Il fisico Leonhard Euler

David Speiser
Professore emerito
Institut de Physique Théorique
Université Catholique de Louvain (Belgio)

1. Introduzione

Ci si può chiedere: perché celebrare Euler in Svizzera? Perché festeggiare questo trecentesimo compleanno di uno scienziato che è sì svizzero, ma che in Svizzera ha vissuto soltanto durante la sua gioventù? Sono molte le ragioni per farlo, e alcune risulteranno evidenti in seguito. La Svizzera gli ha dedicato il più bel monumento che uno scienziato possa desiderare: l'edizione completa delle sue opere, di cui parleremo brevemente nel § 3.2.

Euler è probabilmente il più grande scienziato svizzero e certamente il più conosciuto.[1] Il suo nome è legato a un gran numero di scoperte in molti settori della scienza: non solo in matematica, ma anche in fisica, in astronomia e in ingegneria [1, 2]. A proposito di matematica pura e applicata, André Weil osserva [3, pag. 156]:

> *Nessuno ha mai raggiunto una posizione di indiscusso prestigio in tutte le branche della matematica, pura e applicata, pari a quella occupata da Eulero per la maggior parte del XVIII secolo.*

Cominceremo con una descrizione sommaria della vita di Euler, per poi illustrare il quadro della matematica e della fisica agli inizi del Settecento, quando egli era ancora un giovane studente. Mostreremo così come è diventato un matematico, un fisico e, più tardi, anche un affermato ingegnere. Accenneremo all'imponente edizione completa delle sue opere, con la quale lo hanno onorato sia la Svizzera sia i molti scienziati che hanno lavorato, o che ancora lavorano, a questa realizzazione. Parleremo poi soprattutto dei lavori e delle scoperte legate alla fisica e presenteremo brevemente qualche scritto per illustrare la grande versatilità dello scienziato.

2. La vita

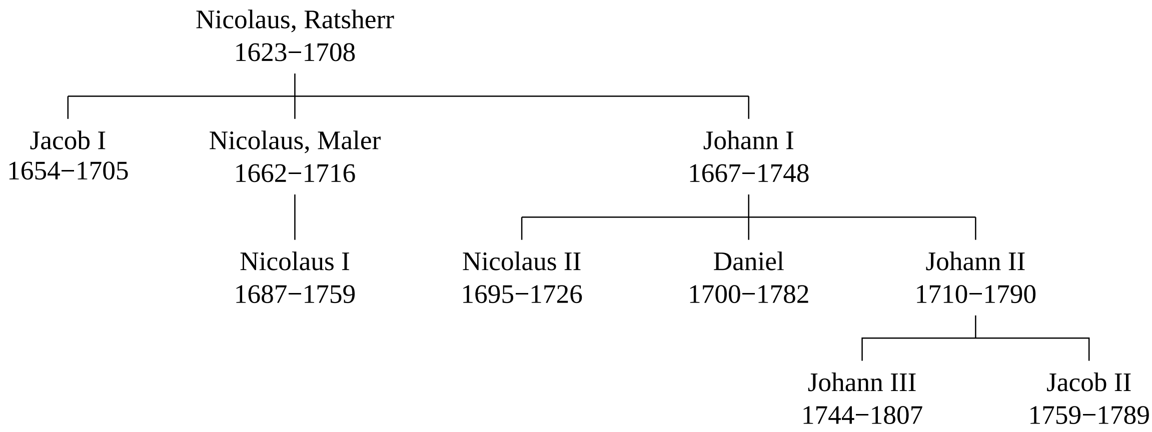
2.1. Basilea (1707–1727): giovinezza e formazione

Leonhard Euler nasce il 15 aprile 1707 a Basilea e trascorre l'infanzia a Riehen, dove suo padre è pastore protestante. Ed è proprio suo padre che gli fornisce le prime elementari nozioni di matematica, prima di iscriverlo al *Gymnasium* (allora essenzialmente una scuola di latino e, opzionale, greco) e poi, nel 1720, all'Università di Basilea. Il suo talento straordinario per la matematica si manifesta precocemente e così riesce a ottenere che il famoso

[1] Einstein, benché cittadino svizzero dalla naturalizzazione, nel 1901, fino alla morte, spesso non è ricordato come svizzero.

matematico Johann I Bernoulli gli dia lezioni private. Siccome la dinastia dei matematici e fisici Bernoulli è molto importante per gran parte della vita di Euler, ne dobbiamo parlare brevemente.

Ecco la parte dell'albero genealogico della famiglia Bernoulli che ci interessa, quella dei matematici e dei fisici:



I fratelli Jacob I e Johann I Bernoulli sono tra i primi a capire in profondità il calcolo infinitesimale di Leibniz e i primi a perfezionarlo in modo da renderlo strumento per nuove scoperte. Leibniz l'aveva sviluppato un po' più tardi di Newton, ma indipendentemente, e ne era seguita una grande controversia sulla priorità. Nella lotta tra i sostenitori di Newton e quelli di Leibniz, Johann Bernoulli combatte in prima linea per il partito di Leibniz: e, nelle dispute, Johann non è secondo a nessuno!

Ma Johann Bernoulli è anche un eccellente insegnante, il migliore del suo tempo, e i discepoli accorrono a Basilea da tutta l'Europa. Tra di loro spicca per ingegno e volontà il giovane Euler che, ancora ragazzo, è introdotto ai segreti del calcolo infinitesimale. Di questo insegnamento sarà riconoscente al suo mentore per tutta la vita. In casa di Johann, egli stringe anche una grande amicizia con tre figli del maestro, Nicolaus II, Daniel e Johann II, che diventeranno anch'essi matematici e fisici famosi. L'ultimo grande matematico e fisico della famiglia, Jacob II, sposerà una nipote di Euler.

Nel 1726, al diciannovenne Euler viene offerto un posto all'Accademia Imperiale delle Scienze di San Pietroburgo dove già lavorano – da due anni – i suoi amici Nicolaus II e Daniel Bernoulli. Accetta l'invito e lascia la Svizzera nel 1727 per non farvi più ritorno.

2.2. San Pietroburgo (1727–1741)

All'Accademia di San Pietroburgo, Euler lavora per quattordici anni e già durante questo periodo pubblica un gran numero di opere. Purtroppo l'amico Nicolaus II era morto nel 1726, dopo breve malattia, e nel 1733 anche il fratello Daniel ritorna a Basilea.

Euler si trova bene a San Pietroburgo, sia nella vita privata che in quella professionale, sebbene politicamente la Russia viva un periodo di intrighi. Si sposa con una Svizzera di San Gallo, Katharina Gsell, figlia di un pittore di corte di Pietro il Grande, che gli darà tredici tra figlie e figli, di cui otto moriranno però alla nascita o in giovanissima età. Nel 1740, alla morte dell'imperatrice Anna Ivanovna, la situazione politica in Russia si fa molto instabile cosicché, quando riceve dal re di Prussia Federico II l'invito a diventare membro della costituenda Accademia di Berlino, Euler accetta.

Durante il regno del padre di Federico II, la *Societas Regia Scientiarum* – il cui primo presidente era stato Leibniz – aveva perduto il suo antico splendore e il nuovo re aveva l'ambizione di restaurarne la passata gloria nella sua *Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Prusse*.

2.3. Berlino (1741–1766)

A Berlino Euler è nominato direttore della *Classe de Mathématiques* dell'Accademia e il re, seppur incapace di apprezzare la sua matematica e la sua fisica, si rende ben conto delle sue straordinarie capacità. Infatti, oltre ai lavori amministrativi all'Accademia, lo incarica anche di molti lavori pratici come, ad esempio, la produzione di carte geografiche e la correzione del livello del canale di Finow. Tuttavia, agli occhi del re, lo scienziato ha il difetto di non essere francese o aristocratico e per questo Federico non lo ricopre di onori, come fa con molti altri meno geniali di lui. Anche le restrizioni imposte dalle guerre del re sono un motivo di preoccupazione. Malgrado queste frustrazioni, Euler continua a lavorare e a produrre in modo prodigioso.

Il presidente dell'Accademia è un francese, il marchese de Maupertuis [4]. Al suo nome è ancora oggi legato il *principio di minima azione*, un principio variazionale molto potente che permette di determinare la traiettoria di un sistema meccanico conoscendone le posizioni iniziali e finali. Nel Settecento il calcolo delle variazioni raggiunge la maturità, grazie a Euler e a Lagrange, e apre un nuovo campo alla matematica. In fisica, dove è nato, questo calcolo trova in particolare applicazione nei principi variazionali che, ancora oggi, richiedono di essere formulati con grande precisione e finezza. Maupertuis non è all'altezza di questo compito e, oltre a una formulazione piuttosto vaga, inserisce queste idee matematiche in un quadro filosofico-religioso.

Un matematico svizzero, Samuel König, che credeva di aver trovato in una lettera di Leibniz una formulazione del principio di minima azione, lo scrive in una pubblicazione e ne nasce una questione di priorità tra i sostenitori di Leibniz e Maupertuis. Il povero Maupertuis vien messo in ridicolo nientemeno che da Voltaire, in quegli anni a Berlino e molto venerato da Federico, con un famoso libello dal titolo *Diatribe du docteur Akakia, médecin du Pape*. Nel grande scandalo pubblico che ne segue Euler cerca di sostenere al meglio il presidente dell'Accademia. Voltaire non poteva avere un'opinione ben fondata in un campo della matematica che ancora oggi è tra i più delicati e raffinati di tutta l'analisi, ma il suo scritto provoca un grande chiasso tra i cosiddetti "intellettuali". Finalmente il re, che non voleva veder ridicolizzato pubblicamente il presidente della sua Accademia, interviene e fa bruciare sulla pubblica piazza il pamphlet del filosofo. Quando Voltaire lascia Berlino, in disaccordo con Federico, fa pubblicare di nuovo il libello, assieme ad altri scritti sulla disputa, in una raccolta dal titolo *Histoire du docteur Akakia et du natif de Saint-Malo*. Abbiamo raccontato questa storia, in sé non molto importante, per illustrare un po' la situazione di Euler a Berlino e anche perché, ancora oggi, si raccontano molte stoltezze su questo incidente. Aggiungiamo anche che il prof. Herbert Breger, direttore del *Leibniz-Archiv* di Hannover – uno specialista di Leibniz che ha lavorato molto su questo faccenda – pensa che la lettera attribuita al grande scienziato sia un falso.

Nel 1766 Euler accetta l'offerta dell'imperatrice Caterina II di Russia di ritornare all'Accademia di San Pietroburgo. Il re non vuole dargli il permesso di abbandonare il suo posto a Berlino e di uscire dalla Prussia, ma Caterina insiste e Federico deve rassegnarsi alla perdita dell'esponente più famoso e più fecondo della sua Accademia in quanto dipende, nella politica estera, dalla benevolenza dell'imperatrice.

2.4. San Pietroburgo (1766−1783)

Questo terzo e ultimo periodo della vita di Euler fuori dalla sua patria è, grazie alla benevolenza dell'imperatrice, il più splendido e presumibilmente anche il più felice. Caterina lo accoglie con tutti gli onori e, oltre a un salario generoso, gli offre una bella casa e fa di tutto per rendergli la vita piacevole. Anche in seguito lo riceve regolarmente a palazzo per discutere con lui in privato dei bisogni dell'Accademia e di altri temi, molto probabilmente in tedesco poiché l'imperatrice è per nascita una principessa tedesca. Si può dire che, contrariamente a Federico, lei ha capito quale tesoro ha trovato in Euler: lo sostiene in ogni occasione e per ogni necessità e, pur affidandogli molti incarichi, lo fa sempre con grande intelligenza, comprensione e rispetto.

Anche durante questo secondo periodo a San Pietroburgo la produzione di Euler è enorme: promette addirittura di produrre così tanti lavori scientifici che l'Accademia ne potrà pubblicare ancora per vent'anni dopo la sua morte. E mantiene la parola: quei lavori sono stati pubblicati per molto più di vent'anni (anche se non consecutivi), gli ultimi nel 1830 e poi nei due volumi della *Leonhardi Euleri Opera Postuma* del 1862.

Come a Berlino, anche in Russia Euler esegue molti lavori per il governo, specialmente per la flotta: in particolare, scrive un'opera importante sulle costruzioni navali. Muore a San Pietroburgo, di apoplessia, il 18 settembre 1783 e in questa città si può ancora oggi vedere la sua tomba nel monastero di Aleksandr Nevskij.

3. Panoramica dei lavori di Euler in meccanica

D'ora innanzi ci occuperemo del campo prioritario dell'attività di Euler, vale a dire dei suoi lavori scientifici. Tranne qualche accenno indispensabile a risultati matematici, ci limiteremo a parlare delle sue ricerche in fisica. Per comprendere la loro portata, è necessario un excursus sullo stato della matematica e della fisica quando Euler inizia i suoi studi.

3.1. Matematica e fisica agli inizi del Settecento

Alcuni nomi e tre nuovi campi di lavoro devono essere citati.

- Il primo campo è quello della nuova *geometria delle coordinate* – storicamente detta analitica – sviluppata da Descartes agli inizi del Seicento: una creazione che rivoluziona totalmente la ricerca matematica e, perciò, anche la ricerca in fisica.

- Il secondo campo, molto legato al primo, è quello del calcolo infinitesimale, sviluppato indipendentemente da Newton e da Leibniz nella seconda metà del Seicento. È nella forma che Leibniz gli ha dato, cioè come *calcolo differenziale e integrale*, che i fratelli Jacob I e Johann I Bernoulli lo sviluppano e lo incrementano. Come abbiamo detto nel § 2.1, Euler si impadronisce di questo nuovo strumento potentissimo in matematica, in fisica e in ingegneria sotto la guida di Johann.

Pure nel § 2.1 abbiamo menzionato la lotta tra i seguaci di Newton e quelli di Leibniz per la priorità della scoperta del calcolo infinitesimale e anche il fatto che il più pugnace nel partito di Leibniz è Johann I Bernoulli. Ma malgrado la lotta tra i due partiti sia appassionata e il suo maestro sia il portabandiera del partito di Leibniz, l'ammirazione di Euler per Newton e la sua opera non viene meno, un'ammirazione che conserverà per tutta la vita: nei suoi lavori Newton è chiamato molte volte *Summus Neutonus* ("Sommo Newton"). Grazie a questa lotta, già da studente Euler può farsi un'immagine della vita nella ricerca scientifica. È però importante notare che egli rimarrà sempre una persona singolarmente candida e generosa, aliena da lotte di priorità.

- Alla fine del Seicento Newton pubblica la sua teoria della *gravitazione universale*. Questa scoperta fondamentale apre alla fisica, all'astronomia e alla matematica un terzo campo di ricerca e per molto tempo dominerà la fisica teorica. Euler lavorerà su questa teoria per tutta la vita.

  Qui dobbiamo aggiungere che Johann I Bernoulli aveva tentato, però senza successo, di completare la teoria di Newton con la formulazione di un meccanismo di trasmissione della forza di gravità, che anche Newton era convinto dovesse esistere. Come vedremo nel § 4.2, troviamo nei lavori di Euler tentativi che vanno nella stessa direzione, ma questo problema sarà risolto soltanto nel primo quarto del secolo scorso. Si deve ritenere che Euler abbia ricevuto da Johann un insegnamento non soltanto profondo e rigoroso, ma anche molto poliedrico.

3.2. La *Leonhardi Euleri Opera Omnia*

Prima di parlare dei lavori e dei risultati di Euler in meccanica, dobbiamo dire alcune parole sull'edizione completa delle sue opere, per renderci conto della sua enorme estensione.

La *Leonhardi Euleri Opera Omnia* [5], pubblicata a partire dal 1911 (in volumi in quarto, da 300 a 700 pagine ciascuno), è basata sull'indice redatto dallo svedese Gustav Eneström.[2] Questo catalogo elenca 866 scritti, a ognuno dei quali è assegnato un numero – da 1 a 866, in ordine di pubblicazione – detto *numero di Eneström*, cui viene anteposta la lettera "E". La sua redazione è stata un lavoro da certosino per il quale dobbiamo essere riconoscenti all'autore.[3]

Com'era in vigore all'inizio del Novecento, l'edizione è stata suddivisa in tre parti: matematica, meccanica e fisica. A queste tre sezioni se n'è aggiunta in seguito una quarta dedicata alla corrispondenza, ai manoscritti non ancora pubblicati, agli appunti e ai diari, in gran parte non inclusi nell'indice di Eneström. L'*Opera mathematica* (*Series prima*) comprende 29 volumi (30 tomi [il vol. 16 in 2 parti] tutti pubblicati), l'*Opera mechanica et astronomica* (*Series secunda*), che contiene anche gli scritti d'ingegneria, include 31 volumi (in 32 tomi [il vol. 11 in 2 parti] tutti pubblicati, tranne i voll. 26 e 27) e l'*Opera physica, Miscellanea* (*Series tertia*) comprende 12 volumi (tutti pubblicati, tranne il vol. 10). Siccome oggi consideriamo la meccanica come una parte della fisica, vediamo che il numero dei volumi dedicati alla fisica è ben più grande di quello dei volumi di matematica. E già

[2] *Die Schriften Eulers chronologisch nach den Jahren geordnet, in denen sie verfasst worden sind*, in "Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung", Ergänzungsband **4** (3 Teile), 1910–1913.

[3] Vedi anche *The Euler Archive* in http://www.math.dartmouth.edu/~euler/.

questo dovrebbe impedire ai fisici di parlare di Euler "soltanto" come di un matematico.

La parte *Commercium epistolicum* (*Series quarta A*) è in corso di pubblicazione e sono previsti 10 volumi, di cui finora ne sono stati pubblicati 4. Nella parte *Manuscripta, Adversaria* (*Series quarta B*) dovrebbero apparire i manoscritti non ancora pubblicati, gli appunti e i diari in circa 7–8 volumi, ma nessuno è ancora stato pubblicato e tutto è ancora da pianificare in dettaglio.

3.3. I più importanti contributi di Euler alla fisica

Quali sono i maggiori contributi scientifici di Euler? Su questa domanda si può ovviamente discutere parecchio ma, limitandoci alla fisica, è in meccanica che si trovano i risultati più importanti [6, 7].

Possiamo considerare la meccanica (classica) come composta dei quattro settori che appaiono nella tabella seguente:

Meccanica	Equazioni basilari	
Sistemi con un numero finito di gradi di libertà	Meccanica dei "punti": $\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{F}$ *Newton*	Meccanica dei corpi rigidi: $\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{F}$ e $\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{M}$ *Euler*
Sistemi con un numero infinito di gradi di libertà	Meccanica dei fluidi: $\rho\dot{\mathbf{u}} + \nabla p = \mathbf{f}$ e $\dfrac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\mathbf{u}) = 0$ *Euler*	Meccanica dei corpi elastici: $\rho\dot{\mathbf{u}} - \nabla\cdot\sigma = \mathbf{f}$ e $\dfrac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\mathbf{u}) = 0$ *Cauchy*

<u>Legenda:</u> $\dot{} = \dfrac{d}{dt}$ (t : tempo)

$\mathbf{X}(t)$: coordinate cartesiane ortonormate del centro di massa all'istante t (origine O)

$\mathbf{P} = M\dot{\mathbf{X}}$: quantità di moto totale	M : massa totale
$\mathbf{L}$: momento angolare totale relativamente a O	$\mathbf{F}$: forza esterna totale
$\mathbf{M}$: momento totale delle forze esterne relativamente a O	ρ : densità del fluido o corpo
$\mathbf{u}$: velocità del fluido o corpo	p : pressione interna del fluido
$\mathbf{f}$: densità delle forze esterne	σ : tensore simmetrico degli sforzi

con le variabili $(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t)$ per $\mathbf{F}$ e $(\mathbf{x}(t), t)$ per $\rho, \mathbf{u}, p, \mathbf{f}, \sigma$ (coordinate cartesiane ortonormate)

La tabella, in cui le equazioni sono espresse nella forma vettoriale moderna, mostra i due apporti fondamentali di Euler alla meccanica. La prima colonna si riferisce alla meccanica detta dei "punti" e alla meccanica dei fluidi. Abbiamo scritto "punti", tra virgolette, perché i punti considerati non sono necessariamente punti geometrici, ma i centri di massa di corpi estesi. Per questi, come per i fluidi perfetti, la base dinamica è la seconda legge di Newton (la legge sulla quantità di moto). Ma per i corpi rigidi (estesi) e per i corpi elastici della seconda colonna abbiamo bisogno anche dell'equazione relativa al momento angolare (che, nel caso speciale di un asse di rotazione fisso, esprime la proporzionalità dell'accelerazione circolare e del momento totale delle forze esterne rispetto all'asse). Per i dettagli ci riferiamo alle introduzioni ai volumi 10, 11/1, 12 e 13 della *Leonhardi Euleri Opera Omnia, Series II* del massimo esperto della meccanica del Settecento, Clifford A. Truesdell.[4] Raccomandiamo vivamente la lettura di questi testi [8, 9, 10].

Dalla meccanica dei "punti", un primo passo in avanti porta Euler alla meccanica dei fluidi perfetti e quindi allo studio di sistemi con un numero infinito di gradi di libertà. Questa di Euler è la prima teoria fisica espressa usando ciò che noi oggi chiamiamo *campo*. Non importa che questo *campo* non si trasforma sotto il gruppo di Poincaré, come i campi con i quali lavoriamo di solito nella fisica moderna, ma sotto il gruppo di Galileo. Fondamentale è che Euler usa un nuovo strumento matematico: le *equazioni differenziali alle derivate parziali*, che domineranno la fisica della seconda metà del Settecento e quella dell'Ottocento. La teoria di queste equazioni viene sviluppata, all'inizio, proprio da Euler e da d'Alembert. Inoltre, come vedremo nel § 4.2, l'idrodinamica (dei fluidi perfetti) guiderà le ricerche ulteriori di Euler.

Anche il secondo passo in avanti compiuto da Euler preannuncia un campo della fisica moderna. Per formulare le equazioni di moto di un corpo rigido, egli utilizza gli angoli che ancora oggi portano il suo nome: gli *angoli di Euler*. Questi angoli sono fondamentali per la descrizione del moto generico di un corpo rigido tridimensionale e parametrizzano quello che chiamiamo gruppo $\mathbf{SO}(3)$ delle rotazioni. Euler si avvicina moltissimo all'idea, se non al concetto esatto, di questo gruppo (e d'altronde spesso, nelle sue ricerche, considera indirettamente altri gruppi). Usa i suoi angoli come parametri per descrivere l'azione di $\mathbf{SO}(3)$ sulle coordinate, e si tratta del primo studio dell'azione di un gruppo di Lie nella storia della matematica.

Ma nella teoria euleriana della meccanica dei corpi rigidi c'è un'altra grande scoperta. Di un corpo rigido, gli angoli di Euler caratterizzano soltanto l'aspetto cinematico e resta quindi ancora da descriverne la dinamica. L'inerzia di un punto è misurata da una grandezza scalare, mentre la misura dell'inerzia di un corpo rigido (ad esempio di un pezzo di legno o di un libro chiuso da un spago) richiede una grandezza più complicata, di cui dobbiamo conoscere le proprietà di trasformazione. Euler soddisfa a questa necessità introducendo quello che noi chiamiamo *tensore d'inerzia*.

Oggi in tutta la fisica – in quella quantistica più ancora che in quella classica – si usano oggetti matematici analoghi, cioè *tensori* o, più precisamente, *campi tensoriali*. Questi vengono classificati secondo il *grado di covarianza* o *controvarianza*[5] e secondo le regole

[4] D'ora innanzi indicheremo con O.X,a,... i volumi a, ... della *Leonhardi Euleri Opera Omnia, Series X*.

[5] Negli spazi con metrica riemanniana, ogni grado di covarianza può essere trasformato in un grado di controvarianza di un tensore associato, e viceversa, grazie al tensore metrico fondamentale. Nel caso dello spazio fisico euclideo, i due tensori coincidono.

di trasformazione delle *componenti* rispetto ai cambiamenti di base. I tensori più semplici su uno spazio vettoriale, dopo gli scalari (grado 0), i vettori e le forme lineari o covettori (grado 1), sono i tensori di grado (totale) 2. Il tensore d'inerzia è un tensore simmetrico di grado 2 ed è il primo tensore di grado superiore a 1 studiato in modo sistematico.

Con questo nuovo concetto, Euler è in grado di sviluppare la dinamica dei corpi rigidi poiché sa che $\mathbf{L} = \theta\boldsymbol{\omega}$, dove θ è il tensore d'inerzia e $\boldsymbol{\omega}$ la velocità angolare del corpo. Le sue ricerche in questo campo culminano nei tre lavori *Découverte d'un nouveau principe de mécanique* [E177] del 1750, *Du mouvement de rotation des corps solides autour d'un axe variable* [E292] del 1758 e *Nova methodus motum corporum rigidorum determinandi* [E479] del 1775.[6]

Frans Cerulus [11] ha osservato che Euler riesce a comprendere il significato e la dinamica del momento angolare grazie ai suoi studi sulle costruzioni navali, studi pubblicati in 12 scritti (tra i quali due libri). È importante sottolineare che Euler si rende conto che la legge di Newton sulla quantità di moto non basta per la meccanica dei corpi rigidi: è necessaria anche una legge analoga sul momento angolare e questa seconda legge è indipendente dalla prima, come Truesdell e altri hanno mostrato [12].

Ci resta da esaminare il quarto settore della meccanica: la teoria dell'elasticità. Anche in questo campo i contributi di Euler sono straordinari e rimandiamo gli interessati ai due tomi O.II,11/1,11/2: il primo contiene i lavori di Euler, il secondo l'"introduzione" di Truesdell. Questa introduzione è in realtà una storia completa delle teorie dell'elasticità fino alla fine del Settecento. Per fortuna, e molto generosamente, il comitato editoriale ha voluto includere questo monumento a Euler nell'*Opera Omnia*.

Euler non riesce però a porre le basi della meccanica dei corpi elastici, come invece ha fatto per la meccanica dei fluidi e per quella dei corpi rigidi. Ci riuscirà Cauchy, negli anni venti dell'Ottocento, con l'introduzione delle "pressions ou tensions", componenti del tensore simmetrico di grado 2 che noi chiamiamo *tensore degli sforzi*.[7]

4. L'*Anleitung zur Naturlehre*

Euler scrive l'*Anleitung zur Naturlehre* [E842] probabilmente negli anni 1756–1758, ma il libro sarà però pubblicato solo dopo la sua morte, nel 1862.[8] In questa *Guida alla filosofia naturale*, non destinata esclusivamente ai fisici e ai matematici, egli spiega le sue idee sulle leggi che governano la natura inorganica [13]. È un'opera ambiziosa, un programma in gran parte di carattere speculativo; ma è proprio grazie a questa sua particolarità che possiamo entrare nel mondo delle idee di Euler e vedere come molte di queste idee anticipino risultati ulteriori.

Prima di accingerci a esaminare più da vicino l'*Anleitung* facciamo notare che, negli anni 1760–1762, Euler redige a Berlino 234 lettere indirizzate a Friederike, prima figlia, allora quindicenne,[9] del margravio Heinrich Friedrich von Brandenburg-Schwedt, allo scopo

[6] Nei volumi O.II,5 pp 81–108 il primo, O.II,8 pp. 200–235 il secondo e O.II,9 pp. 99–125 il terzo.

[7] La simmetria del tensore degli sforzi corrisponde al teorema del momento angolare nella meccanica dei corpi rigidi [12, pag. 150].

[8] *Anleitung zur Natur-Lehre, worin die Gründe zu Erklärung aller in der Natur sich ereignenden Begebenheiten und Veränderungen festgesetzet werden*, in "Leonhardi Euleri Opera Postuma 2" pp. 449–560, Petropoli 1862.

[9] Nel 1764 diventerà badessa dell'abbazia di Herford (*Fürstinäbtissin zu Herford*).

di istruirla in astronomia, meccanica, acustica, ottica, musica, logica, filosofia e teologia. Queste lettere, pubblicate a San Pietroburgo in tre tomi dal 1768 al 1762 con il titolo *Lettres à une princesse d'Allemagne sur divers sujets de physique & de philosophie*,[10] hanno un grande successo editoriale e diventano un vero bestseller tra la fine del Settecento e l'inizio dell'Ottocento. Si tratta infatti di un'opera di divulgazione scientifica straordinaria, che per ampiezza e profondità va ben oltre il progetto che l'aveva originata, cioè l'istruzione di un'adolescente. Nelle *Lettres*, Euler presenta una sua visione unitaria in cui le scienze della natura inorganica si interconnettono con altri campi della conoscenza e sviluppa alcuni temi solo abbozzati nell'*Anleitung*.

4.1. Il piano dell'opera

Non è possibile, in questa presentazione, analizzare tutti i dettagli del libro ma, anche se ci interessano soltanto alcuni capitoli, è necessario avere una visione d'insieme per essere in chiaro sulle idee centrali.

L'*Anleitung*, così come ci è pervenuta, occupa le pagg. 16–178 del volume O.III,1. Poiché mancano la fine del capitolo 5 e l'inizio del capitolo 6 (si tratta del titolo e di gran parte del capitolo, che pare essere un'introduzione al cap. 7), e queste parti mancanti occupavano probabilmente circa altre 7 pagine, abbiamo un'opera di approssimativamente 170 pagine. Ci sono ragioni per pensare che, anche con queste pagine, l'opera non sia completa e ci possiamo quindi chiedere perché Euler non l'abbia terminata. Varie ipotesi sono possibili e non possiamo escludere motivi banali; accenneremo a una di queste ipotesi alla fine della sez. 5. La lettura dell'*Anleitung* è caldamente raccomandata a tutti coloro che si interessano alle idee di Euler.

Nella sua forma attuale il libro consiste di 21 capitoli che possono essere raggruppati come segue:

- **Capitoli 1–6**: dopo una breve introduzione (cap. 1), vengono discusse quelle che Euler ritiene siano le quattro proprietà fondamentali della materia ordinaria:
  * l'estensione (cap. 2), quindi lo *spazio*;
  * la mobilità (cap. 3), quindi il *tempo* e la *velocità*;
  * la persistenza (cap. 4), quindi l'*inerzia newtoniana*;
  * l'impenetrabilità (cap. 5), quindi la *resistenza reciproca dei corpi.*
- **Capitoli 7–11**: contengono un'introduzione generale ai principi della meccanica, tra i quali è incluso quello che oggi chiamiamo *principio di relatività* [14, 15].
- **Capitoli 12–14**: Euler introduce e sviluppa la sua ipotesi principale: ci sono soltanto *due tipi essenziali di materia*, la "grossa" (materia pesante) e la "sottile" (etere), e tutti i materiali percepiti dai nostri sensi sono combinazioni di questi due.
- **Capitoli 15–18**: sono analizzate le possibili forme sotto cui ci appare la materia: fluida, solida, elastica.
- **Capitolo 19**: è una digressione sulla gravità.

[10]Due tomi nel 1768, con le lettere I–LXXIX [E343] e LXXX–CLIV [E344], il terzo nel 1772, con le lettere CLV–CCXXXIV [E417]. Troviamo queste lettere nei due volumi O.III,11,12.

- **Capitoli 20–21**: vengono esposti i principi dell'idrostatica e dell'idrodinamica e si fa palese che sono queste due scienze a guidare la speculazione euleriana esposta in questo libro.

In quest'opera Euler discute esplicitamente il principio di relatività in natura, cioè il più importante principio di simmetria spazio-temporale, risolvendo in favore di Newton la disputa tra quest'ultimo e Leibniz[11] sullo spazio e sul tempo.

Nell'*Anleitung* le simmetrie spaziali e temporali giocano però anche un altro ruolo, decisivo seppur nascosto. A partire dal 1750 Euler comincia a comprenderne le principali conseguenze: grazie al principio di relatività abbiamo l'unione dello spazio e del tempo e dobbiamo formulare le leggi della natura tramite relazioni covarianti tra tensori.[12] È lui il primo a constatarlo e perciò dal 1750 usa *forme manifestamente covarianti* delle leggi della meccanica, vale a dire utilizza coordinate cartesiane ortonormate. Queste coordinate sono il miglior surrogato dell'uso di vettori e tensori poiché rendono manifeste le simmetrie spazio-temporali.

Le equazioni dell'idrodinamica (dei fluidi perfetti) sono il primo frutto di questa filosofia che Euler vuole applicare anche alla formulazione delle azioni reciproche dei corpi. Come abbiamo già osservato alla fine del § 3.3, questo programma sarà completato soltanto da Cauchy con l'introduzione del tensore degli sforzi.

4.2. L'idrodinamica come guida

La visione d'insieme dell'*Anleitung*, nel paragrafo precedente, ci ha mostrato che quest'opera non è una speculazione filosofica come quella di Leibniz e dei suoi successori – che deducono le leggi fisiche fondamentali da principi metafisici – ma una riflessione interna alla scienza stessa. Euler si domanda sempre qual è la formulazione matematica di un fenomeno osservato in natura.

L'introduzione, nei primi capitoli, delle quattro proprietà fondamentali della materia è una presentazione e discussione degli elementi costitutivi delle equazioni dei fluidi perfetti che Euler ha trovato nell'articolo *Principes généraux du mouvement des fluides* [E226] del 1755:[13]

$$\rho\dot{\mathbf{u}} + \nabla p = \mathbf{f}$$

e l'*equazione di continuità*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\mathbf{u}) = 0\,.$$

Le grandezze che appaiono in queste equazioni corrispondono alle quattro proprietà nel modo seguente:

∗	$\mathbf{x}, d\mathbf{x}$	all'estensione;
∗	$t, dt, \mathbf{u}, d\mathbf{u}$	alla mobilità;
∗	ρ	alla persistenza (l'inerzia newtoniana);
∗	p	all'impenetrabilità (in quanto indica la pressione interna del fluido).

[11] Più esattamente, tra il filosofo Samuel Clarke – personalità di spicco del circolo newtoniano – e Leibniz.

[12] Qui *covarianza* ha il senso fisico di *invarianza in forma* della formulazione di una legge fisica sotto l'azione di un gruppo di trasformazione delle coordinate.

[13] Nel volume O.II,12 pp. 54–91.

Si deve a Euler l'introduzione del concetto di *pressione interna* di un fluido come una densità scalare della sua energia interna. Nelle equazioni dei fluidi perfetti c'è anche la *densità delle forze esterne*[14] **f** che nella maggior parte delle applicazioni rappresenta la forza peso, ma può anche esprimere la resistenza di un materiale, dunque i vincoli e le tensioni interne di un corpo.

Per ben capire le idee di Euler, dobbiamo ricordare due limitazioni della fisica classica:

1. Se si escludono le equazioni dell'equilibrio, la meccanica classica parla soltanto del movimento dei corpi e della propagazione dell'energia nello spazio e nel tempo. Senza fare ipotesi e congetture addizionali, la fisica classica non può precisare cosa "sono" effettivamente questi corpi, vale a dire qual è la loro struttura. Oggi sappiamo che per poterlo fare è necessaria la meccanica quantistica.

2. La meccanica classica presuppone spesso l'esistenza di forze esterne, per esempio la gravitazione, senza poter indicare un meccanismo di trasmissione (v. la fine del § 3.1).

Euler vuole colmare queste due lacune.

Cominciamo con la seconda. Per Euler, la densità delle forze esterne **f** nelle equazioni dei fluidi perfetti risulta sempre, in ultima analisi, dall'impenetrabilità della materia, vale a dire dalla pressione che un oggetto esercita su un altro. In altre parole, ciò che osserviamo in natura è un sistema di corpi e fluidi interagenti che noi diremmo *accoppiati dinamicamente*. L'accoppiamento è il risultato dell'impenetrabilità dei materiali, e tutti i fenomeni osservati possono essere spiegati per mezzo di tali interazioni.

Veniamo ora alla prima lacuna. È fondamentale la domanda seguente: quanti tipi diversi di materia troviamo in natura? Un'infinità, come può sembrare a un osservatore ordinario, o un numero finito di tipi che concorrono a comporre tutti gli altri materiali? Secondo Euler, almeno un tipo di materia fluida molto rarefatta e molto elastica è responsabile dei fenomeni ottici, elettrici, magnetici e forse anche della gravitazione: l'*etere*. Ritorneremo sull'etere e sulla questione se ne esista uno solo o se ne esistano diversi nel § 4.3.

Cosa possiamo dire dei materiali ordinari: ad esempio i metalli, i liquidi, i gas, gli isolanti, senza dimenticare la materia organica? Ne esiste veramente una varietà infinita o possiamo sperare in un ordine ben regolato – matematico – di tutto ciò che osserviamo? Questa è la domanda alla quale Euler cerca di trovare una risposta. Ma prima di presentare le sue idee in proposito, dobbiamo osservare che la chimica, così come noi la conosciamo oggi, non esisteva nel Settecento. Soltanto pochissimi elementi erano stati identificati e nessuna legge generale era conosciuta. Dunque non c'era molto che potesse guidare la ricerca di Euler, e certo niente di paragonabile, per importanza e applicabilità, alle sue equazioni dinamiche dei fluidi.

4.3. La "materia grossa" e la "materia sottile"

Dal trattato *Dissertatio de magnete* [E109] del 1748,[15] da altre opere e dalle lettere sul magnetismo e sull'elettricità nelle *Lettres*, che precisano quanto detto nell'*Anleitung*, sappiamo che Euler suppone che tutta la materia ordinaria sia bucherellata da "pori" e traforata da un intreccio di "canali" nei quali l'etere può scorrere liberamente e permearla. La forma e la

[14] Forze per unità di volume.

[15] Nel volume O.III,10 pp. 138–179.

grandezza di questi pori e canali caratterizzano ogni materiale e possono variare parecchio. Ma se è dalle configurazioni dei canali che i diversi materiali si distinguono, la materia di base è però la stessa per tutti. È molto pesante, di densità costante e riempie soltanto una piccola parte dei corpi, che dunque consistono di goccioline di materia pesante tra le quali passano i canali percorsi dall'etere.

Per Euler esistono quindi soltanto due tipi fondamentali di materia: la "grossa", ossia la materia pesante, e la "sottile". Quest'ultima è l'etere (*die subtile Himmelsluft*), responsabile della luce, dell'elettricità, del magnetismo e forse anche della gravità. Di materia grossa sono fatti i corpi, che si distinguono per la loro struttura geometrica interna; la materia sottile determina, in parte, questa struttura.

Nell'*Anleitung*, Euler lascia aperto il problema se esista un solo etere o più di uno, di diversa densità, che chiamerebbe comunque col nome comune di etere. Pensa che, finché la descrizione dei fenomeni naturali non lo renda necessario, non si devono introdurre altri tipi fondamentali di materia: sarebbe contro le regole di una sana filosofia naturale aumentare, solo con la nostra immaginazione, il numero di materie sottili (v. § 6.3).

Per non dare l'impressione che Euler faccia un discorso vuoto, è importante ricordare che le sue teorie sono sempre basate sui principi della meccanica: nascono dalla sua lunga frequentazione della meccanica dei continui. I due tipi fondamentali di materia – la grossa e la sottile – ubbidiscono alle leggi della natura, in particolare a quelle dell'idrodinamica. È questa base meccanica che distingue la speculazione di Euler da molte altre e che la rende consistente e coerente.

Prima di discutere dell'importanza dell'*Anleitung*, dobbiamo chiederci in quali casi Euler fosse sulla strada giusta, in quali invece seguisse una direzione sbagliata e anche quali sue idee furono portate avanti dai fisici dell'Ottocento.

Che tutti i materiali ordinari sono fatti di una sola materia dovette sembrare all'epoca un'idea fantastica. Anche gli elementi delle tavole di Mayer e Mendeleev, punto d'arrivo di una lunga serie di ricerche a più di cento anni dalla redazione dell'*Anleitung*, sono sempre molto lontani da questa idea. Le piccolissime gocce di materia pesante hanno però una curiosa somiglianza con i nuclei atomici della fisica moderna, che contengono più del 99% della massa di tutti corpi. E benché sia assurdo cercare una connessione diretta tra le goccioline euleriane e i nuclei, l'analogia mostra come le idee di Euler fossero sensate e andassero nella giusta direzione.

Ma allora, che cosa determina la struttura specifica dei corpi ordinari, al di là della struttura geometrica interna che li distingue? Euler non lo dice, e ovviamente non lo può dire: tutto il mondo dell'atomo, la chimica e anche la cristallografia sono assenti dalla sua opera. La chimica moderna di Lavoisier e dei suoi eredi non è ancora nata; Euler si è probabilmente occupato di cristalli, ma le sue conoscenze in questo campo non possono guidarlo molto lontano e l'elettrone e la meccanica quantistica sono ancora in un futuro molto distante. Non è una sorpresa che niente di tutto questo sia presente nell'*Anleitung*.

Il discorso è diverso per l'etere, la materia sottile. Qui, come prova la testimonianza di Faraday (probabilmente il più grande fisico sperimentale dell'Ottocento) e di altri, Euler è sulla buona strada e le sue idee avranno seguaci. L'ottica, l'elettricità e il magnetismo saranno uniti da Maxwell in una sola entità, il campo elettromagnetico, del quale l'etere di Euler è un precorritore.

Sarebbe stato un errore se Euler avesse dichiarato senza riserve l'etere responsabile anche della gravitazione. Dopo i tentativi di Einstein, Weyl e molti altri, si può dubitare che esista una via diretta per unificare la gravitazione e l'elettromagnetismo, ma è sempre possibile che questo obiettivo possa essere raggiunto se si considerano pure le forze nucleari (e quindi la materia pesante). In questo caso abbiamo però bisogno anche di campi spinoriali. Euler, benché non dubiti che l'ottica, l'elettricità e il magnetismo siano unificabili, e nell'*Anleitung* ritenga l'etere responsabile anche della gravità, mantiene in seguito un certo riserbo sull'inclusione della gravitazione in questa unificazione.

4.4. La rilevanza e la risonanza della filosofia naturale di Euler

Le idee particolari, alcune stimolanti e in parte fruttuose, esposte nel paragrafo precedente non sono l'aspetto più interessante dell'*Anleitung*. Ciò che oggi più ci impressiona è la vastità del progetto di Euler, che vuol fondare un sistema coerente, capace di descrivere tutta la natura inorganica, partendo soltanto da alcuni principi della meccanica e da poche altre ipotesi.

Newton, nelle famose ultime *Queries* 28–31 della sua *Ottica*,[16] aveva abbozzato alcune idee in questa direzione, ma erano rimaste soltanto *queries*, cioè domande. Egli non aveva a disposizione il nuovo strumento creato da Euler e d'Alembert: le equazioni alle derivate parziali, base matematica di ogni teoria di campo. Nell'*Anleitung*, l'ambizione di Euler è ben più grande di quella di Newton e la realizzazione del progetto fa progressi. Questo evidenzia quanto la matematica e la fisica fossero diventate più potenti da quando le equazioni alle derivate parziali erano state usate per formulare la meccanica dei continui. Ed è grazie a questo nuovo strumento matematico che Euler è il primo a poter immaginare una *teoria di campo unificata*, un'idea e una speranza che sono oggi al centro delle ambizioni dei fisici.

Oggi sappiamo che una caratteristica del progresso scientifico – forse la più importante per misurarlo – è data dal confluire di due o più settori della scienza in una base comune dalla quale si possono derivare tutti i risultati. Euler è probabilmente il primo a prevedere la possibilità di una tale sintesi, per di più in un caso di importanza centrale per tutta la fisica. Per lui l'ottica, l'elettricità e il magnetismo hanno una stessa base: l'etere.

Infatti, secondo Euler possiamo ridurre tutti i fenomeni fisici, con l'esclusione eventuale della gravitazione, alle interazioni di quattro campi scalari (le densità e le pressioni della materia pesante e dell'etere) e due vettoriali (le velocità della materia pesante e dell'etere), interconnessi e governati da equazioni alle derivate parziali. Visto come un tentativo, il modo di procedere di Euler non è molto diverso da quello usato nella fisica moderna per unificare teorie di campo, nonostante le nostre conoscenze molto più approfondite della struttura della materia e l'enorme quantità di dati empirici accumulati. Ancora oggi, le equazioni differenziali basilari di un settore della fisica, di cui si conosce la teoria, sono dichiarate fondamentali anche per altri settori, in cui manca la teoria, e combinate con ipotesi radicali che le completano. Nel caso di Euler, le equazioni differenziali basilari sono quelle dell'idrodinamica e l'ipotesi radicale è quella di un etere unico.

Il *modus operandi* euleriano è un esempio, tra molti altri, che ci permette di dire – o addirittura ci spinge a dire – che la fisica attuale, nella quale la matematica e la teoria

[16]Newton, I.: *Opticks: or, a Treatise of the Reflections, Refractions, Inflections and Colours of Light* (4th edition, corrected), William Innys, London 1730.

hanno un ruolo determinante, è molto più vicina a quella di Newton, dei Bernoulli, di Euler e di Lagrange di quanto non lo fosse la fisica dell'Ottocento, dominata dalla ricerca empirica. È proprio per questa ragione che noi siamo in grado di capire meglio le ambizioni intellettuali dei fisici del Settecento, più di quanto non lo fossero gli storici dell'Ottocento e dell'inizio del Novecento. Oggi sappiamo che le speculazioni fisiche non sono sempre vuote, ma possono essere una fonte di progresso e un motore per fare avanzare le nostre idee: la teoria detta della *relatività generale* è il più grande esempio che ci mostra il Novecento.

Che eco ha avuto la filosofia naturale di Euler? Se l'*Anleitung* non ha ricevuto l'attenzione che meritava, lo si deve alla sua tarda pubblicazione. Almeno un grande fisico dell'Ottocento, che non poteva conoscere l'*Anleitung*, ha letto con profitto le *Lettres*: ci sono molti riferimenti a questo testo nei *Faraday's Diary* [16].[17]

C'è una frase misteriosa in un'opera postuma di Riemann. In una nota relativa alle sue ricerche filosofiche (non datata, ma strettamente legata a una lettera indirizzata al suo fratello Wilhelm il 28 dicembre 1853),[18] egli scrive:

> *Meine Hauptarbeit betrifft eine neue Auffassung der bekannten Naturgesetze – Ausdruck derselben mittelst anderer Grundbegriffe – wodurch die Benutzung der experimentellen Data über die Wechselwirkung zwischen Wärme, Licht, Magnetismus und Electricität zur Erforschung ihres Zusammenhangs möglich wurde. Ich wurde dazu hauptsächlich durch das Studium der Werke Newton's, Euler's und – anderseits – Herbart's*[19] *geführt.*

A quali opere di Euler allude Riemann? Si è dapprima pensato alle *Lettres*; però il secondo e soprattutto il terzo dei suoi tre (frammenti di) saggi sulla filosofia naturale sono in stretta relazione con gli articoli di Euler *De la propagation du son* [E305], *Supplément aux recherches sur la propagation du son* [E306] e *Continuation des recherches sur la propagation du son* [E307], tutti del 1759.[20] I saggi di Riemann sono stati scritti prima della pubblicazione dell'*Anleitung* e il *Nachlaß Bernhard Riemann* di Göttingen non fornisce indicazioni su questo libro. D'altra parte, dato l'interesse di Riemann per i lavori di Euler, non è per niente improbabile che egli abbia conosciuto quest'opera.

5. I lavori in acustica e ottica dopo l'*Anleitung*

Nel 1759, dopo anni di ricerche in altri campi, Euler torna a occuparsi di acustica con i tre articoli E305, E306 e E307 citati nel paragrafo precedente. Nel secondo di questi lavori, dalle sue equazioni dell'idrodinamica deriva l'equazione differenziale lineare

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0$$

in 3+1 dimensioni (3 spaziali e 1 temporale), dove $u(\mathbf{x}(t), t)$ è la perturbazione ondulatoria e c è la velocità di propagazione dell'onda. Oggi quest'equazione d'onda è chiamata anche

[17] *Faraday's Diary* (7 vols.) (T. Martin, ed.), G. Bell & Sons, London 1932–1936.

[18] *Bernhard Riemann's gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass* (H. Weber, Hrsg., unter Mitwirkung von R. Dedekind) p. 475, Teubner, Leipzig 1876.

[19] Johann Friedrich Herbart, filosofo e pedagogista vissuto a cavallo del Settecento e dell'Ottocento, contrappone il suo realismo all'idealismo tedesco. Riemann rifiuta però la sua filosofia naturale.

[20] Nel volume O.III,1 pp. 428–451 il primo, pp. 452–483 il secondo e pp. 484–507 il terzo.

equazione di d'Alembert, poiché d'Alembert l'ha formulata in 1+1 dimensioni.

Euler aveva ben cercato, in precedenza, di risolvere l'equazione analoga in 2+1 dimensioni, che però si era dimostrata intrattabile. Invece in 3+1 dimensioni riesce a trovare la soluzione generale, e questo successo avrà conseguenze importanti.

Per Euler l'acustica è il modello e la guida per l'ottica. A partire dal 1759 dispone di tutti gli strumenti per capire e descrivere, per mezzo di equazioni alle derivate parziali, quasi tutti i fenomeni ottici – specialmente l'interferenza e la diffrazione – con però una notevole eccezione come vedremo più avanti. Egli espone le sue idee in una lettera a Lagrange (datata 23 ottobre 1759) concernente la propagazione del suono. Un po' più tardi (il 1º gennaio 1760), scrive a Lagrange una seconda lettera sullo stesso soggetto, contenente un articolo da pubblicare nei Miscellanea Taurinensia con il titolo *Recherches sur la propagation des ébranlements dans un milieu élastique*.[21] La derivazione dell'equazione d'onda è questa volta più breve che nell'articolo E306. Come precisa in una lettera successiva a Lagrange (datata 24 giugno 1760), con *milieu élastique* Euler non intende soltanto l'aria ma anche l'etere, e dunque si riferisce pure alla luce: la lettera del 1º gennaio 1760 contiene la prima teoria matematica dell'ottica ondulatoria.

Ciò che abbiamo appena detto ci permette di individuare con precisione un limite della fisica di Euler. La sua equazione d'onda è un'equazione scalare e dunque, mentre per esempio l'interferenza e la diffrazione possono esserne facilmente derivate, esiste un fenomeno ottico per cui ciò non si può fare: la polarizzazione. Infatti Euler non ne parla mai, benché sia probabile che conoscesse il fenomeno. In ogni caso, non c'è spazio per la polarizzazione in una teoria basata su un etere fluido perfetto, quindi scalare: qui è necessario un etere solido elastico, poiché un campo scalare come la pressione interna euleriana non produce effetti trasversali.

La teoria moderna dell'elasticità inizia, come Truesdell ha dimostrato [8], con i lavori di Jacob I Bernoulli. In seguito, suo nipote Daniel getta le basi della teoria lineare dell'elasticità e studia le oscillazioni; un po' più tardi, Johann II, fratello di Daniel, considera il problema delle vibrazioni trasversali dell'etere nella propagazione della luce. Euler affronta il problema dell'elasticità indipendentemente da Daniel, ma discute e scambia idee con lui, in particolare sulle vibrazioni trasversali. I suoi contributi devono essere giudicati tra i più importanti del Settecento, pur limitandosi quasi tutti a oscillazioni unidimensionali. Soltanto una volta Euler va oltre questa restrizione con successo: quando trova l'equazione della membrana oscillante, cioè del tamburo. Formulare una teoria tridimensionale era allora impossibile, come Truesdell ha evidenziato [8]: mancavano concetti e teorie della geometria differenziale che fossero abbastanza efficaci. Questa lacuna della meccanica sarà colmata soltanto nell'Ottocento da Cauchy con l'introduzione del tensore degli sforzi, del quale la pressione interna di Euler è un caso particolare:

$$\sigma_{ij} = -p\,\delta_{ij}\,.$$

Con la creazione di questo concetto, fondamentale per la teoria dell'elasticità, l'etere fluido perfetto è sostituito dall'etere elastico solido. Diversi scienziati, da Cauchy a Lord Kelvin, lavorano a teorie concernenti l'etere elastico solido, ma la polarizzazione è ancora

[21] Miscellanea Taurinensia Vol. 2 1760–1761 (1762), pp. 1–10. La lettera è pubblicata nel volume O.II,10 pp. 255–263 come *Lettre de M. Euler à M. de la Grange* [E268].

l'ostacolo principale: mentre per l'etere fluido perfetto la polarizzazione della luce non si può formulare, in una teoria dell'etere elastico solido è eccessiva. Infatti, la polarizzazione longitudinale prevista da ogni teoria elastica non si manifesta in natura. È infine il campo elettromagnetico di Maxwell a fornire la soluzione corretta, ma anche Maxwell concepisce la sua teoria come una teoria dell'etere, così come – dopo di lui – Lorentz. Questo può sembrare sorprendente poiché, almeno nel vuoto, la teoria di Maxwell è lineare, mentre una teoria dell'etere dovrebbe contenere termini non lineari.

La teoria moderna dei campi classici emerge solo dopo le ricerche di Poincaré e di Einstein che conducono all'abbandono dell'ipotesi dell'etere. Inoltre, sebbene il concetto di campo elettromagnetico sia classico, oggi questo campo descrive approssimativamente il fotone, che è un concetto della meccanica quantistica, molto al di là di tutto ciò che la meccanica classica poteva immaginare.

Abbiamo già osservato che l'*Anleitung* non è un'opera completa (anche includendo le poche pagine che mancano alla fine del cap. 5 e all'inizio del cap. 6) e che ci sono varie ipotesi in proposito (v. inizio del § 4.1). Oltre a motivi banali è possibile che ci sia una ragione più profonda: Euler si rende conto che senza una teoria dei materiali elastici non può raggiungere il suo scopo. Con solo una pressione scalare non è possibile generare forze tangenziali, che sono indispensabili per un mondo solido. È vero che gran parte delle opere di Euler concernenti l'elasticità bi- e tridimensionale è stata scritta dopo il 1760 e che il lavoro sulla membrana elastica (*De motu vibratorio tympanorum* [E302])[22] è probabilmente del 1761–1762, ma di questi argomenti egli si era già certamente occupato prima. A porre termine alla redazione dell'*Anleitung* potrebbe quindi essere stato il fatto di non aver saputo sviluppare una teoria tridimensionale dell'elasticità.

6. Ottica, elettricità e magnetismo

In quest'ultima sezione, esamineremo solo alcuni dettagli delle ricerche euleriane in ottica, elettricità e magnetismo [17]. Euler si occupa intensamente di ottica e pubblica parecchi lavori in questo campo a partire dal 1739. Molti di questi lavori sono teorici, ma molti altri concernono la costruzione di microscopi e di telescopi, un ambito dunque per il fisico e per l'ingegnere. Sebbene egli non scriva nessun lavoro specifico sull'elettricità, ci sono idee importanti nelle *Lettres* (CXXXVIII–CLIV); diversi suoi lavori riguardano invece il magnetismo, argomento di cui si occupa pure nelle *Lettres* (CLXIX–CLXXXVI).

6.1. Ottica

Abbiamo già parlato dell'ottica euleriana nella sez. 5, esaminando alcuni lavori della seconda metà del Settecento. Vogliamo ora vedere cosa sta a monte di queste scoperte.

Euler formula il suo programma per l'ottica fisica nel trattato *Nova theoria lucis & colorum* [E88] del 1744 (ma rielaborato e ampliato nel 1746),[23] dunque all'età di 37 anni. Questo lavoro concerne tutti fenomeni ottici allora conosciuti: da una parte la luce stessa e la visione, la propagazione della luce, i raggi luminosi, la riflessione e la rifrazione, dall'altra le proprietà ottiche della materia, vale a dire i corpi luminosi (raggianti e riflettenti), i

[22] Nel volume O.II,10 pp. 344–358.
[23] Nel volume O.III,5 pp. 1–45.

corpi trasparenti e i corpi opachi. Quindici anni dopo, nel 1759, Euler e Lagrange completano la formulazione della prima teoria ondulatoria, quella dell'acustica. Come abbiamo già osservato nella sez. 5, è proprio l'acustica che mostra a Euler la buona strada verso una teoria ondulatoria della luce.

Nel trattato E88 Euler discute anche la teoria corpuscolare di Newton, alla quale oppone la sua teoria ondulatoria. Qualcuno si domanderà: la "sua" teoria ondulatoria? Ma questa teoria non è stata creata da Huygens? La risposta corretta a questa domanda è che le idee di Huygens sono sì molto importanti, ma queste idee, e specialmente il famoso *principio di Huygens*, troveranno un posto adeguato soltanto nell'ottica geometrica di Hamilton.

Ci si può infatti chiedere se quella di Huygens sia una vera teoria ondulatoria, dal momento che una tale teoria è connessa ai fenomeni soprattutto attraverso il concetto di periodicità, e dunque grazie alle nozioni di frequenza e di lunghezza d'onda. Huygens non utilizza la periodicità che è invece usata da Hooke e da Newton, anche se, secondo Newton, in ottica la periodicità non è una proprietà della luce ma una proprietà dei materiali, per esempio di quelli trasparenti. La periodicità come proprietà della luce è invece al centro dell'ottica ondulatoria di Euler, che caratterizza il colore con una frequenza.

Tra le obiezioni euleriane alla teoria corpuscolare una soprattutto fa centro: i raggi di luce possono attraversarsi senza perturbarsi. In altre parole in ottica vale il *principio di superposizione*, caratteristico dei fenomeni ondulatori, ed è questo principio che Euler pone alla base della sua teoria come farà Dirac per la meccanica quantistica quasi duecento anni dopo. Nel 1776 Euler trova un nuovo argomento contro la teoria corpuscolare e in favore di quella ondulatoria nelle esperienze ottiche con materiali fosforescenti del fisico e pittore inglese Benjamin Wilson. Egli riferisce su queste esperienze all'Accademia di San Pietroburgo e presenta le sue osservazioni sul fenomeno della fosforescenza, argomentando che non può essere spiegato con la teoria corpuscolare (*Réflections de Mr. L. Euler sur quelques nouvelles expériences optiques, communiquées à l'Académie des Sciences, par Mr. Wilson* [E487]).[24] Solo la meccanica quantistica riuscirà a spiegare effettivamente la fosforescenza, ma l'essenza delle idee di Euler è corretta.

Secondo Euler le onde luminose si propagano, come il suono nell'aria, in un mezzo molto rarefatto e molto elastico che riempie l'intero universo ed è capace di permeare i materiali: l'etere, di cui ci siamo occupati nel § 4.3. Già nel trattato E88 l'esistenza dell'etere è l'ipotesi fondamentale dell'ottica ondulatoria di Euler, e questa ipotesi implica la necessità di sviluppare una meccanica dell'etere, cioè di trovare e formulare matematicamente le leggi della natura alle quali l'etere ubbidisce. Fin quando non ci sarà questa meccanica sarà l'analogia con l'acustica a guidare le ricerche in ottica.

Per esempio, Euler sa dai suoi lavori in acustica che il suono può esercitare una pressione. Guidato dall'analogia acustica–ottica, egli ipotizza l'esistenza di una pressione esercitata dalla luce, predizione che sarà confermata sperimentalmente da Lebedev nel 1889 e in successive esperienze. Euler utilizza questa pressione per spiegare due fenomeni molto diversi: il fatto – osservato per la prima volta da Kepler – che le code delle comete sono sempre dirette nella direzione opposta a quella del sole, nei due articoli *Beantwortung verschiedener Fragen über die Beschaffenheit, Bewegung und Würckung der Cometen* [E67] e *Fortgesetzte Beantwortung der Fragen über die Beschaffenheit, Bewegung und Würckung der Cometen*

[24] Nel volume O.III,5 pp. 351–355.

[E68] del 1744,[25] e la fosforescenza, nell'intervento E487 all'Accademia di San Pietroburgo. Il primo risultato era illustrato (con un disegno sbagliato) sulla banconota svizzera da 10 franchi stampata in suo onore e in uso dal 1976 al 1995.

Ma la teoria dell'etere è coerente con la meccanica generale? Già nel lavoro *Explicatio phaenomenorum quae a motu lucis successivo oriuntur* [E127], presentato all'Accademia di San Pietroburgo nel 1739,[26] Euler si era trovato di fronte a questa domanda. Stimolo per la sua analisi in questo articolo è il calcolo dell'aberrazione stellare, il fenomeno – scoperto da Bradley e annunciato alla Royal Society nel gennaio del 1729 – che consiste in un errore sistematico di circa $20''$ nell'osservazione di una stella (angolo tra l'apparente e la vera posizione) ed è causato dal movimento della Terra rispetto alle stelle fisse. Euler non si accontenta però di calcolare l'aberrazione stellare ma considera il problema fisico più generale di un osservatore e di un oggetto luminoso osservato: vuole determinare l'aberrazione per questo oggetto [18, 15]. Esamina quattro possibilità, di cui due particolarmente interessanti. Di queste ultime, chiamiamo "caso 1" quella in cui l'osservatore è a riposo e l'oggetto si muove. Euler deriva la formula per l'aberrazione nel caso 1 dopo aver osservato che, siccome la luce è un fenomeno ondulatorio nell'etere stazionario, la sua velocità non dipende da quella dell'oggetto luminoso (misurata nel sistema di riferimento a riposo dell'osservatore). La seconda possibilità che ci interessa è quella (più importante per l'applicazione pratica) in cui l'oggetto è a riposo e l'osservatore si muove, che chiamiamo "caso 2". Euler pensa di affrontare questo problema partendo dalla soluzione del caso 1 e usando una trasformazione lineare, oggi chiamata trasformazione di Galileo, per ridurre il caso 2 al caso 1 dando al sistema osservatore-oggetto una velocità uguale in modulo e direzione ma opposta in verso a quella dell'osservatore. E si trova di fronte a una contraddizione: la formula per l'aberrazione ottenuta grazie alla trasformazione di Galileo non coincide con quella derivata direttamente, senza considerare il caso 1, sommando le velocità della luce nell'etere e dell'osservatore secondo le regole della cinematica galileiana (per il principio di relatività). Gli è subito chiaro che la differenza è dovuta alle diverse velocità della luce nei due calcoli: nel secondo dipende dalla velocità dell'osservatore. Capisce che, per potersi servire di una trasformazione di Galileo, avrebbe dovuto considerare il sistema osservatore-oggetto-etere e dare anche all'etere la stessa velocità del sistema osservatore-oggetto, cosa che è naturalmente impossibile poiché in contraddizione con la sua ipotesi di un etere stazionario (e che quindi definisce un sistema di riferimento assoluto che spezza l'equivalenza tra i casi 1 e 2). Egli osserva che l'equivalenza tra i casi 1 e 2, che non sussiste nella sua teoria ondulatoria, vale invece nella teoria corpuscolare dove non c'è l'etere a definire un sistema di riferimento assoluto e si può applicare il principio di relatività (ricalcolando il caso 1 senza imporre l'indipendenza della velocità della luce da quella dell'oggetto luminoso). Un esperimento (*experimentum crucis*) permetterebbe di discriminare tra le due teorie, ma la differenza è troppo piccola (dell'ordine $v^2/c^2 \sim 10^{-8}$) per essere rilevata da una misurazione astronomica. Euler si accontenta di usare, nei calcoli successivi dell'articolo E127, le formule della teoria corpuscolare poiché coincidono, tranne che per una differenza irrilevante, con quelle della teoria ondulatoria e gli permettono di applicare, senza limitazioni, il principio di relatività che autorizza l'addizione lineare delle velocità (nella cinematica galileiana).

[25] Nel volume O.II,31 pp. 125–150 il primo e pp. 151–194 il secondo.

[26] Nel volume O.III,5 pp. 46–80.

Anche qui Euler va nella giusta direzione: per poter usare il principio di relatività è disposto ad abbandonare temporaneamente la sua teoria ondulatoria. Questo atteggiamento segna l'inizio di un lungo sviluppo; i fenomeni elettromagnetici condurranno finalmente a una nuova meccanica, sviluppata da Einstein all'inizio del Novecento e conosciuta oggi con il nome maldestro di *teoria della relatività*. Diciamo "maldestro" perché il principio di relatività è stato usato per la prima volta da Galileo: Einstein l'ha formulato matematicamente e ne ha fatto un pilastro della sua teoria.

Questa di Euler è la prima analisi delle difficoltà che i fenomeni ottici causano al principio di relatività nella meccanica classica: oggi sappiamo che soltanto la meccanica relativistica può spiegare questi fenomeni. Euler sarebbe sorpreso di vedere che l'ipotesi dell'etere è stata accantonata, che il principio di relatività e la costanza della velocità della luce nel vuoto sono posti alla base della nuova meccanica e che, come conseguenza, le velocità non si sommano più linearmente.

6.2. Elettricità

L'idea centrale di Euler sull'elettricità è espressa nella lettera CXXXIX (*Du véritable principe de la nature, sur lequel tous les phénomenes de l'électricité sont fondés*) delle *Lettres*:

> *Il n'y a aucun doute, qu'il ne faille chercher la source de tous les phénomenes de l'électricité dans une certaine matiere fluide et subtile, mais nous n'avons pas besoin d'en feindre une dans notre imagination. Cette même matiere subtile qu'on nomme l'*Éther*, et dont j'ai déjà eu l'honneur de prouver la réalité à V.A. est suffisante pour expliquer très naturellement tous les effets étranges, que nous observons dans l'électricité. J'espere mettre V.A. si bien au fait de cette matiere, qu'il ne restera plus aucun phénomene électrique, quelque bizarre qu'il puisse paroître, sur l'explication duquel Elle puisse être embarrassée. Il ne s'agit que de bien connoître l'éther.*

Abbiamo già detto, nel § 4.3, come Euler immagina il legame tra l'etere e i materiali ordinari: tutti i materiali sono perforati da canali e sono permeati dall'etere che scorre in questi canali. Alcuni sono più impregnati di altri e da questo dipende il loro carattere elettrico.

Siccome l'etere è un fluido, deve soddisfare l'equazione di continuità dell'idrodinamica e dunque una legge di conservazione; Euler è quindi conscio della validità delle leggi di conservazione della carica elettrica e della corrente che lega le due cariche. È invece in errore su una questione che divide gli scienziati del Settecento: quella dell'esistenza di uno solo o di due tipi di elettricità. Infatti crede che ne esista soltanto uno.

6.3. Magnetismo

Ci limitiamo qui a mettere in rilievo un concetto basilare delle ricerche di Euler sul magnetismo. Egli capisce che si tratta di un fenomeno prodotto da un campo, il *campo magnetico*, che può essere descritto in analogia con l'idrodinamica; perciò vuole formulare una *magnetodinamica*. Nell'*Anleitung* l'etere è responsabile della gravità, della luce, dell'elettricità e del magnetismo, mentre nelle *Lettres* un fluido elastico meno denso dell'etere è responsabile del magnetismo.

Nel caso del campo magnetico terrestre, il primo problema che si presenta riguarda il numero dei poli. Euler – come molti altri – sostiene che sono solamente due, ma lascia aperta la questione se siano fissi o se si muovano. Disegna anche carte geografiche con i poli e le isogone, cioè le linee della superficie terrestre i cui punti hanno la stessa declinazione magnetica. Nel 1753 pubblica un atlante – che gli è stato commissionato dall'Accademia delle Scienze di Berlino – con il titolo e l'introduzione in latino e francese, composto di 41 carte di cui una con le isogone dei due emisferi terrestri est e ovest [E205]. Questo atlante, in un'edizione del 1760 con 44 carte, il titolo e l'introduzione in tedesco, francese e latino, verrà usato anche nelle scuole.[27]

Faraday che, come abbiamo detto alla fine del § 4.4, cita più volte le *Lettres*, riguardo al magnetismo scrive:[28]

> *There are at present two, or rather three general hypotheses of the physical nature of magnetic action. First, that of æthers, carrying with it the idea of fluxes or currents, and this Euler has set forth in a simple manner to the unmathematical philosopher in his Letters;–in that hypothesis the magnetic fluid or æther is supposed to move in streams through magnets, and also the space and substances around them.* [...] *My physico-hypothetical notion does not go so far in assumption as the second and third of these ideas, for it does not profess to say how the magnetic force is originated or sustained in a magnet; it falls in rather with the first view* [ossia, quella di Euler]*, yet does not assume so much.*

6.4. La visione di una grande sintesi

Per concludere questa presentazione della fisica di Euler, ritorniamo a insistere su un punto importante che abbiamo già presentato nel § 4.4, ossia la visione euleriana di una grande sintesi: ottica, elettricità e magnetismo sono parti di un solo ente e sono connessi dalle leggi di un etere comune.

Se ci chiediamo chi è stato l'erede di Euler nell'unire i tre importanti campi dell'ottica, dell'elettricità e del magnetismo con l'ipotesi fisica di un unico etere come mezzo di propagazione degli effetti in ciascuno di questi campi, un nome si presenta subito alla mente: Maxwell. Il matematico, fisico e storico della fisica Whittaker dice in proposito:[29]

> *Euler, who remained at Berlin from 1741 to 1766, numbered among his pupils a niece of Frederic, the Princess of Anhalt–Dessau, to whom in 1760–1 he wrote a series of letters setting forth his views on natural philosophy. He anticipated Maxwell in asserting that the source of all electrical phenomena is the same aether that propagates light: electricity is nothing but a derangement of the equilibrium of the aether.*

È difficile dare una valutazione dei lavori di Euler sull'elettromagnetismo più alta di questa, che li riconosce precursori e guida della scoperta più importante della fisica dell'Ottocento.

[27] *Geographischer Atlas bestehend in 44 Land-Charten, worauf alle Theile des Erd-Creyses vorgestellet werden. Auf Befehl der Königlichen Academie der Wissenschaften nach den bischer herausgekommenen besten Charten beschrieben, und insbesondere zum Gebrauch der Jugend in den Schulen herausgegeben* [E205a], Christian Ludewig Kunst, Berlin 1760.

[28] Faraday, M.: *Experimental Researches in Electricity* Vol. III, pp. 528–529, Bernard Quaritch, London 1855.

[29] E. T. Whittaker: *A History of the Theories of Aether and Electricity. Vol. 1: The Classical Theories*, p. 98, Nelson, London 1951.

Riferimenti bibliografici

[1] Speiser, A.: *Die Basler Mathematiker*, **117**. Neujahrsblatt der Gesellschaft zur Beförderung des Guten und Gemeinnützigen, Helbing & Lichtenhahn, Basel 1939.

[2] Speiser, D.: *Leonhard Euler (1707–1783) Mathematiker – Physiker – Ingenieur*, Vierteljahresschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich, **129**. Jahrgang (1984), 325–338.

[3] Weil, A.: *Teoria dei numeri – Storia e matematica da Hammurabi a Legendre*, Einaudi Paperbacks Scienze 239, Einaudi, Torino 1993.

[4] Speiser, D.: *Pierre Louis Moreau de Maupertuis (1698–1759)*, in "Pierre Louis Moreau de Maupertuis – Eine Bilanz nach 300 Jahren" (Hartmut Hecht, Hrsg.) pp. 341–362, Arno Spitz, Berlin 1999.

[5] *Leonhardi Euleri Opera Omnia*, edita dalla Eulerkommission dell'Accademia svizzera di scienze naturali (precedentemente: Società svizzera di scienze naturali) dal 1911, Birkhäuser, Basel.

[6] Truesdell, C: *Eulers Leistungen in der Mechanik*, Enseign. Math., II. Sér. **3** (1957), 251–262.

[7] Speiser, D.: *Aus der Geschichte der Mechanik zwischen 1710 und 1760*, in "Die Mathematisierung der Wissenschaften" (P. Hoyningen-Huene, Hrsg.) pp. 35–64, Zürcher Hochschulforum Band 4, Artemis, Zürich 1983.

[8] Truesdell, C: *The Rational Mechanics of Flexible or Elastic Bodies, 1638–1788*, O.II,11/2 (Editor's introduction to the volumes O.II,10,11/1), 435 pp. (1960).

[9] Truesdell, C.: *Rational Fluid Mechanics, 1687–1765*, Editor's introduction to volume O.II,12 pp. VII–CXXV (1954).

[10] Truesdell, C.: *I. The First Three Sections of Euler's Treatise on Fluid Mechanics, 1766; II. The Theory of Aerial Sound, 1687–1788; III. Rational Fluid Mechanics, 1765–1788*, Editor's introduction to volume O.II,13 pp. VII–CXVIII (1956).

[11] Cerulus, F.: *Euler und die Schifffahrt*, conferenza del 14 settembre al 187.Jahreskongress SCNAT 2007, 13.–14. September 2007, Universität Basel.

[12] Truesdell, C: *Die Entwicklung des Drallsatzes (Zusammenfassender Bericht)*, Z. Angew. Math. Mech. **44** (1964), 149–158.

[13] Speiser, D.: *Euler's "Anleitung zur Naturlehre"*, in "Symmetry in Nature" (A volume in honour of Luigi A. Radicati di Brozolo (2 vols.)) pp. 721–733, Edizioni della Normale, Pisa 1989.

[14] Speiser, D.: *The principle of relativity in Euler's work*, in "Symmetries in Physics (1600–1980)" (Proceedings of the First International Meeting on the History of Scientific Ideas, Sant Feliu de Guíxols, Catalonia Spain, September 20–26,1983 / M. G. Doncel, A. Hermann, L. Michel, A. Pais, eds.) pp. 33–47, Bellaterra, Barcelona 1987.

[15] Maltese, G.: *On the relativity of motion in Leonhard Euler's science*, Arch. Hist. Exact Sci. **54** (2000), 319–348.

[16] Speiser, D.: *L'oeuvre de L. Euler en optique physique*, in "Roemer et la vitesse de la lumière" (R. Taton, ed.) pp. 313–324, Vrin, Paris 1978.

[17] Speiser, D.: *Eulers Schriften zur Optik, zur Elektrizität und zum Magnetismus*, in "Leonhard Euler 1707–1783 – Beiträge zu Leben und Werk" (Gedenkband des Kantons Basel-Stadt / J. J. Burckhardt, E. A. Fellmann, W. Habicht, Hrsg.) pp. 215-228, Birkhäuser, Basel 1983.

[18] Speiser, D.: *L. Euler, the principle of relativity and the fundamentals of classical mechanics*, Nature **190** (1961), 757–759.