Metodi matematici per l'analisi del rischio di credito

Patrick GAGLIARDINI
Università della Svizzera Italiana e Swiss Finance Institute

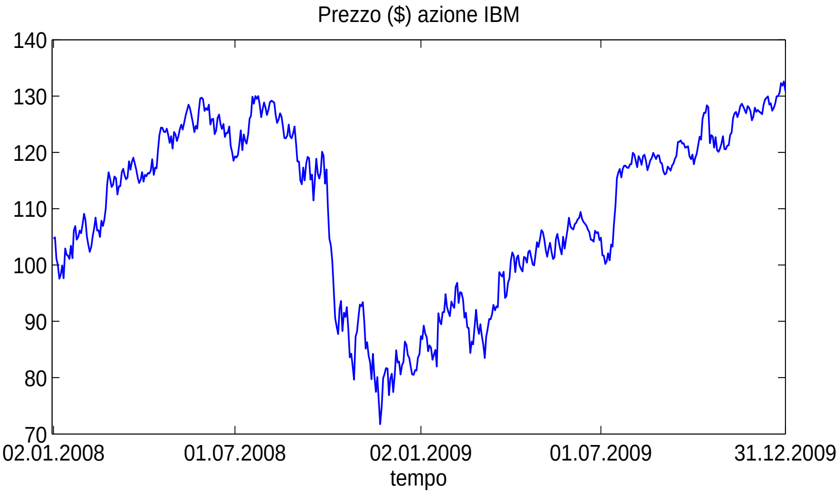
Giornata di studio sulla "Matematica finanziaria nell'insegnamento liceale"
20 ottobre 2010

INDICE

1. RISCHI E DISTRIBUZIONI DI PROBABILITÀ

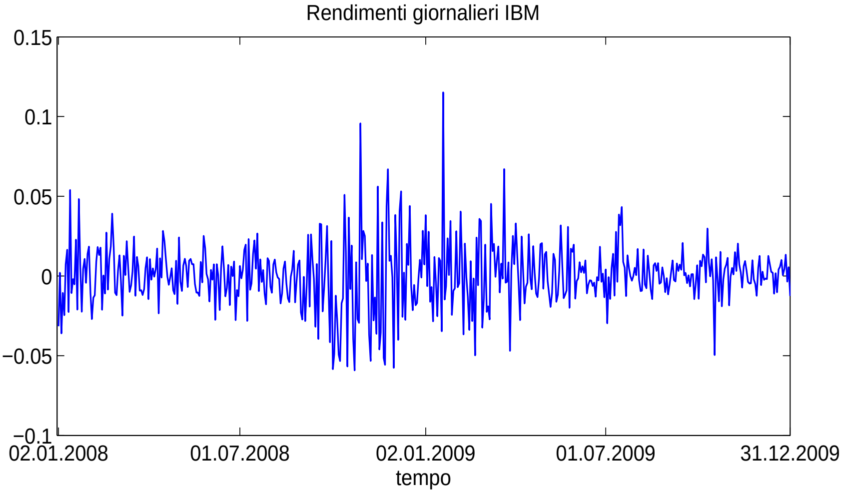
1. RISCHI E DISTRIBUZIONI DI PROBABILITÀ

ESEMPIO: Serie storica del prezzo dell'azione IBM



1. RISCHI E DISTRIBUZIONI DI PROBABILITÀ

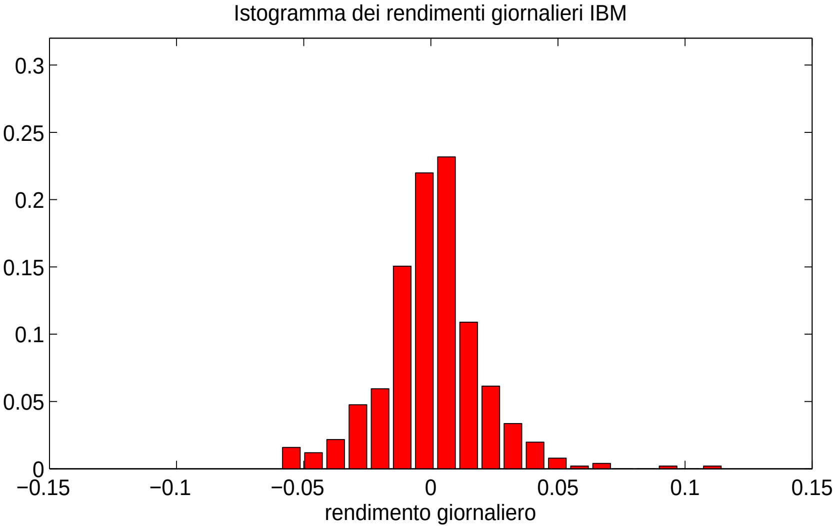
ESEMPIO (cont.): Serie storica dei rendimenti dell'azione IBM



Rendimento giornaliero: $y_t = \log(S_t/S_{t-1})$, dove S_t è il prezzo dell'azione al giorno t

1. RISCHI E DISTRIBUZIONI DI PROBABILITÀ

ESEMPIO (cont.): Istogramma dei rendimenti dell'azione IBM



1. RISCHI E DISTRIBUZIONI DI PROBABILITÀ

DIVERSI TIPI DI RISCHI FINANZIARI

- di mercato: rischio associato alla variazione del prezzo di mercato degli attivi di bilancio
- di credito: rischio associato agli eventi di default o di migrazione del rating della controparte, recovery risk, ...
- di liquidità e finanziamento
- rischi operativi
- ....

1. RISCHI E DISTRIBUZIONI DI PROBABILITÀ

Un rischio è descritto da una **variabile aleatoria (v.a.)** e dalla sua **distribuzione di probabilità**

i) Rendimento di un attivo

v.a. con distribuzione normale di media μ e varianza σ^2

$$Y \sim N(\mu, \sigma^2)$$

Densità di probabilità:

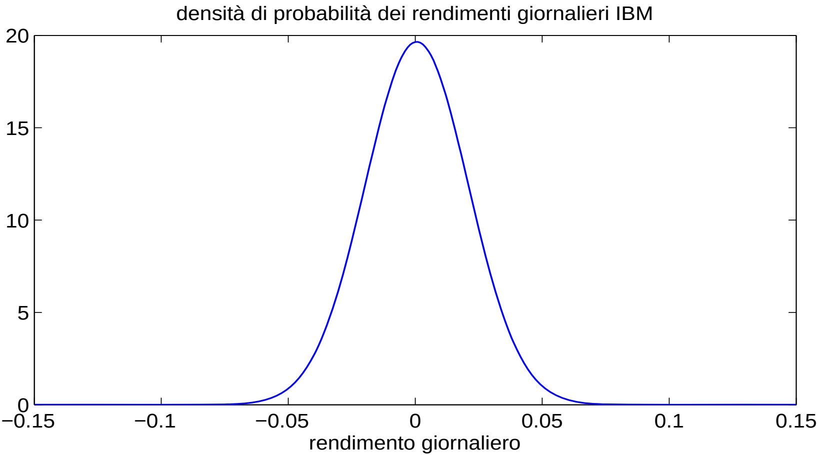
$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(y-\mu)^2\right\}, \quad y \in \mathbb{R}$$

Distribuzione compatibile con l'ipotesi che il prezzo dell'azione segua un moto Browniano geometrico

I parametri μ e σ^2 sono stimati con media e varianza empiriche:

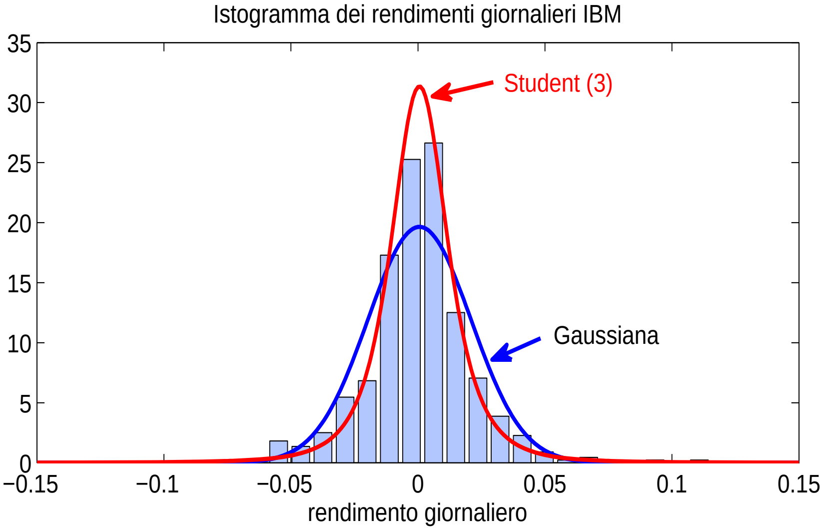
$$\hat{\mu} = \bar{y} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_t, \qquad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(y_t - \bar{y})^2$$

1. RISCHI E DISTRIBUZIONI DI PROBABILITÀ



Media $\hat{\mu} = 0.0006$ e deviazione standard $\hat{\sigma} = 0.0203$ stimate sul periodo 1.1.2008-31.12.2009

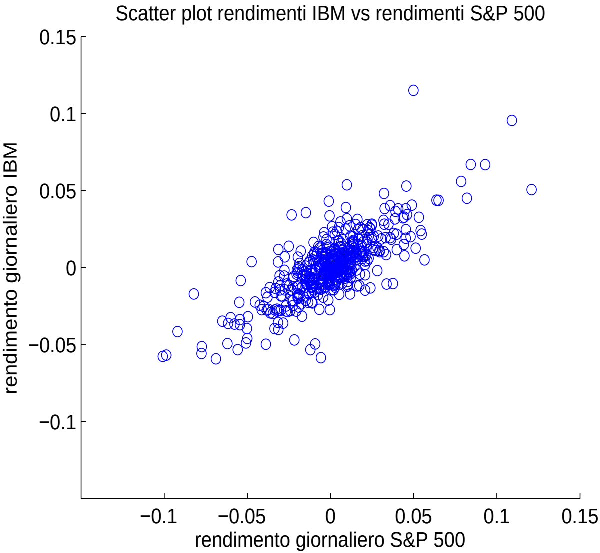
1. RISCHI E DISTRIBUZIONI DI PROBABILITÀ



La distribuzione di Student ammette code pesanti e permette di prendere in considerazione il **rischio di rendimenti estremi**

1. RISCHI E DISTRIBUZIONI DI PROBABILITÀ

Distribuzione **congiunta** dei rendimenti dell'azione IBM e dell'indice di mercato S&P 500



1. RISCHI E DISTRIBUZIONI DI PROBABILITÀ

La sensitività del rendimento di un'azione al fattore di rischio di mercato è studiato a partire dal modello di **regressione lineare**:

$$y_t = \alpha + \beta x_t + \varepsilon_t, \quad t = 1, \cdots, T$$

dove:

- y_t e x_t sono i rendimenti del titolo IBM e del mercato, rispettivamente
- ε_t è un errore aleatorio di valore atteso 0 e varianza σ^2
- α e β (**beta** del titolo) sono parametri

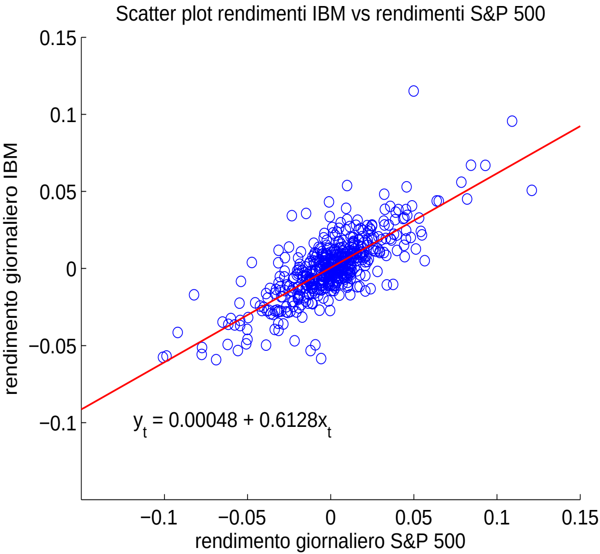
Stimatori dei minimi quadrati ordinari (m.q.o.)

$$(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = \arg\min_{\alpha,\beta} \sum_{t=1}^{T} (y_t - \alpha - \beta x_t)^2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta}\bar{x} \\ \hat{\beta} = \dfrac{m_{xy}}{m_{xx}} \end{cases}$$

dove $m_{xx} = \sum_{t=1}^{T} (x_t - \bar{x})^2$ e $m_{xy} = \sum_{t=1}^{T} (x_t - \bar{x})(y_t - \bar{y})$

1. RISCHI E DISTRIBUZIONI DI PROBABILITÀ

Retta di regressione stimata:



1. RISCHI E DISTRIBUZIONI DI PROBABILITÀ

ii) Evento di default di un'impresa

v.a. binaria

$$Y \sim \mathcal{B}(1, p)$$

con distribuzione di probabilità discreta

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{(default),} & \text{prob. } p \\ 0 & \text{(non default),} & \text{prob. } 1 - p \end{cases}$$

La probabilità annua di default $p \in (0, 1)$ per imprese in una data classe di rating è stimata tramite la frequenza di default $\hat{p}$ in tale classe

Dati S&P per aziende USA nel periodo 1990-2009 ($\hat{p}$ in percentuale)

rating	AAA	AA	A	BBB	BB	B	C
$\hat{p}$	0	0.029	0.085	0.274	1.124	6.017	30.406

1. RISCHI E DISTRIBUZIONI DI PROBABILITÀ

iii) Rating di un'impresa

v.a. qualitativa a K alternative ($K = 8$ per il rating S&P)

$$Y = \begin{cases} 1 \;\; \text{(AAA)}, & \text{prob. } p_1 \\ 2 \;\; \text{(AA)}, & \text{prob. } p_2 \\ \vdots & \\ K \;\; \text{(D)}, & \text{prob. } p_K \end{cases}$$

con

$$p_j \geq 0, \quad \sum_{j=1}^{K} p_j = 1$$

1. RISCHI E DISTRIBUZIONI DI PROBABILITÀ

Modello dinamico per la migrazione dei rating: il rating Y_t segue una **catena di Markov** con matrice di transizione

$$\Pi = [\pi_{j,k}], \quad \pi_{j,k} = P[Y_t = k | Y_{t-1} = j]$$

dove $\pi_{j,k} \geq 0$, $\forall j, k$ e $\sum_{k=1}^{K} \pi_{j,k} = 1$, $\forall j$

Gli elementi della matrice Π sono stimati tramite le frequenze di transizione

$$\hat{\Pi} = \begin{pmatrix} 0.921 & 0.071 & 0.005 & 0.001 & 0.000 & 0.001 & 0.001 & 0.000 \\ 0.004 & 0.903 & 0.087 & 0.005 & 0.001 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.018 & 0.921 & 0.055 & 0.003 & 0.001 & 0.001 & 0.001 \\ 0.000 & 0.002 & 0.038 & 0.909 & 0.041 & 0.005 & 0.002 & 0.003 \\ 0.000 & 0.000 & 0.001 & 0.061 & 0.839 & 0.076 & 0.012 & 0.011 \\ 0.000 & 0.000 & 0.002 & 0.004 & 0.070 & 0.815 & 0.049 & 0.060 \\ 0 & 0 & 0.002 & 0.004 & 0.012 & 0.146 & 0.532 & 0.304 \end{pmatrix}$$

Dati S&P per aziende USA nel periodo 1990-2009

1. RISCHI E DISTRIBUZIONI DI PROBABILITÀ

Consideriamo la matrice $\Pi(h) = [\pi_{j,k}(h)]$ delle probabilità di transizione ad un orizzonte di h periodi

$$\pi_{j,k}(h) = P[Y_{t+h} = k | Y_t = j]$$

Teorema 1: $\Pi(h) = \Pi^h$, $h \geq 1$

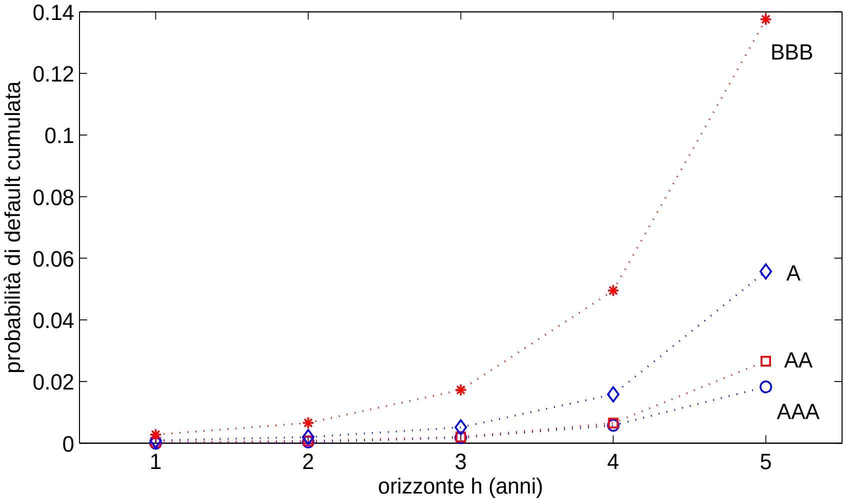
Dimostrazione: Per $h = 2$

$$\begin{aligned} P[Y_{t+2} = k | Y_t = j] &= \sum_{l=1}^{K} P[Y_{t+2} = k | Y_{t+1} = l, Y_t = j] P[Y_{t+1} = l | Y_t = j] \\ &= \sum_{l=1}^{K} P[Y_{t+2} = k | Y_{t+1} = l] P[Y_{t+1} = l | Y_t = j] \\ &= \sum_{l=1}^{K} \pi_{j,l} \pi_{l,k} = (\Pi^2)_{j,k} \end{aligned}$$

dal teorema delle probabilità totali e la proprietà di Markov. ■

1. RISCHI E DISTRIBUZIONI DI PROBABILITÀ

Probabilità di default cumulate per le classi di rating investment grade:



iv) Rischio di Recovery Rate (RR)

Loss Given Default $LGD = 1 - RR$ è la percentuale del nominale non recuperata dal creditore in caso di default della controparte

v.a. con valori nell'intervallo $[0, 1]$

$$LGD \sim Beta(\alpha, \beta)$$

con densità di probabilità

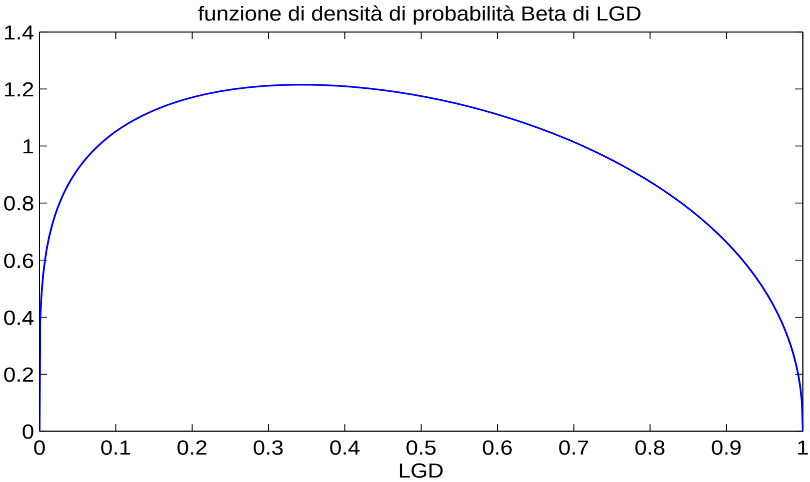
$$f(y) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1}, \quad y \in (0, 1)$$

I parametri $\alpha, \beta > 0$ possono essere stimati uguagliando i momenti teorici

$$E[LGD] = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}, \quad V[LGD] = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$$

ai momenti empirici

1. RISCHI E DISTRIBUZIONI DI PROBABILITÀ



Parametri $\hat{\alpha} = 1.23$ e $\hat{\beta} = 1.44$ stimati a partire da media 0.46 e deviazione standard 0.26 di LGD per prestiti nella classe senior unsecured (Moody's)

2. MISURE DEL RISCHIO

2. MISURE DEL RISCHIO

Le **misure del rischio** come

- Value-at-Risk (VaR)
- Expected Shortfall (ES)
- Distortion Risk Measures (DRM)

sono alla base dei moderni approcci alla gestione del rischio e della attuale regolamentazione

Le misure del rischio sono utilizzate per

- determinare i requisiti di capitale allo scopo di coprire le perdite future
- monitorare i rischi tramite modelli di rischio interni

2. MISURE DEL RISCHIO

i) Il Value-at-Risk (VaR)

Sia t la data odierna,

W_{t+h} la perdita sul periodo $[t, t+h]$, una v.a.,

$\alpha \in (0,1)$ un livello di confidenza, ad esempio $\alpha = 0.99$

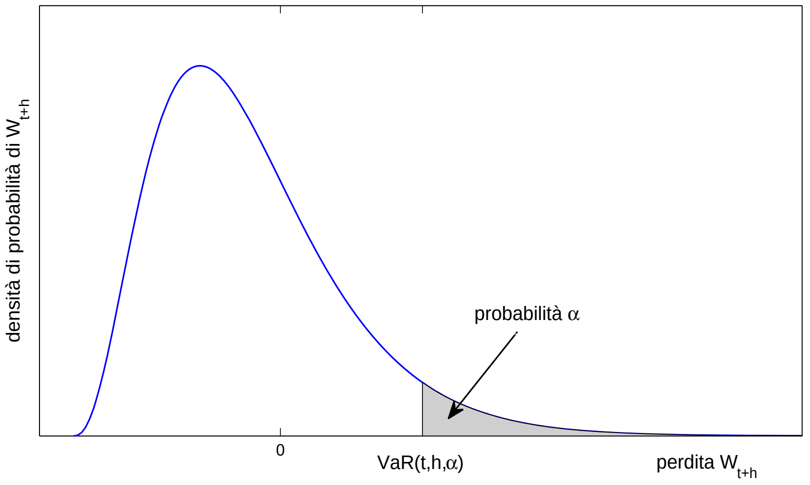
Il VaR $VaR(t,h,\alpha)$ alla data t, per l'orizzonte h e al livello di confidenza α è definito dall'equazione

$$P_t[W_{t+h} \geq VaR(t,h,\alpha)] = 1 - \alpha$$

dove $P_t[\cdot]$ è la probabilità condizionale all'informazione alla data t

2. MISURE DEL RISCHIO

Il VaR è un quantile della distribuzione delle perdite e dei profitti (Loss and Profits, L&P)



2. MISURE DEL RISCHIO

Il VaR al livello di confidenza α non è informativo sull'**entità delle perdite** nel $100(1-\alpha)\%$ peggiore dei casi

ii) Expected Shortfall (a.k.a. Tail VaR)

Lo Expected Shortfall $ES(t,h,\alpha)$ è la perdita attesa nel caso in cui la perdita oltrepassa il quantile $VaR(t,h,\alpha)$

$$ES(t,h,\alpha) = E_t[W_{t+h} | W_{t+h} \geq VaR(t,h,\alpha)]$$

dove $E_t[\cdot]$ è il valore atteso condizionale all'informazione alla data t

2. MISURE DEL RISCHIO

Lo Expected Shortfall può essere interpretato come una media di VaR estremi

Teorema 2: Vale

$$ES(t, h, \alpha) = \frac{1}{1-\alpha} \int_{\alpha}^{1} VaR(t, h, u) du$$

Dimostrazione: Sia W una v.a. con densità di probabilità f, funzione di ripartizione F e funzione quantile $Q = F^{-1}$. Abbiamo:

$$\begin{aligned} E[W | W \geq Q(\alpha)] &= \frac{\int_{Q(\alpha)}^{\infty} wf(w) dw}{P[W \geq Q(\alpha)]} \\ &= \frac{1}{1-\alpha} \int_{Q(\alpha)}^{\infty} wf(w) dw = \frac{1}{1-\alpha} \int_{\alpha}^{1} Q(u) du \end{aligned}$$

con il cambio di variabile $w = Q(u)$. ■

iii) Distortion risk measures

Sia H una funzione di ripartizione convessa sull'intervallo $[0,1]$

Una Distortion Risk Measure (DRM) è definita da

$$DRM(t,h,H) = \int_0^1 VaR(t,h,u)dH(u)$$

ES al livello di confidenza α è una DRM associata alla funzione di ripartizione $H(u) = \frac{1}{1-\alpha}(u-\alpha)^+$ (distribuzione uniforme sull'intervallo $[\alpha,1]$)

2. MISURE DEL RISCHIO

ESEMPIO: Misure del rischio in una distribuzione normale (caso statico)

Sia la perdita $W \sim N(\mu, \sigma^2)$ una v.a. normale. Il VaR si ottiene da:

$$P[W \geq VaR(\alpha)] = 1 - \alpha \quad \Leftrightarrow \quad P[W \leq VaR(\alpha)] = \alpha$$
$$\Leftrightarrow \quad VaR(\alpha) = \mu + \sigma\Phi^{-1}(\alpha) \tag{1}$$

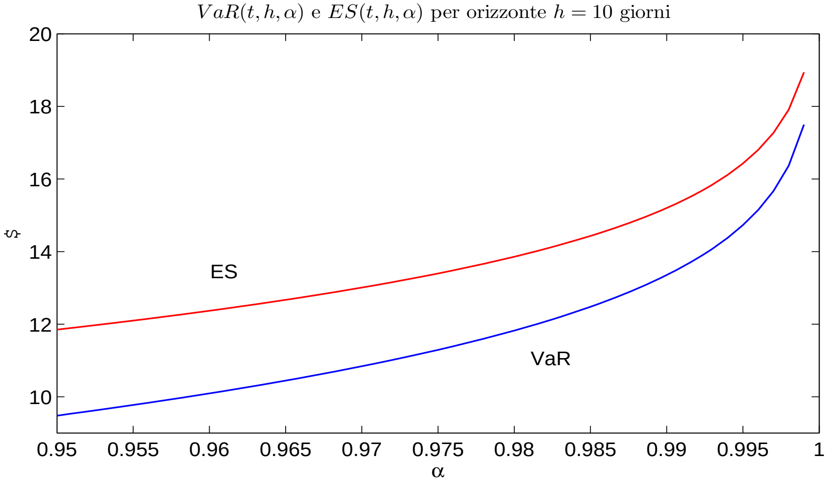
dove Φ è la funzione di ripartizione della distribuzione normale standard

Lemma 3: Sia $W \sim N(\mu, \sigma^2)$ e $a \in \mathbb{R}$. Allora: $E[W|W \geq a] = \mu + \sigma \frac{\phi(\frac{a-\mu}{\sigma})}{1 - \Phi(\frac{a-\mu}{\sigma})}$,
dove ϕ è la densità di probabilità di una normale standard.

Dal Lemma 3 con $a = \mu + \sigma\Phi^{-1}(\alpha)$ segue:

$$ES(\alpha) = \mu + \sigma \frac{\phi[\Phi^{-1}(\alpha)]}{1 - \alpha} \tag{2}$$

2. MISURE DEL RISCHIO



VaR e ES a 10 giorni per un investimento di 100 USD nell'azione IBM sotto l'ipotesi di rendimenti $i.i.d.N(\mu, \sigma^2)$ con $\mu = 0.0006$ e $\sigma = 0.0203$

3. MODELLI FATTORIALI DEL RISCHIO

3. MODELLI FATTORIALI DEL RISCHIO

Nella pratica le misure del rischio devono essere calcolate (anche) per grandi portafogli di contratti individuali:

- Portafogli di prestiti ad imprese e prestiti ipotecari
- Portafogli di contratti assicurativi
- Portafogli di Credit Default Swaps (CDS)

e per titoli derivati scritti su questi grandi portafogli:

- Mortgage Backed Securities (MBS)
- Collateralized Debt Obligations (CDO)
- Derivati sull' indice iTraxx
- Insurance Linked Securities (ILS) e longevity bonds

3. MODELLI FATTORIALI DEL RISCHIO

La modellizzazione dei rischi in portafogli finanziari (e assicurativi) e il calcolo delle misure del rischio associate devono confrontarsi con

i) la grande dimensione dei portafogli (compresa tra $\simeq 100$ e $\simeq 10,000 - 100,000$ contratti)

ii) la nonlinearità connessa ai rischi di default, loss given default, eventi assicurativi, ...

iii) la dipendenza tra i rischi individuali, che è indotta dalle **componenti sistematiche** di tali rischi

3. MODELLI FATTORIALI DEL RISCHIO

3.1 Modello di rischio fattoriale per un portafoglio omogeneo

I rischi individuali

$$y_i = c(F, u_i), \quad i = 1, ..., n$$

dipendono dal vettore dei fattori sistematici F e dai rischi idiosincratici u_i

Ipotesi distribuzionali

A.1: *le v.a.* F *e* $(u_1, \ldots, u_n)$ *sono indipendenti*

A.2: *le v.a.* $u_1, \ldots, u_n$ *sono indipendenti e identicamente distribuite*

Il portafoglio è omogeneo poichè la distribuzione congiunta dei rischi individuali è invariante rispetto a permutazioni degli indici

Il **fattore sistematico** F introduce dipendenza tra i rischi individuali

3. MODELLI FATTORIALI DEL RISCHIO

Esempio 1: Modello lineare a 1 fattore [Buhlmann (1967), Gordy (2004)]

I rischi individuali sono una funzione lineare di un unico fattore sistematico

$$y_i = F + u_i$$

dove

$$F \sim N(\mu, \eta^2), \quad u_i \sim N(0, \sigma^2)$$

Il modello descrive un portafoglio omogeneo di azioni quando y_i è il rendimento di un titolo e $F = \alpha + \beta X$ è una trasformazione del rendimento di mercato X

3. MODELLI FATTORIALI DEL RISCHIO

Esempio 2: Il modello del valore dell'impresa [Merton (1974), Vasicek (1991)]

I rischi individuali y_i sono gli indicatori di default

$$y_i = \begin{cases} 1, \text{ se } A_i < L_i \quad \text{(default)} \\ \\ 0, \text{ altrimenti} \end{cases}$$

dove A_i e L_i sono risp. il valore degli attivi e il debito dell'impresa i

I logaritmi dei rapporti attivi/debito soddisfano un modello lineare a 1 fattore:

$$\log\left(A_i / L_i\right) = F + u_i$$

Otteniamo il modello a 1 fattore

$$y_i = 1\{F + u_i < 0\}$$

considerato nella regolamentazione di Basilea 2 [BCBS (2001)]

3. MODELLI FATTORIALI DEL RISCHIO

Esempio 2 (cont.): Il modello del valore dell'impresa [Merton (1974), Vasicek (1991)]

Equivalentemente abbiamo un **modello ad intensità** in forma ridotta

$$y_i \sim i.i.d.\mathcal{B}[1, p(F)], \quad \text{condizionatamente a } F$$

con probabità di default condizionale

$$p(F) = \Phi^{-1}(-F)$$

3. MODELLI FATTORIALI DEL RISCHIO

Esempio 3: Modello con default e Loss Given Default stocastici

La perdita alla scadenza sul prestito i è:

$$y_i = Z_i LGD_i$$

dove Z_i è l'indicatore di default e LGD_i è il Loss Given Default

Condizionatamente al fattore $F = (F_1, F_2)'$, le v.a. Z_i e LGD_i sono indipendenti e tali che

$$Z_i \sim \mathcal{B}(1, F_1), \quad LGD_i \sim Beta(\alpha(F_2), \beta(F_2))$$

I due fattori F_1 e F_2 controllano la probabilità di default e il Loss Given Default stocastici

3. MODELLI FATTORIALI DEL RISCHIO

3.2 Rischio del portafoglio

Il rischio totale del portafoglio è dato da:

$$W_n = \sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{i=1}^{n} c(F, u_i)$$

(una v.a. che corrisponde alla perdita di portafoglio)

La perdita di portafoglio per contratto individuale è W_n/n

Il VaR per contratto individuale $VaR_n(\alpha)$ al livello di confidenza α si ottiene dall'equazione

$$P[W_n/n \geq VaR_n(\alpha)] = 1 - \alpha$$

ES per contratto individuale:

$$ES_n(\alpha) = E[W_n/n | W_n/n \geq VaR_n(\alpha)]$$

3. MODELLI FATTORIALI DEL RISCHIO

Esempio 1: Modello lineare a 1 fattore (cont.)

La perdita per contratto individuale:

$$W_n/n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = F + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} u_i \sim N\left(\mu, \eta^2 + \frac{1}{n}\sigma^2\right)$$

Dalle formule (1) e (2) otteniamo VaR e ES:

$$VaR_n(\alpha) = \mu + \sqrt{\eta^2 + \frac{1}{n}\sigma^2}\,\Phi^{-1}(\alpha) \tag{3}$$

$$ES_n(\alpha) = \mu + \sqrt{\eta^2 + \frac{1}{n}\sigma^2}\,\frac{\phi[\Phi^{-1}(\alpha)]}{1-\alpha}$$

Per grandi n, la distribuzione di W_n/n e le misure del rischio associate convergono alle quantità corrispondenti per la v.a. F

3. MODELLI FATTORIALI DEL RISCHIO

Nel caso generale, la distribuzione del rischio di un portafoglio W_n non è nota in forma chiusa a causa della dipendenza tra i rischi e dell'aggregazione

Come derivare le misure di rischio del portafoglio?

4. SIMULAZIONE NUMERICA

4. SIMULAZIONE NUMERICA

SIMULAZIONE DI VARIABILI ALEATORIE

Sia $U \sim \mathcal{U}(0,1)$ una v.a. uniforme sull'intervallo $[0,1]$

i) v.a. discrete

Sia $p \in (0,1)$. La v.a. binaria $Y = 1\{U \leq p\}$ è distribuita $\mathcal{B}(1,p)$

ii) v.a. continue

Sia F una funzione di ripartizione continua e strettamente crescente. Allora la v.a. $Y = F^{-1}(U)$ ha funzione di ripartizione F

Infatti: $P[Y \leq y] = P[F^{-1}(U) \leq y] = P[U \leq F(y)] = F(y)$

$\Rightarrow$ È possibile simulare la realizzazione di una "qualsiasi" v.a. a partire da un generatore di numeri casuali con distribuzione uniforme $\mathcal{U}(0,1)$

4. SIMULAZIONE NUMERICA

UN ALGORITMO DI SIMULAZIONE PER CALCOLARE MISURE DI RISCHIO

Sia S un intero.

1. Simuliamo S realizzazioni indipendenti del vettore aleatorio $(F, u_1, ..., u_n)$:

$$(F^{(s)}, u_1^{(s)}, ..., u_n^{(s)}), \quad s = 1, ..., S$$

2. Calcoliamo le perdite associate

$$W_n^{(s)}/n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} c(F^{(s)}, u_i^{(s)}), \quad s = 1, ..., S$$

3. Calcoliamo il/un quantile $\widehat{VaR}_{n,S}(\alpha)$ al livello di confidenza α della distribuzione empirica di $W_n^{(s)}/n$, $s = 1, ..., S$

Dalla teoria della stima dei quantili, sotto condizioni di regolarità $\widehat{VaR}_{n,S}(\alpha)$ converge in probabilità a $VaR_n(\alpha)$ quando $S \to \infty$

4. SIMULAZIONE NUMERICA

Esempio 2: Il modello del valore dell'impresa (cont.)

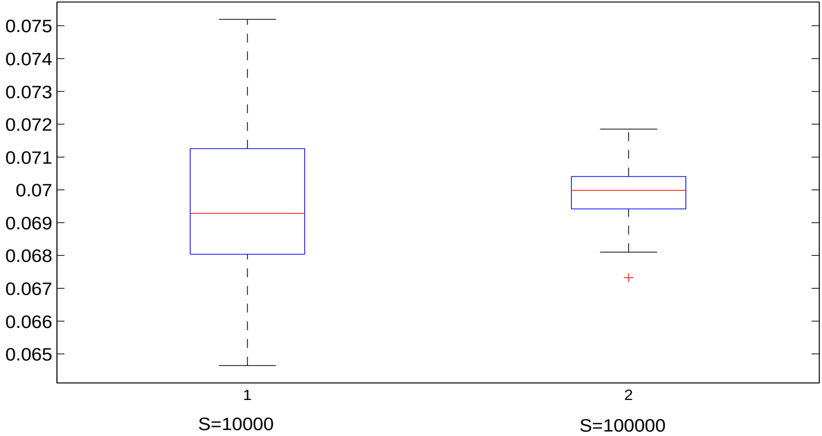
Scriviamo il modello nella forma

$$
\begin{aligned}
Y_i &= 1\{Y_i^* < 0\} \\
Y_i^* &= -\Phi^{-1}(PD) + \sqrt{\rho} F^* + \sqrt{1-\rho}\, u_i^*
\end{aligned}
$$

dove F^*, u_1^*, ..., u_n^* sono v.a. $N(0,1)$ indipendenti e i parametri PD e ρ sono

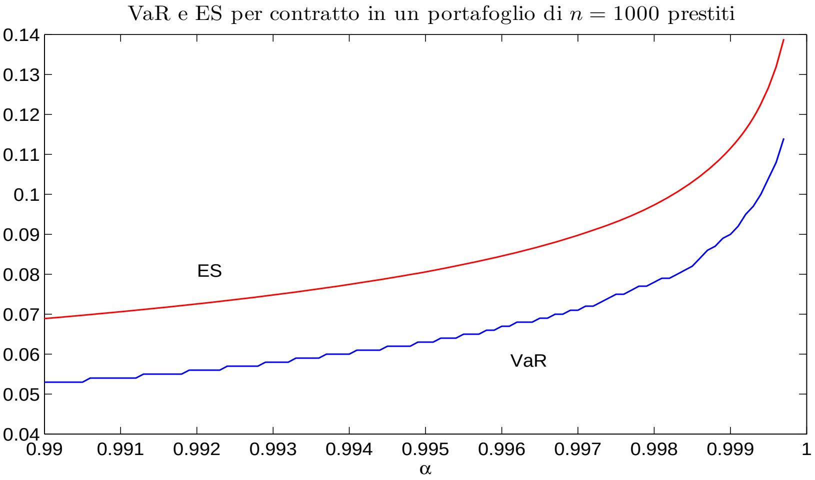
$$
\begin{aligned}
PD &= P[Y_i = 1] = \text{probabilità di default} \\
\rho &= corr(Y_i^*, Y_j^*) = \text{asset correlation, per } i \neq j
\end{aligned}
$$

4. SIMULAZIONE NUMERICA



Boxplot della distribuzione di $ES(t, h, \alpha)$ calcolato con simulazione numerica, $h = 1$ anno e $\alpha = 0.99$ per un portafoglio di $n = 1000$ prestiti nel modello del valore dell'impresa con probabilità di default $PD = 0.01$ e asset correlation $\rho = 0.12$

4. SIMULAZIONE NUMERICA



VaR e ES a 1 anno in un portafoglio di $n = 1000$ prestiti con probabilità di default $PD = 0.01$ e asset correlation $\rho = 0.12$. Simulazione numerica con $S = 100000$

5. TEORIA DELLA GRANULARITÀ

5. TEORIA DELLA GRANULARITÀ

Permette di derivare delle approssimazioni in forma chiusa delle misure del rischio di grandi portafogli

Precisione all'ordine $O(1/n)$, dove n è il numero di contratti nel portafoglio

Alternativa alla simulazione numerica

Intuizione: la Legge dei Grandi Numeri e il Teorema del Limite Centrale (TLC) possono essere applicati a

$$W_n/n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} c(F, u_i)$$

condizionatamente al valore del fattore F !

5. TEORIA DELLA GRANULARITÀ

Applicando il TLC condizionatamente a F, per grandi n abbiamo

$$W_n/n = m(F) + \sigma(F)\frac{X}{\sqrt{n}} + O(1/n)$$

dove

- $m(F) = E[y_i|F]$ è il rischio atteso condizionale individuale
- $\sigma^2(F) = V[y_i|F]$ è la volatilità condizionale individuale
- X è una v.a. normale standard e indipendente da F

5. TEORIA DELLA GRANULARITÀ

Un portafoglio di dimensione infinita $n = \infty$ non è privo di rischio, poichè i rischi sistematici non sono diversificabili!

Infatti, per $n = \infty$ abbiamo:

$$W_n/n = m(F)$$

stocastico

Deduciamo che la misura del rischio $VaR_\infty(\alpha)$ per un portafoglio **infinitamente granulare** è il quantile associato alla componente sistematica $m(F)$:

$$P[m(F) \geq VaR_\infty(\alpha)] = 1 - \alpha$$

[Vasicek (1991)]

5. TEORIA DELLA GRANULARITÀ

Il risultato principale della teoria della granularità applicata alle misure del rischio fornisce il termine di primo ordine nell'espansione di $VaR_n(\alpha)$ rispetto a n in un intorno di $n = \infty$

Teorema 4: *Vale*

$$VaR_n(\alpha) = VaR_\infty(\alpha) + \frac{1}{n} GA(\alpha) + o(1/n)$$

dove

$$\begin{aligned} GA(\alpha) &= -\frac{1}{2} \left\{ \frac{d \log g_\infty(w)}{dw} E[\sigma^2(F) | m(F) = w] \right. \\ &\quad \left. + \frac{d}{dw} E[\sigma^2(F) | m(F) = w] \right\}_{w = VaR_\infty(\alpha)} \end{aligned}$$

e g_∞ è la densità di probabilità di $m(F)$

5. TEORIA DELLA GRANULARITÀ

Esempio 2: Modello lineare a 1 fattore (cont.)

Abbiamo:

$$m(F) = F, \quad \sigma^2(F) = \sigma^2 \text{ (costante)}$$

e quindi

$$g_\infty(F) = \frac{1}{\eta}\phi\left(\frac{F-\mu}{\eta}\right)$$

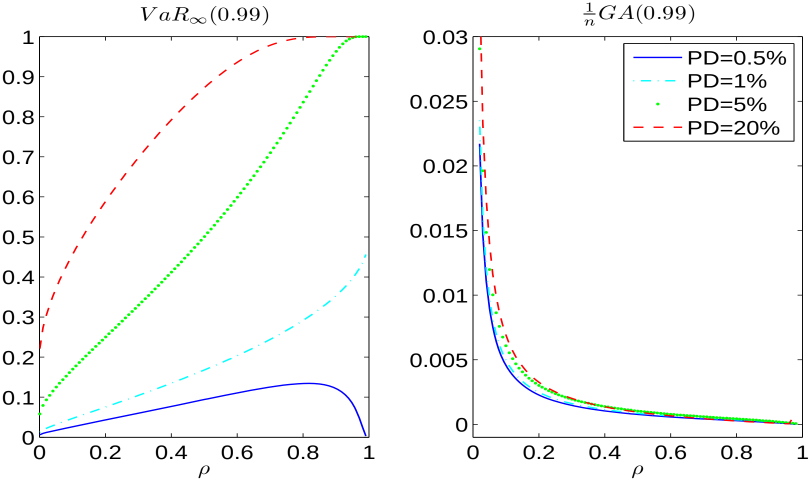
Dal Teorema 4 si ottiene l'espansione $VaR_n(\alpha) = VaR_\infty(\alpha) + \frac{1}{n}GA(\alpha)$ con

$$VaR_\infty(\alpha) = \mu + \eta\Phi^{-1}(\alpha), \quad GA(\alpha) = \frac{\sigma^2}{2\eta}\Phi^{-1}(\alpha)$$

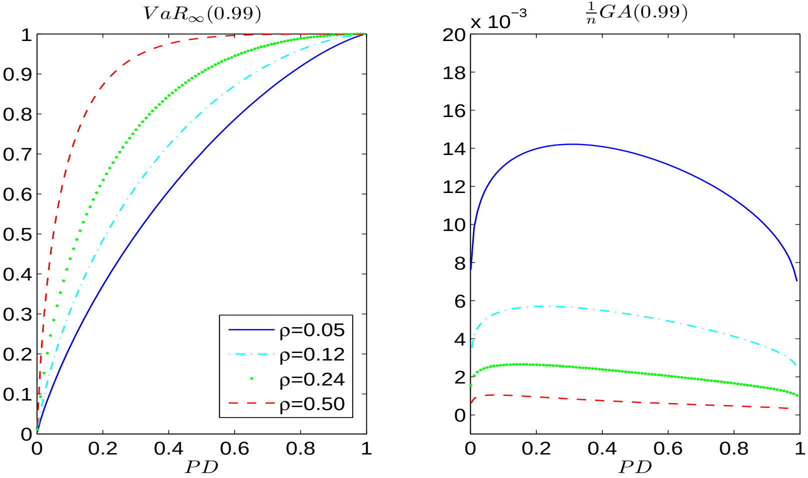
che corrisponde all'espansione di Taylor all'ordine $1/n$ della formula (3)

5. TEORIA DELLA GRANULARITÀ

Esempio 2: Il modello del valore dell'impresa (cont.)



5. TEORIA DELLA GRANULARITÀ



Riferimenti bibliografici

Basel Committee on Banking Supervision (2001): ”The New Basel Capital Accord”, Consultative Document of the Bank for International Settlements, April 2001, Part 2: Pillar 1.

Basel Committee on Banking Supervision (2003): ”The New Basel Capital Accord”, Consultative Document of the Bank for International Settlements, April 2003, Part 3: The Second Pillar.

Buhlmann, H. (1967): ”Experience Rating and Credibility”, ASTIN Bulletin, 4, 199-207.

Chamberlain, G., e M., Rothschild (1983): ”Arbitrage, Factor Structure and Mean-Variance Analysis in Large Markets”, Econometrica, 51, 1281-1304.

Gagliardini, P., e C., Gouriéroux (2010): ”Granularity Theory”, CREST, DP.

Gagliardini, P., Gouriéroux, C., e A., Monfort (2010): ”Micro-information, Nonlinear Filtering and Granularity”, CREST, DP.

Gordy, M. (2003): ”A Risk-Factor Model Foundation for Rating-Based Bank Capital Rules”, Journal of Financial Intermediation, 12, 199-232.

Gordy, M. (2004): ”Granularity Adjustment in Portfolio Credit Risk Measurement”, in *Risk Measures for the 21.st Century*, ed. G. Szego, Wiley, 109-121.

Riferimenti bibliografici

Gourieroux, C., e J., Jasiak (2001): *Financial Econometrics: Problems, Models and Methods*, Princeton Series in Finance, Princeton University Press.

McNeil, A., Frey, R., e P., Embrechts (2005): *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques, Tools*, Princeton Series in Finance, Princeton University Press.

Merton, R. (1974): ”On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates”, Journal of Finance, 29, 449-470.

Vasicek, O. (1991): ”Limiting Loan Loss Probability Distribution”, KMV Corporation, DP.