha

$$\omega = \log(1 + k\omega).$$

Facciamo un passo successivo e consideriamo, con Euler, la potenza $a^{i\omega}$ con i qualunque. Per il 'teorema universale' del binomio Euler scrive

$$a^{i\omega} = (1 + k\omega)^i = 1 + ik\omega + \tfrac{i(i-1)}{2}k^2\omega^2 + \ldots.$$

A questo punto pone $i = \frac{z}{\omega}$ con z numero finito qualunque. Siccome ω è un numero infinitamente piccolo, i è un numero infinitamente grande, e $\omega = \frac{z}{i}$. Sostituiamo quindi $\frac{z}{i}$ nello sviluppo in serie precedente al posto di ω, avremo

$$a^z = (1 + \tfrac{kz}{i})^i = 1 + kz + \tfrac{i-1}{2i}k^2z^2 + \tfrac{(i-1)(i-2)}{(2i)(3i)}k^3z^3 + \ldots.$$

Siccome i è un numero infinitamente grande, i rapporti $\frac{i-1}{i}$, $\frac{i-2}{i}$, $\frac{i-3}{i}, \ldots$ che figurano nei coefficienti dello sviluppo binomiale si avvicineranno tutti all'unità. Dunque avremo in definitiva

$$a^z = 1 + kz + \tfrac{k^2z^2}{1.2} + \tfrac{k^3z^3}{1.2.3} + \ldots$$

e, posto $z = 1$

$$a = 1 + k + \tfrac{k^2}{1.2} + \tfrac{k^3}{1.2.3} + \ldots.$$

L'abilità con cui Euler manipola infiniti e infinitesimi è davvero strabiliante, e rivela il suo straordinario intuito analitico. A questo punto egli conclude che se $a = 10$, allora è all'incirca $k = 2,30258$. Siccome tuttavia la base del sistema dei logaritmi può essere scelta *pro libitu*, poniamo $k = 1$. La serie precedente dà lo sviluppo di un numero che lo stesso Euler indica con e, di cui fornisce il valore approssimato

$$e = 2,718281828459\ldots$$[5]

4 Una formula mirabile

Legata al numero e è una delle più celebri, e secondo molti, più belle formule della matematica, cioè l''identità di Euler'

$$e^{\pi i} + 1 = 0$$

che ho scritto con la notazione 'moderna', ponendo i al posto di $\sqrt{-1}$. (È forse il caso di osservare che, contrariamente a quanto comunemente si dice, questa notazione *non* è stata introdotta per la prima volta da Gauss in un lavoro del 1831. Certo, è stata generalmente adottata dai matematici seguendo l'uso fattone da Gauss, ma per la verità la stessa notazione era già stata introdotta per la prima volta dallo stesso Euler, quando aveva 70 anni, in una memoria presentata all'Accademia di Pietroburgo il 5 maggio 1777, ma pubblicata soltanto nel 1794 come Supplemento IV del vol. 1, Ch. V della seconda edizione delle *Institutiones calculi integralis*. Euler scrive infatti: "*formulam* $\sqrt{-1}$ *littera i in posterum designabo, ita ut sit* $ii = -1$ *adeoque* $\frac{1}{i} = -i$." (1794, 129). Non si può escludere che la lettura delle *Institutiones* abbia suggerito a Gauss di adottare quella notazione.)

Si vede subito che l'identità di Euler si ottiene immediatamente da un'altra formula notevole di Euler

$$e^{i\vartheta} = \cos\vartheta + i\sin\vartheta$$

con la sostituzione $\vartheta = \pi$. Dove e quando venne introdotta da Euler l'identità che oggi porta il suo nome?

Facciamo un passo indietro rispetto all'epoca dell'*Introductio* e spostiamoci in Inghilterra. Verso il 1712 il matematico Roger Cotes (1862-1716) stava studiando problemi connessi alla lunghezza del'arco di una spirale. Nel corso di queste ricerche si imbatte in una formula che, con notazione moderna, si scrive

$$\log(\cos\vartheta + i\sin\vartheta) = i\vartheta$$

[5]La lettera e per denotare la base dei logaritmi naturali viene per la prima volta introdotta da Euler nel manoscritto *Meditatio in experimenta explosione tormentorum nuper instituta* in cui egli descrive degli esperimenti effettuati verso la fine del settembre 1727. Probabilmente redatta tra la fine di quell'anno o l'inizio del 1728, la *Meditatio* compare a stampa solo postuma, nel 1862. Euler aveva adottato la stessa notazione nella *Mechanica sive motus scientiae analytice exposita* pubblicata a Pietroburgo nel 1736.

che si trasforma immediatamente nella formula di Euler passando in entrambi i membri dai logaritmi agli esponenziali. Ma quello che a noi appare un passo elementare non lo è affatto per Cotes, che infatti non lo compie. Negli stessi anni, ancora in Inghilterra, Abraham DeMoivre (1667-1754) scopre la formula

$$(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)^n = (\cos n\vartheta + in\sin\vartheta)$$

che pubblica nel 1722. Anche questa è strettamente legata alla formula di Euler, anzi ne è una diretta conseguenza come si verifica con un calcolo elementare.

Sembra che DeMoivre sia giunto alla sua formula verso il 1707, che infatti appare sotto forma diversa in un suo lavoro di quell'anno, ma è assai improbabile che i lavori dei matematici inglesi fossero noti al giovanissimo Euler. Non dimentichiamo poi che siamo nel periodo in cui non si sono ancora spenti gli echi della polemica fra newtoniani e leibniziani, di cui Johann Bernoulli, il maestro di Euler, è stato uno dei protagonisti.

Lo stesso Bernoulli nel 1702 aveva ottenuto la formula seguente

$$\tfrac{a^2}{4i}\log\tfrac{x+iy}{x-iy}$$

per esprimere l'area del settore circolare compreso tra l'asse x e il punto x, y di una circonferenza di raggio a e centro nell'origine. Come si sa, Bernoulli pensava che $\log(-1) = 0$ sulla base del fatto che $0 = \log(1) = \log(-1. - 1) = 2\log(-1)$

Nel 1727 Euler osservò che, ponendo $x = 0$ dalla formula di Bernoulli si sarebbe ottenuta un'espressione per area del quadrante, cioè $\frac{a^2}{4i}\log(-1)$ che doveva avere un valore finito e diverso da 0, mentre se fosse stata fondata la congettura $\log(-1) = 0$ di Bernulli, l'area avrebbe dovuto essere uguale a 0, cosa impossibile. Bernoulli non era molto convinto e la cosa non ebbe seguito[6]. Dal nostro punto di vista sembra incredibile che Euler non abbia compiuto l'elementare passo successivo: l'area del quadrante di raggio a è ovviamente $\frac{\pi a^2}{4}$, e quindi dalla formula di Bernoulli egli avrebbe potuto ottenere

$$\tfrac{\pi a^2}{4} = \tfrac{a^2}{4i}\log(-1), \text{ ossia } \log(-1) = \pi i$$

e ricavare quindi l'identità

$$e^{\pi i} = -1.$$

[6]Questa storia è raccontata in dettaglio in: Bradley, R., 'Euler, d'Alembert and the Logarithm Function, in: *Leonhard Euler: Life, Work and Legacy*, Bradley, R. and Sandifer E. (eds), Amsterdam 2007, 255-277.

Due anni più tardi, nel suo primo lavoro sulla funzione Γ Euler giunse ancora una volta a un passo dallo scrivere la sua celebre identità. In uno degli esempi che accompagnano quel lavoro Euler afferma infatti, senza darne la dimostrazione, che un certo prodotto infinito è uguale all'espressione

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{i\log(-1)}$$

che a sua volta, dice Euler senza dimostrarlo, "è uguale al lato del quadrato che è equivalente a un cerchio di diametro 1".

Assumiamo che l'affermazione di Euler sia (come in effetti è), vera. Non è difficile tradurla in simboli. Un cerchio di diametro 1 ha area uguale a $\frac{\pi}{4}$, dunque il lato di un quadrato di area uguale è $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Quindi l'affermazione di Euler si traduce nell'uguaglianza

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{i\log(-1)} = \tfrac{\sqrt{\pi}}{2}$$

da cui, ancora una volta, non è difficile ottenere l'identità

$$e^{\pi i} = -1.$$

Ma, ancora una volta, Euler non compie questo passo.

Riprendiamo ora l'analisi dell'*Introductio* dove ci eravamo arrestati, al momento in cui Euler introduce il numero e. Nel §123 immediatamente successivo Euler scrive gli sviluppi in serie

$$e^z = 1 + z + \tfrac{z^2}{2} + \tfrac{z^3}{2.3} + \ldots$$

$$\log(1+x) = x - \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{z^3}{3} - \ldots$$

$$\log\tfrac{1+x}{1-x} = 2x + \tfrac{x^3}{3} + \tfrac{x^5}{5} + \ldots$$

osservando che queste ultime due serie *vehementer convergunt* se per x si prende una frazione molto piccola (*valde parva*). Il successivo capitolo VIII è dedicato allo studio delle funzioni trascendenti che 'sono generate dalla circonferenza' (*ex circulo ortis*). Euler comincia a spiegare come si ottiene la formula nota col nome di De Moivre. L'identità $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ si scompone infatti nel prodotto di fattori immaginari

$$(\cos z + i\sin z)(\cos z - i\sin z) = 1.$$

A questo punto Euler considera il prodotto

$$(\cos z + i \sin z)(\cos y + i \sin y)$$

un calcolo elementare mostra che è

$$(\cos z + i \sin z)(\cos y + i \sin y) = \cos(z + y) + i \sin(z + y)$$

da cui segue immediatamente

$$(\cos z \pm i \sin z)^n = (\cos nz \pm in \sin z)$$

giacché si può ragionare in maniera analoga per $(\cos z - i \sin z)$. Da questa relazione, sommando e sottraendo, Euler ricava le due seguenti

$$\cos nz = \frac{(\cos z+i \sin z)^n+(\cos z-i \sin z)^n}{2}$$

$$\sin nz = \frac{(\cos z+i \sin z)^n-(\cos z-i \sin z)^n}{2i}$$

che sviluppa col teorema del binomio. Il passo successivo è del tutto analogo a quello che abbiamo visto Euler ha compiuto in precendenza per ottenere la serie esponenziale e il numero e. Egli suppone prima che l'arco z sia infinitamente piccolo, sarà $\sin z = z$ e $\cos z = 1$. E poi suppone che n sia infinitamente grande, sarà $nz = v$, dove v è un arco di grandezza finita. Sostituendo nello sviluppo del binomio Euler ottiene gli sviluppi in serie che ci sono familiari

$$\sin v = v - \frac{v^3}{3!} + \frac{v^5}{5!} - \dots$$

$$\cos v = 1 - \frac{v^2}{2} + \frac{v^4}{4!} - \dots.$$

Qualche paragrafo più avanti, al §138 Euler riprende le sue formule dello sviluppo binomiale di $\cos nz$ e $\sin nz$, e ragiona come prima supponendo che z sia infinitesimo e n un numero infinitamente grande k, di modo che $nz = kz = v$. Fatte queste sostituzioni, le equazioni sopra scritte si traducono in

$$\cos v = \frac{(1+\frac{iv}{k})^k+(1-\frac{iv}{k}))^k}{2}$$

$$\sin v = \frac{(1+\frac{iv}{k})^k-(1-\frac{iv}{k}))^k}{2i}$$

D'altra parte, se k è infinitamente grande,

$$e^z = (1 + \tfrac{z}{k})^k$$

da cui, ponendo prima $z = iv$ e poi $z = -iv$ egli ottiene le identità

$$\cos v = \tfrac{e^{iv}+e^{-iv}}{2}$$

$$\sin v = \tfrac{e^{iv}-e^{-iv}}{2i}$$

da cui immediatamente deriva la 'formula di Euler'

$$e^{iv} = \cos v + i \sin.$$

Naturalmente l''identità di Euler'

$$e^{\pi i} + 1 = 0.$$

si otterrebbe subito ponendo $v = \pi$, ma Euler non considera questo caso particolare, e invano si cercherebbe quella identità nell'*Introductio*, e non solo. Infatti, a quanto sembra, Euler non ha mai scritto la formula più celebre a cui è legato il suo nome[7].

5 Serie

L'*Introductio* ci offre un cospicuo numero di esempi per valutare il modo in cui Euler manipolava serie infinite. Certi suoi procedimenti, basati sulla considerazione di numeri infinitamente piccoli o infinitamente grandi, lasciano perplesso il lettore contemporaneo. Secondo una leggenda che risale all'inizio dell'Ottocento, ad Abel e Cauchy, e nel secolo scorso è stata alimentata tra i matematici dalle influenti pagine degli *Elements d'histoire des mathématiques* di Bourbaki, Euler i i grandi matematici del Settecento erano degli algebristi

[7]Nel 2005 I. Grattann-Guinness ha sfidato la comunità degli storici a trovare quella identità nelle pagine delle opere di Euler. Impresa non banale, se considerate la sua immensa produzione, raccolta in oltre 80 volumi. Comunque sia, a quanto ne so, nessuno finora ha avuto successo nella ricerca.

impenitenti, che ragionavano con le serie infinite in maniera del tutto formale, non curandosi affatto della loro convergenza[8]. Certo, ci sono passi in Euler che sembrano confermare quella leggenda. Ma, d'altra parte, è sufficiente leggere con cura le sue pagine per rendersi conto che le cose sono più complesse. Per cominciare, abbiamo visto che Euler si affretta a precisare che la serie logaritmica $\log(1 + x)$ converge *vehementer* per x molto piccolo. La cosa, ovviamente, non è espressa in termini di disuguaglianze alle quali siamo abituati dopo Weierstrass, ma il senso delle parole di Euler è chiarissimo (e l'affermazione corretta).

Le prime preoccupazioni dei matematici riguardo alla convergenza delle serie risalgono lontano nel tempo. Nel 1713, in una lettera a Christian Wolff pubblicata negli *Acta eruditorum* Leibniz sostiene che la serie geometrica

$$\tfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

è "valida" quando $x < 1$. Tuttavia, in base alla sua 'legge di continuità' egli pensava che la validità dello sviluppo si potesse estendere a $x = 1$, in modo da poter spiegare l'affermazione che alla serie di Grandi

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

si potesse attribuire il valore $\frac{1}{2}$.

Anche Euler pensava la stessa cosa, ma sulla base di un ragionamento diverso. Egli affrontò il problema in un lavoro successivo all'*Introductio*, l'articolo *De seriebus divergentibus* del 1755. Euler comincia con una definizione che ai nostri occhi appare scorretta. Dice Euler: "*Convergentes* series dicuntur, quarum termini continuo fiunt minores atque tandem penitus evanescunt. ... *Divergentes* autem series dicuntur, quarum termini non ad nihilum tendunt". Insomma, sono convergenti le serie il cui termine generale tende a zero, divergenti quelle per cui ciò non accade. Non c'è dubbio, aggiunge Euler, che le serie convergenti (secondo quella definizione di convergenza) abbiano una somma. La serie di Grandi appartiene chiaramente alle serie divergenti.

Euler considera ad esempio le serie

$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \dots$

$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$

$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots$

[8]In seguito Dieudonné, uno dei bourbakisti più autorevoli, ha rivisto quel giudizio, e nell' *Abregé d'histoire des mathématiques* ha scritto che "contrariamente a un'opinione molto diffusa, non bisogna affatto credere che gli analisti del diciottesimo secolo fossero indifferenti alle questioni di approssimazione e di convergenza".

$\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \ldots$

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \ldots$

$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \ldots$

$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \ldots$

$1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + \ldots$

Si tratta di serie che hanno dato luogo ad accese controversie. Tuttavia, secondo Euler, il nucleo di quelle controversie era largamente dovuto a una questione di parole. Si trattava, insomma, di mettersi d'accordo su cosa si debba intendere con il termine *somma*. L'idea di somma, dice Euler, si deve concepire in questo modo: se per somma di una serie intendiamo la quantità alla quale essa si avvicina sempre più (*propius perveniat*) quanto maggiore è il numero dei termini che si considerano, allora questo si verifica solo per le serie convergenti. D'altra parte, aggiunge Euler, siccome in analisi abbiamo a che fare con serie che sono generate dallo sviluppo di frazioni, di quantità irrazionali e di quantità trascendenti, nei calcoli sarà lecito sostituire a quelle serie le quantità che le hanno generate. La conclusione di Euler è la seguente: se si adotta come definizione di *somma* di una serie quella per cui la somma di una serie è la quantità dal cui sviluppo la serie è generata, svaniscono tutti i dubbi circa le serie divergenti e non c'è più spazio per alcuna controversia, perché questa definizione si applica tanto alle serie convergenti che a quelle divergenti.

Euler qui assumeva tacitamente che la stessa serie non potesse essere generata da espressioni diverse, un'obiezione che gli aveva fatto Nicolaus Bernoulli nel 1744. A questo proposito, Euler scriveva a Goldbach il 7 agosto 1745 che Bernoulli in realtà non aveva fornito nessun esempio di questo fatto, ed egli stesso dubitava che se ne potessero trovare. È essenziale a questo punto tenere presente che Euler aveva in mente serie di potenze e, come ha scritto Hardy nel suo libro *Divergent series* (1949), se interpretata in maniera appropriata, l'affermazione di Euler è corretta, poiché una serie di potenze convergente ha un'unica funzione generatrice.

Per calcolare la 'somma' delle serie proposte, Euler ricorre al metodo seguente: sia data in generale la serie

$$s = a - b + c - d + \ldots.$$

Trascurando il segno dei termini, egli considera le differenze prime

$$b - a, c - b, d - c, e - d, \ldots.$$

e poi le differenze seconde

$$c-2b+a, d-2c+b, e-2d+c, \ldots.$$

e, in maniera analoga, le differenze terze, quarte, ecc. Chiamati $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ i primi termini rispettivamente delle differenze prime, seconde, terze, quarte ecc. Euler afferma (senza dimostrazione) che la serie proposta ha per somma

$$s = \tfrac{a}{2} - \tfrac{\alpha}{4} + \tfrac{\beta}{8} - \tfrac{\gamma}{16} + \tfrac{\delta}{32} + \ldots.$$

"che, se non è già convergente, certo converge molto più rapidamente della serie proposta".

Il primo esempio è dato proprio dalla serie di Grandi. Si verifica imediatamente che

$$a = 1, \alpha = \beta = \gamma = \ldots = 0$$

e dunque $s = \frac{1}{2}$, d'accordo con Leibniz. Nel caso della serie

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \ldots$$

le differenze prime sono uguali a 1, e le seconde uguali a 0, e dunque la sua somma è $s = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$. Nella restante parte di quel lavoro Euler studia la serie 'ipergeometrica'

$$1 - 1! + 2! - 3! + 4! - \ldots$$

che aveva menzionato nella sua lettera a Goldbach. Dapprima, applicando lo stesso metodo e arrestandosi alle differenze settime (il che già comporta una notevole sequenza di calcoli, Euler trova per la somma il valore 0,581. Il metodo non si rivela abbastanza adatto allo scopo di "determinare la somma esattamente", commenta Euler, perché quel valore differisce da quello che egli stesso ha trovato in una maniera "più analica", ossia (secondo la sua definizione) risalendo alla funzione generatrice della serie. Euler ragiona in questo modo: considera l'espressione

$$s = x - 1!x^2 + 2!x^3 - 3!x^4 + 4!x^5 - \ldots$$

che si riduce alla serie di partenza per $x = 1$. Differenziando termine a termine Euler ottiene:

$$\tfrac{ds}{dx} = 1 - 2x + 3!x^2 - 4!x^3 + 5!x^4 - \ldots = \tfrac{x-s}{x^2} \text{ con } x > 0.$$

Integrando l'equazione differenziale $s'x^2 + s = x$ così ottenuta, ricava come soluzione

$$s = e^{\frac{1}{x}} \int_0^x \frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t} dt$$

che si annulla per $x = 0$ e dà la somma cercata per $x = 1$. Per questo valore Euler valuta numericamente l'integrale trovando il valore approssimato 0,59637164. Come ha commentato Dieudonné, Euler "non si rende conto di aver di fatto fornito il primo esempio di funzione indefinitamente derivabile in $[0, +\infty[$ ma non analitica nel punto $x = 0$". Non contento, del suo risultato, Euler ricorre agli sviluppi in frazione continua. Esibendo una impressionante abilità di calcolo trova infine per la somma una migliore approssimazione, data da 0,5963473621237.

Torniamo alla definizione di convergenza data da Euler. Rispetto ad essa, sembrerebbe che la serie armonica sia convergente. Eppure lo stesso Euler nel 1734 aveva dimostrato che la serie armonica (generalizzata) è divergente, anche se i suoi termini "perpetuo decrescunt". In quella occasione aveva anche osservato che una serie infinita convergente, anche se *duplo longius continuetur*, non subisce nessun incremento. Cosa vuol dire? Euler lo chiarisce con l'esempio della serie armonica $\sum \frac{1}{n}$. Se si indica con s_n la somma dei primi n termini, e con s_{2n} la somma dei primi $2n$, e si considera la differenza $s_{2n} - s_n$ ci si accorge immediatamente che è

$$s_{2n} - s_n > \frac{1}{2} \; .$$

La condizione (*duplo longius continuetur*) richiesta da Euler per la convergenza non è soddisfatta e dunque la serie è divergente. Oggi diremmo che non è soddisfatta la condizione di Cauchy, presentando agli studenti la stessa dimostrazione data allora da Euler.

6 Continuità

Agli occhi di Euler e dei suoi contemporanei la continuità è una proprietà che attiene alle curve, prima ancora che alle funzioni. Ecco perché non ne fa parola nel vol. I dell'*Introductio*. Quel concetto è introdotto invece nelle prime pagine del vol. II. Dopo aver considerato un certo numero di curve che "possono essere descritte dal movimento meccanico continuo di un punto, che presenta l'intera curva sotto gli occhi", Euler precisa che l'origine delle curve considerate nel seguito proviene non dal movimento meccanico di un punto, ma dalle funzioni, poiché "è più analitico, più accessibile e adatto ai calcoli". Insomma, Euler ci sta dicendo che è un analista, non un geometra. Ogni funzione dà luogo a una linea, retta o curva, e viceversa, ad ogni linea è associata una funzione. Dunque, la natura di ogni curva può essere espressa da qualche funzione. Fin qui non c'è gran che di nuovo, essenzialmente l'idea risale a Descartes. Certo più nuova, e comunque decisiva per le concezioni che si affermeranno nel corso del Settecento, è l'idea di associare la continuità di una curva alle proprietà (globali) della funzione che la rappresenta. Su di esse Euler basa la sua distinzione in curve continue e discontinue (o miste, come allora si diceva).

Ecco la definizione che dà Euler: "Una curva continua è definita in modo tale, che la sua natura è espressa da una una sola, ben definita, funzione di x". Se invece una curva è definita in modo tale che sue diverse parti sono espresse da funzioni diverse della x, allora la curva si dice discontinua o mista e irregolare. Dunque la continuità è una proprietà 'in grande' delle curve, contrariamente alla concezione che si è venuta affermando nel corso dell'Ottocento, che privilegia il punto di vista locale (se non puntuale) della continuità, come del resto si insegna nei corsi di analisi. Per chiarire la questione con un esempio elementare, consideriamo la funzione $y = |x|$. Per noi si tratta di una funzione continua nell'origine, per Euler non si tratta nemmeno di una funzione, ma di *due* funzioni, $y = -x$ e $y = x$ a seconda che si consideri x negativo o positivo. Dunque, direbbe Euler, la curva corrispondente è discontinua. Si potrebbe dire che le curve continue di Euler sono quelle che oggi si chiamano *lisce*.

L'epoca in cui appare l'*Introductio* è anche il periodo in cui si accende la discussione, poi trasformatasi in aperta polemica, tra d'Alembert, Euler e Daniel Bernoulli sul problema della corda vibrante, ossia, in termini analitici, il problema della natura degli oggetti che sono soluzioni di equazioni differenziali alle derivate parziali. Sono molti gli aspetti di quella polemica, già molte volte raccontata. Uno dei più interessanti riguarda i mutamenti nel concetto di funzione. Nelle *Institutiones calculi differentialis* (1755) Euler riformula quel concetto, dandone la definizione usualmente attribuita a Dirichlet (1837). Dice Euler: Se certe quantità dipendono da altre quantità in modo tale che se le ultime cambiano anche le prime sono sottoposte a una variazione, allora queste ultime si chiameranno funzioni di quelle. Confrontiamola con quella data nell'l'*Introductio*.

Come si vede, è scomparso ogni riferimento ad 'espressioni analitiche'. Anzi, Euler si affretta a sottolineare che la sua definizione è della natura più ampia, e "comprende ogni metodo per mezzo del quale una quantità può essere determinata da altre". Comprese le equazioni differenziali alle derivate parziali. La ricerca delle soluzioni di quelle equazioni, e la discussione sulla loro natura, ha inaugurato un nuovo dominio dell'analisi nel quale, come Euler afferma in una memoria del 1767, si presentano in maniera naturale le soluzioni date da funzioni 'discontinue'.