Albero binomiale

$$S_0 \quad \begin{cases} S_1(H) = u \cdot S_0 \\ S_1(T) = d \cdot S_0 \end{cases}$$

$d < u$ $\qquad$ p probabilità di H

r = tasso d'interesse

$$0 < d < 1 + r < u$$

Assenza di arbitraggio

$$\boxed{0 < d < 1+r < u}$$

$d \geq 1+r$ prendiamo soldi in prestito, acquistiamo l'azione. Anche nel peggiore dei casi mi resterà qualcosa.

$1+r \geq u$ vendiamo allo scoperto l'azione, i soldi li mettiamo sul conto corrente. Anche nel peggiore dei casi mi resterà del capitale.

John Hull

Opzioni CALL/PUT Europea

Contratto che permette di ~~acquistare~~ vendere
acquistare e' azione ad un certo prezzo K su di un certo orizzonte temporale.

K = STRIKE

Esempio

$$
S_0 \begin{cases} S_1(H) = u \cdot S_0 \\ r \\ S_1(T) = d \cdot S_0 \end{cases}
$$

$S_0 = 4, \quad u = 2, \quad d = \frac{1}{2}, \quad r = \frac{1}{4}$

$S_1(H) = 8, \quad S_1(T) = 2$

Opzione call $K = 5$

Cap

Capitale iniziale

$$X_0 = 1.20$$

Vogliamo acquistare $\Delta_0 = \frac{1}{2}$ azione, prendiamo in prestito 0.80.

Posizione in liquidità di

$$X_0 - \Delta_0 S_0 = -0.80$$

Al tempo 1 avremo o

$$\frac{1}{2} S_1(H) = 4 \quad \text{o} \quad \frac{1}{2} S_1(T) = 1$$

come posizione azionaria

$$(1+r)(X_0 - \Delta_0 S_0)$$

$$X_1(H) = \frac{1}{2} S_1(H) + (1+r)(X_0 - \Delta_0 S_0)$$
$$= 3$$

$$X_1(T) = \frac{1}{2} S_1(T) + (1+r)(X_0 - \Delta_0 S_0)$$
$$= 0$$

<u>Alberi binomiali a più periodi</u>

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & S_2(HH) = u^2 S_0 \\
 & S_1(H) = uS_0 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
S_0 = \arrow[ur] \arrow[dr] & & S_2(HT) = udS_0 = S_2(TH) \\
 & S_1(T) = dS_0 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & S_2(TT) = d^2 S_0
\end{tikzcd}$$

⑤

"Al tempo 1":

$$X_1 = \Delta_0 S_1 + (1+r)(X_0 - \Delta_0 S_0)$$

$$= (1+r)X_0 + \Delta_0 (S_1 - (1+r)S_0)$$

$$X_0 + \Delta_0 \left(\frac{1}{1+r} S_1(H) - S_0\right) = \frac{1}{1+r} V_1(H)$$

$$X_0 + \Delta_0 \left(\frac{1}{1+r} S_1(T) - S_0\right) = \frac{1}{1+r} V_1(T)$$

$$\boxed{X_0 = \frac{1}{1+r}\left[\tilde{p}\, V_1(H) + \tilde{q}\, V_1(T)\right]}$$

$$\tilde{p} = \frac{1+r-d}{u-d}, \quad \tilde{q} = \frac{u-1-r}{u-d}$$

$$0 \le \tilde{p}, \tilde{q}, \quad \tilde{p} + \tilde{q} = 1$$

$$\tilde{p} = \frac{1+r-d}{u-d}, \quad \tilde{q} = \frac{u-1-r}{u-d}$$

Probabilità NEUTRALE RISPETTO AL RISCHIO

$$\tilde{p}\, S_1(H) + \tilde{q}\, S_1(T) =$$

$$= \frac{1+r-d}{u-d} \cdot uS_0 + \frac{u-1-r}{u-d}\, dS_0$$

$$= \frac{S_0}{u-d}\left[u + ru - \cancel{du} + \cancel{du} - d - rd\right]$$

$$= \frac{S_0}{u-d}\left[u(1+r) - d(1+r)\right]$$

$$= S_0(1+r)$$

Albero binomiale a due periodi

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & S_1(HH) = u^2 S_0 \\
 & S_1(H) = uS_0 \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & \\
S_0 \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & & S_1(HT) = S_1(TH) = udS_0 \\
 & S_1(T) = dS_0 \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & \\
 & & S_1(T^2) = d^2 S_0
\end{tikzcd}
$$

Δ_0 = # azioni acquistate al tempo$_0$

$$X_1 = \Delta_0 S_1 + (1+r)(V_0 - \Delta_0 S_0)$$

$$X_1(H) = \Delta_0 S_1(H) + (1+r)(V_0 - \Delta_0 S_0)$$

$$X_1(T) = \Delta_0 S_1(T) + (1+r)(V_0 - \Delta_0 S_0)$$

9

$$V_2 = \Delta_1 S_2 + (1+r)(X_1 - \Delta_1 S_1)$$

$$\begin{cases} V_2(HH) = \Delta_1(H) S_2(HH) + (1+r)\left(X_1(H) - \Delta_1(H) S_1(H)\right) \\ V_2(HT) = \Delta_1(H) S_2(HT) + (1+r)\left(X_1(H) - \Delta_1(H) S_1(H)\right) \\ V_2(TH) = \Delta_1(T) S_2(TH) + (1+r)\left(X_1(T) - \Delta_1(T) S_1(T)\right) \\ V_2(TT) = \Delta_1(T) S_2(TT) + (1+r)\left(X_1(T) - \Delta_1(T) S_1(T)\right) \end{cases}$$

6 equazioni nelle 6 variabili

V_0, Δ_0, $\Delta_1(H)$, $\Delta_1(T)$, $X_1(H)$

$X_1(T)$

$$X_1(T) = \frac{1}{1+r}\left[\tilde{p}\,V_2(TH) + \tilde{q}\,V_2(TT)\right]$$

$$X_1(H) = \frac{1}{1+r}\left[\tilde{p}\,V_2(HH) + \tilde{q}\,V_2(HT)\right]$$

$$\Delta_1(H) = \frac{V_2(HH) - V_2(HT)}{S_2(HH) - S_2(HT)}$$

<u>Teorema</u> Replica a + periodi

Consideriamo un modello binomiale a N periodi con $0 < d < 1+r < u$.

Definiamo

$$\tilde{p} = \frac{1+r-d}{u-d}, \quad \tilde{q} = \frac{u-1-r}{u-d}$$

Sia V_N una variabile aleatoria dipendente dai lanci della moneta $\omega_1 \dots \omega_N$.
Definiamo ricorsivamente

$$V_n(\omega_1 \dots \omega_n) = \frac{1}{1+r}\Big[\tilde{p}\, V_{n+1}(\omega_1 \dots \omega_n H) + \tilde{q}\, V_{n+1}(\omega_1 \dots \omega_n T)\Big]$$

e

$$\Delta_n(\omega_1 \dots \omega_n) = \frac{V_{n+1}(\omega_1 \dots \omega_n H) - V_{n+1}(\dots T)}{S_{n+1}(\omega_1 \dots \omega_n H) - S_{n+1}(\dots T)}$$

~~Allora~~
e

$$X_{n+1} = \Delta_n S_{n+1} + (1+r)(X_n - \Delta_n S_n)$$

allora $X_N = V_N$.

Se scegliamo

$$u = e^{\sigma\sqrt{t}} \quad , \quad d = 1/u$$

volatilità di S

per $N \to \infty$: BLACK-SCHOLES

<u>Teoria moderna del portafoglio</u>

Attivi r_{1i}, r_{2i} scegliamo

w_1, w_2 con $w_1 + w_2 = 1$

$$r_{pi} = w_1 r_{1i} + w_2 r_{2i}$$

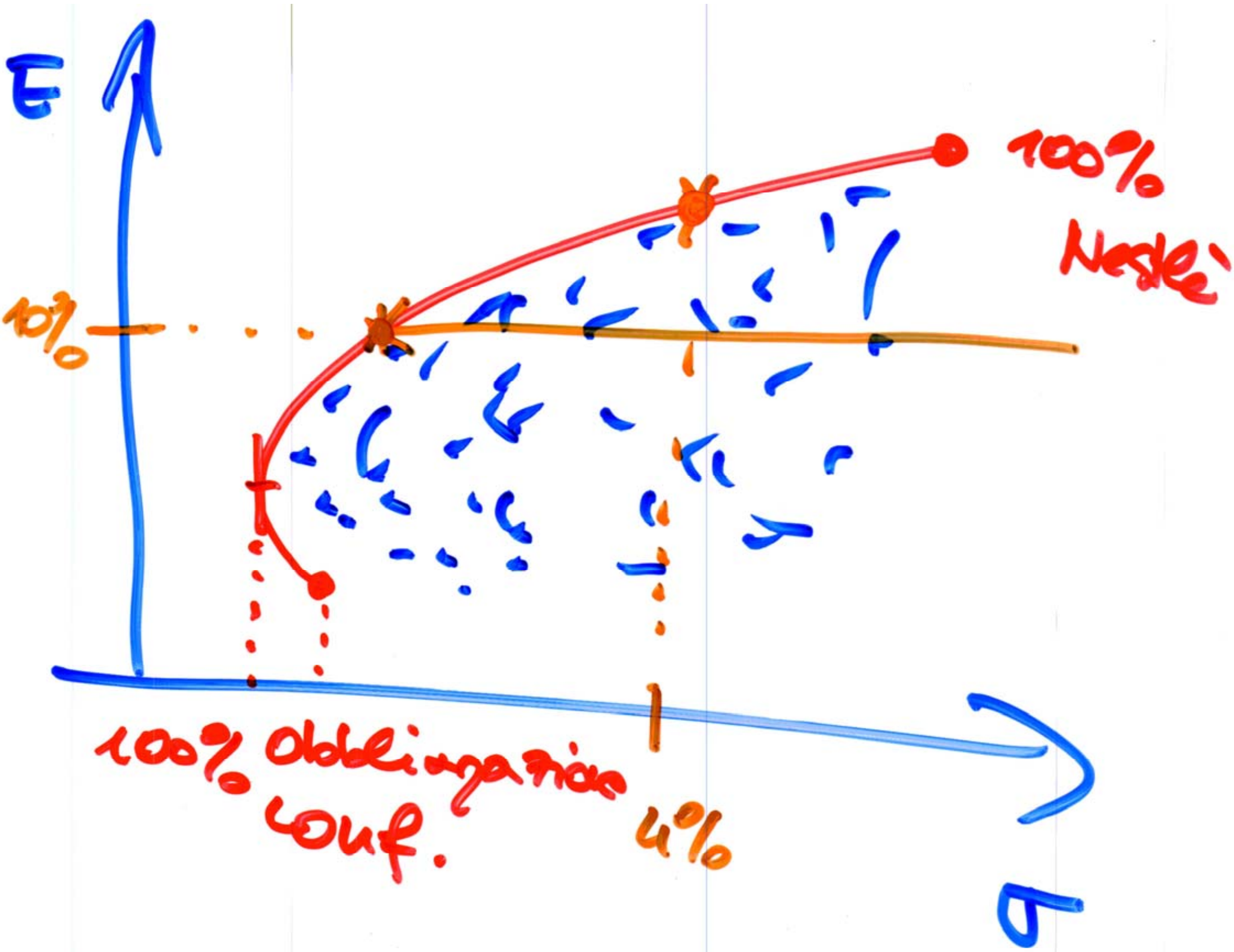
$$E[r_p] = w_1 E[r_1] + E[r_2]$$

dove $E[\cdot]$ è il valore atteso o media storica

$$\sigma_p^2 = w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + 2\rho\, \sigma_1 \sigma_2\, w_1 w_2$$

σ_i = volatilità dell'attivo i

ρ = correlazione



CAPM