Modelli Matematici per i Mercati Finanziari

Anno accademico 2005/06

Prof.ssa Rosella Giacometti

Programma del corso

A) Il rischio di mercato:

- A.1) Modelli per il mercato azionario
  - La teoria del portafoglio nello spazio rischio/rendimento
  - Il Capital Asset Pricing Model -CAPM
  - L'Arbitrage Pricing Theory -APT
- A.2)Modelli per il mercato obbligazionario
  - - Il prezzo equo di un'obbligazione
  - - La duration
    - come scadenza media finanziaria
    - come indicatore di rischio
  - - La duration modificata o volatilità
  - - La duration di un portafoglio
  - - La convessità
  - - Principi di immunizzazione
- A.3) Dalle misure di rischio tradizionali al VaR

- B)Rischio di credito:
  - La valutazione dell’esposizione al rischio di default
  - Le perdite attese, inattese delle singole posizioni
  - Stima della probabilità di default
  - La logica di portafoglio
    - Il modello CreditMetrics
    - Il modello CreditRisk+

Libri consigliati

Rischio di mercato

-"L'economia del mercato mobiliare" /Pier Luigi Fabrizi. Egea 2003 (Capitoli 9,10,11,12)

VaR e Rischio di credito

-"Opzioni futures e altri derivati" /John Hull. 3. ed. basata sulla 5. ed. americana Milano : Il sole-24 ore, 2003. (capitolo 16 e 26)

Informazioni

Ricevimento Martedi 12.00-13.00

-Esercitazioni pratiche

Modalità della prova di esame

La teoria del portafoglio :sommario in dettaglio

Rivediamo brevemente gli indicatori statistici per singoli titoli

- **indicatori di rendimento**
- **indicatori di rischio**
  - **varianza e deviazione standard**

Indicatori statistici per portafogli

- **rendimento e rischio**
- **correlazione e covarianza**

Come confrontare i titoli e portafogli tra loro?

La frontiera efficiente

- portafoglio con due titoli rischiosi
- portafoglio composto da un risk free e un titolo rischioso
- portafoglio a n titoli

La teoria del portafoglio studia la miglior ripartizione di un capitale in investimenti finanziari aleatori in funzione del rischio e del rendimento

- perché gli investitori detengono portafogli diversificati?
- Perché non investono tutto nel titolo più redditizio?
- Quale regola adottare per la scelta tra più titoli?

Per rispondere a queste domande, partiamo da un esempio (si veda il foglio di lavoro primo foglio.xls)

primo foglio.xls

Il rendimento di un investimento rischioso è una **variabile casuale R**.

L'aleatorieta' dei risultati futuri determina **il rischio** associato al singolo titolo.

Tanto più il corso di un'azione e' variabile, tanto piu' l'investimento e' rischioso e imprevedibile.

Ricordiamo che per investimenti con rendimento certo vi sono criteri che individuano i “migliori” investimenti : V.A.N. o R.E.A. , T.I.R.

La Teoria del Portafoglio, per investimenti con rendimento aleatorio, di fonda sul criterio MEDIA-VARIANZA.

- Tra due investimenti si preferisce quello che ha il maggior rendimento atteso e il minor rischio

- Come misuriamo il rendimento atteso ed il rischio?

Rendimento ex-post di periodo o holding period return.

- Media dei rendimenti di periodo
- Rendimento medio su piu' periodi, o time weigthed return

Rendimento di periodo

Il rendimento su un singolo periodo

$$r_{i,t} = \frac{P_{i,t} + D_{i,t} - P_{i,t-1}}{P_{i,t-1}}$$

$r_{i,t}$ = Holding Period Return

$P_{i,t-1}$ = Prezzo di acquisto al tempo t-1 (certo) del titolo i

$P_{i,t}$ = Prezzo di realizzo al tempo t (incerto)

$D_{i,t}$ = Dividendo capitalizzato nel periodo [t-1,t)

Oss. Le serie sono spesso aggiustate per i dividendi

Rendimenti su due periodi?

Se r_1=+10% e r_2 =-10% , quale e' la media del rendimento sul singolo periodo?

$r_a = (r_1 + r_2)/2 = 0$

si tratta della media aritmetica

$r_a = (r_1 + r_2 + r_3 + \ldots r_n) / n$

Rendimenti su due periodi?

Se r_1=+10% e r_2 =-10%, quale e' il rendimento medio realizzato nei due periodi ?

$r_g = \{(1+10\%)\ (1-10\%)\}^{1/2} - 1 = -0,5\%$

Si tratta della media geometrica

$r_g = \{[(1+r_1)\ (1+r_2)\ ....\ (1+r_N)]\}^{1/n} - 1$

La media geometrica prende il nome di *"time weighted return"*

Esercizio 1

Gli HPR (Holding period return) osservati in 4 periodi sono

.10

.25

- .20

.25

Calcolare

1) la media dei rendimenti,

2) il rendimento medio nei 4 periodi.

Come calcolo i rendimenti?

Media Aritmetica

$r_a = (r_1 + r_2 + r_3 + \ldots r_n) / n$

$r_a = (.10 + .25 - .20 + .25) / 4$

$= .10 = 10\%$

Media Geometrica

$r_g = \{[(1+r_1)\ (1+r_2)\ \ldots.\ (1+r_N)]\}^{1/n} - 1$

$r_g = \{[(1.1)\ (1.25)\ \ (.8)\ (1.25)]\}^{1/4} - 1$

$= (1.5150)^{1/4} - 1 = .0829 = 8.29\%$

I dati di input del modello media-varianza

Il modello media- varianza necessita di dati di input quali

una stima del rendimento futuro atteso,

una stima della rischiosità futura dei singoli titoli,

una misura del grado di correlazione tra i diversi titoli.

In un primo momento ipotizziamo delle stime basate su dati storici.

Vedremo successivamente come migliorare queste stime.

Il rendimento futuro atteso

In un modello di portafoglio, una previsione del rendimento futuro atteso nel periodo successivo, E(R), puo' essere ottenuta utilizzando la media aritmetica dei rendimenti realizzati in passato in un singolo periodo (ovvero la media del campione).

$$\overline{R} = \frac{1}{n} \sum_{i=1,n} r_i$$

Il rendimento futuro atteso

Per esempio si supponga che i rendimenti % fatti registrare negli ultimi 5 anni dai titoli *A* e *B* siano i stati seguenti:

A	10%	10%	9%	10%	11%	R_A=10%
B	5%	9%	8%	25%	28%	R_B= 15%

Misure di rischio: la varianza

Il rischio può essere misurato dalla varianza

$$VaR(R) = \sigma^2 \qquad S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1..n} [r_i - \overline{R}]^2$$

della quale la varianza campionaria è una stima

La volatilità è

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

Perchè la varianza è una misura di rischio?....

La varianza di un'attività priva di rischio e'

$$\sigma^2 = 0$$

Misure di rischio: la varianza

A	10%	10%	9%	10%	11%	m_A=10%
B	5%	9%	8%	25%	28%	m_B=15%

Il rischio del titolo A

$$S_A^2 = \frac{1}{4}(1^2 + 1^2) = 0.5$$

$$\sigma_A \ \ stimata = 0.71\%$$

Il rischio del titolo B

$$S_B^2 = \frac{1}{4}((-10)^2 + (-6)^2 + (-7)^2 + 10^2 + 13^2) = 113.5$$

$$\sigma_B \ \ stimata = 10{,}65\%$$

I rendimenti ottenuti dal titolo B sono risultati molto irregolari (addirittura peggiori rispetto a quelli ottenuti dal titolo A in ben 3 casi su 5); nonostante ciò, il rendimento medio *complessivo* del titolo B risulta superiore. Il rischio legato ad un investimento nel titolo B dipende dalla assoluta *imprevedibilità dei rendimenti attesi nel breve periodo*.

Il problema della selezione del portafoglio è un problema di decisioni finanziarie in *condizioni di incertezza:* infatti sia il rendimento dei singoli titoli che il rendimento del portafoglio sono rappresentati da *variabili aleatorie*.

Media

Funzione media

Varianza

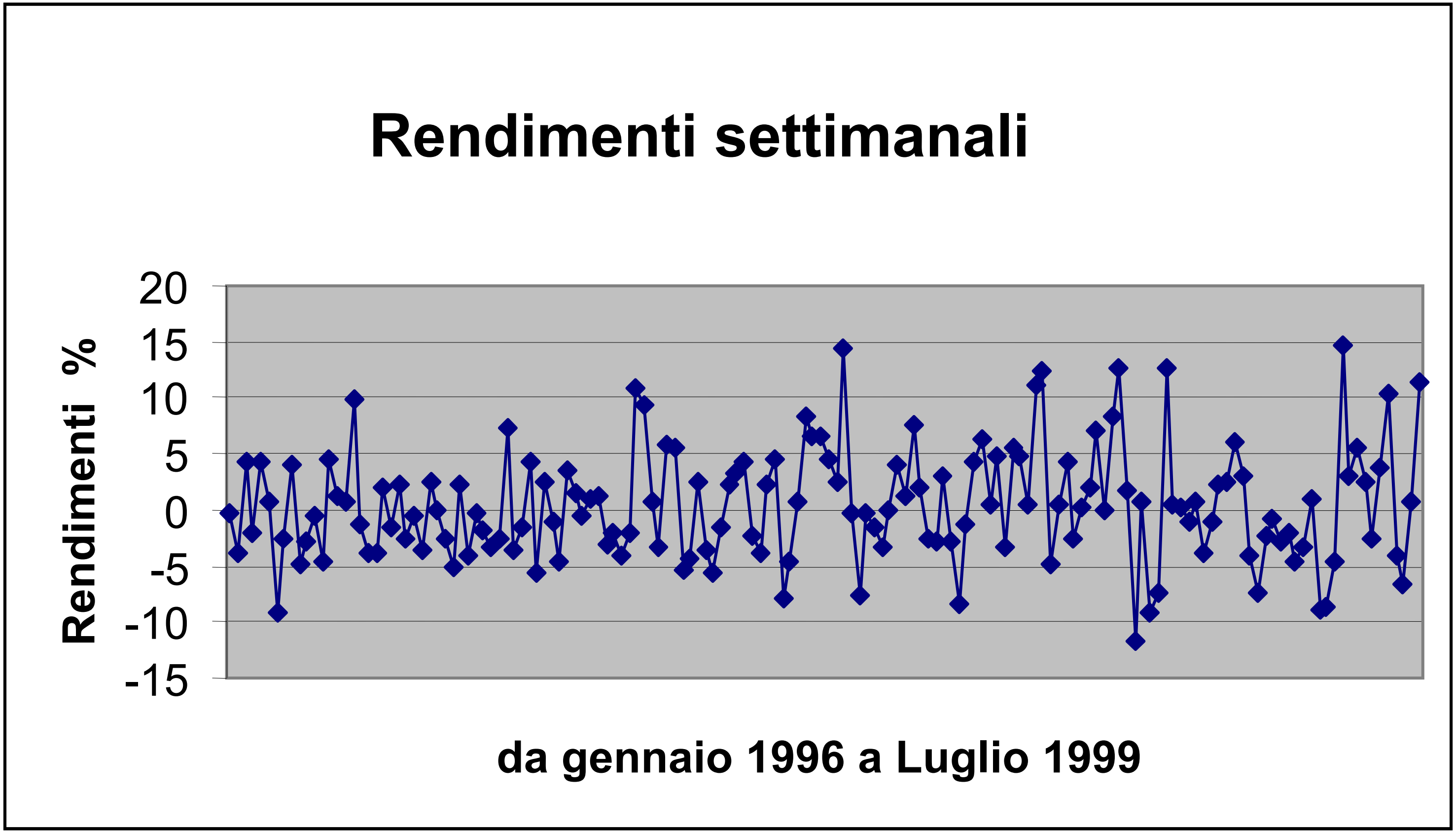
Funzione VAR

Volatiltà

Funzione radq (VAR)

Riprendiamo il nostro foglio excel: calcolare media e varianza delle serie storiche

Esempio

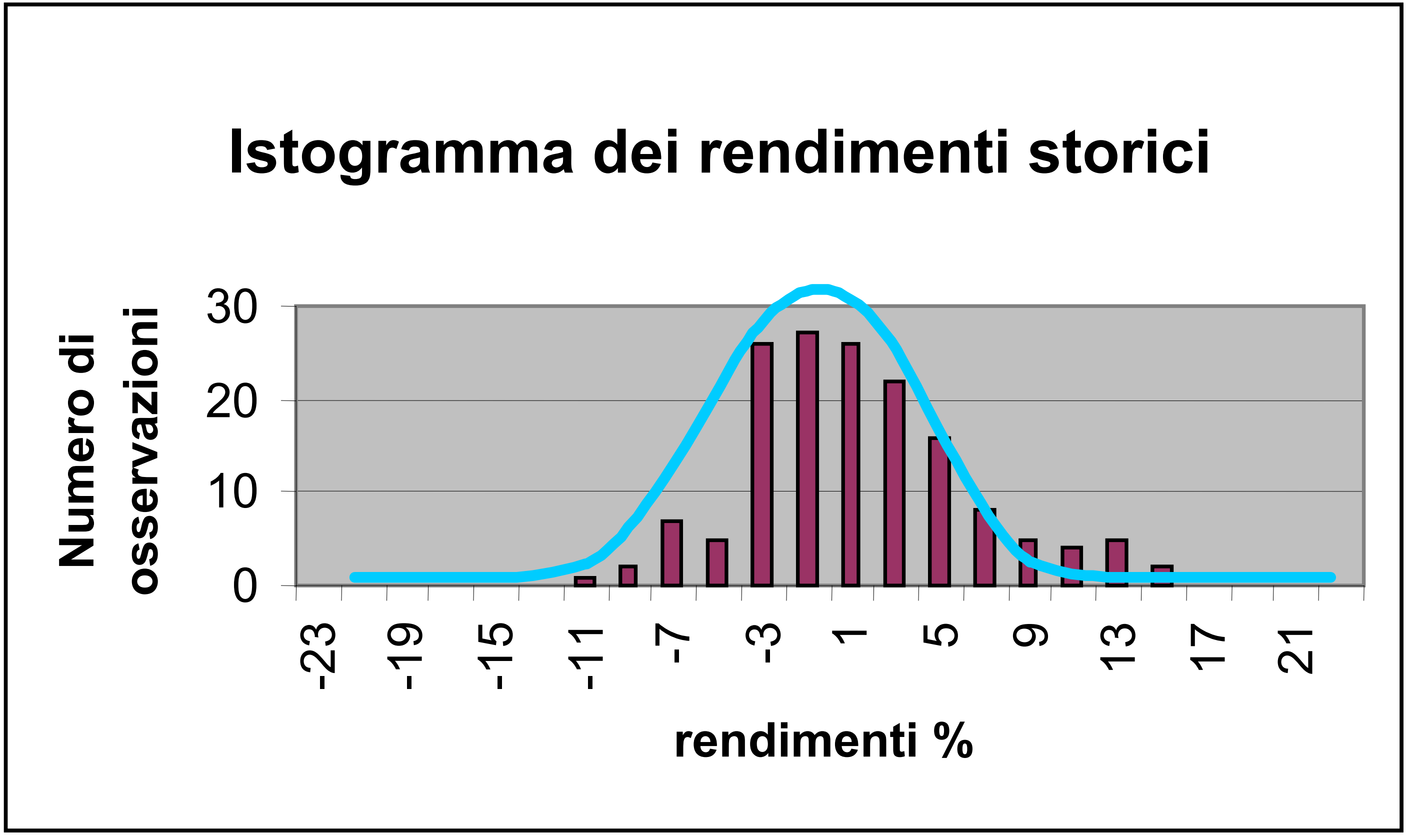

Rendimenti settimanali
Rendimenti %
20
15
10
5
0
-5
-10
-15
da gennaio 1996 a Luglio 1999

Alcune statistiche

Data la serie storica dei prezzi settimanali

– rendimento medio	0,41%
– varianza	0,0025897
– volatilità (s.q.m)	5,07%

Distribuzione empirica



Rivediamo brevemente gli indicatori statistici per singoli titoli

- **indicatori di rendimento**
- **indicatori di rischio**
  - **varianza e deviazione standard**

Indicatori statistici per portafogli

- **rendimento e rischio**
- **correlazione e covarianza**

Come confrontare i titoli e portafogli tra loro?

La frontiera efficiente

- portafoglio con due titoli rischiosi
- portafoglio composto da un risk free e un titolo rischioso
- portafoglio a n titoli

Come costruisco un portafoglio con 2 azioni

Il rendimento di un portafoglio composto da due titoli è dato da

$$R = x_1 R_1 + x_2 R_2$$

con $x_1 + x_2 = 1$

Il rendimento futuro atteso di un portafoglio e' la media pesata dei rendimenti attesi di ogni azione

$$E[R] = x_1 E[R_1] + x_2 E[R_2]$$

Quando due azioni con varianza $VAR(R_1)=\sigma_1^2$ e $VAR(R_2)= \sigma_2^2$, rispettivamente, sono combinate in un portafoglio con pesi x_1 e x_2, la varianza del portafoglio e' data da

$$VAR(R) = VAR(x_1 R_1 + x_2 R_2)=$$

$$= x_1^2 VAR(R_1)+x_2^2 VAR(R_2) + 2x_1 x_2 Cov(R_1,R_2)$$

Scritto in modo più compatto

$$\sigma_p^2 = x_1^2\sigma_1^2 + x_2^2\sigma_2^2 + 2x_1 x_2 Cov(R_1,R_2)$$

$Cov(R_1,R_2)$ = Covarianza dei rendimenti delle azioni 1 e 2

La covarianza e' una misura della dispersione congiunta di 2 titoli intorno alla media . Una stima della covarianza e' data da :

$$COV(R_1, R_2) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (r_{1,i} - \overline{R_1})(r_{2,i} - \overline{R_2})$$

una covarianza negativa indica, "intuitivamente", che quando il rendimento di un titolo è sotto la media, il rendimento dell'altro è sopra la media. Cioe' i due titoli si muovono generalmente in modo opposto.

La Covarianza dipende dall'unità di misura adottata.
Esempio: covarianza tra peso e altezza dei partecipanti al corso.

Il coefficiente di correlazione è un indicatore adimensionale.

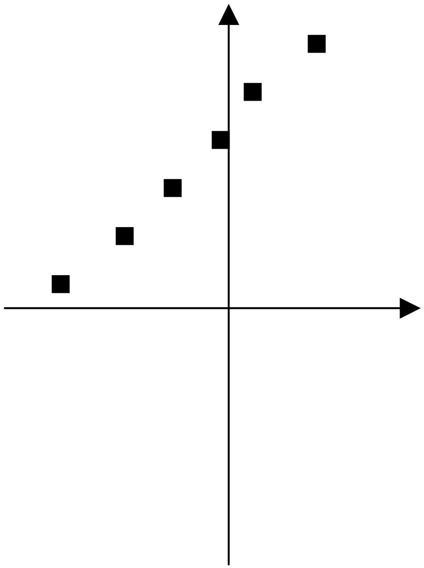
$$\rho = \frac{COV(R_1, R_2)}{\sigma_1 \sigma_2}$$

$$-1 \leq \rho \leq 1$$

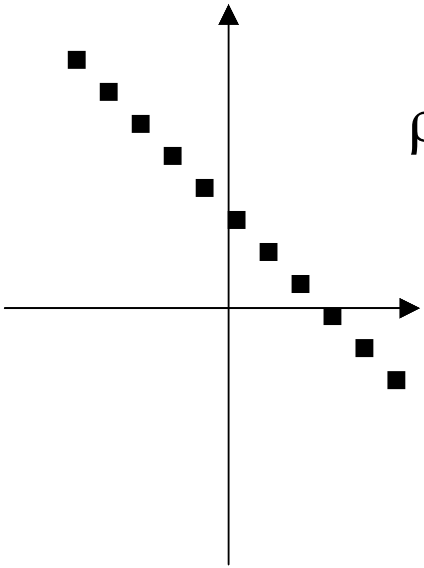
Un $\rho<1$ rivela la possibilità di ridurre il rischio complessivo.

Oss $\sigma_p^2 = x_1^2\sigma_1^2 + x_2^2\sigma_2^2 + 2x_1x_2\rho\sigma_1\sigma_2$

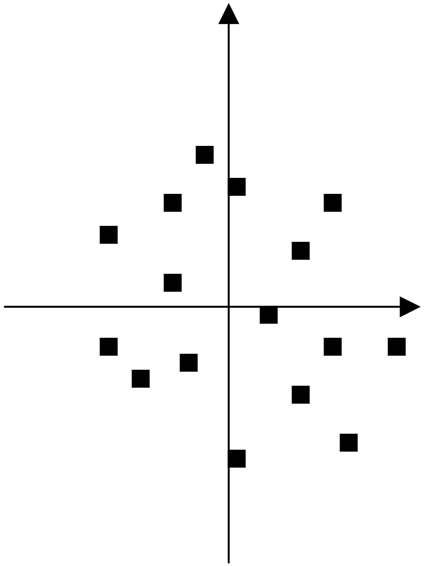
Il coefficiente di correlazione



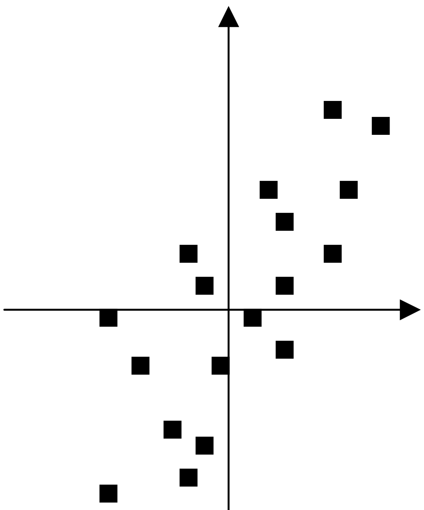
ρ=1



ρ=-1



ρ=0



0<ρ<1

Il coefficiente di correlazione

- $\rho=\pm 1$ i rendimenti dei due titoli sono legati da una dipendenza lineare perfetta
- $\rho=0$ i rendimenti non sono correlati linearmente (rendimenti sparsi)
- $0<\rho<1$ caso più realistico, i rendimenti si muovono insieme ma non perfettamente

Esercizio 2

Stima varianza, covarianza e correlazione dei seguenti dati

Costruisci portafogli con diverse composizioni

settimana	A rend %	B rend %
1	-7	+17
2	12	7
3	28	-3

Puoi arrivare a delle conclusioni? Si veda frontiera efficiente.xls

Rivediamo brevemente gli indicatori statistici per singoli titoli

- **indicatori di rendimento**
- **indicatori di rischio**
  - **varianza e deviazione standard**

Indicatori statistici per portafogli

- **rendimento e rischio**
- **correlazione e covarianza**

Come confrontare i titoli e portafogli tra loro?

La frontiera efficiente

- portafoglio con due titoli rischiosi
- portafoglio composto da un risk free e un titolo rischioso
- portafoglio a n titoli

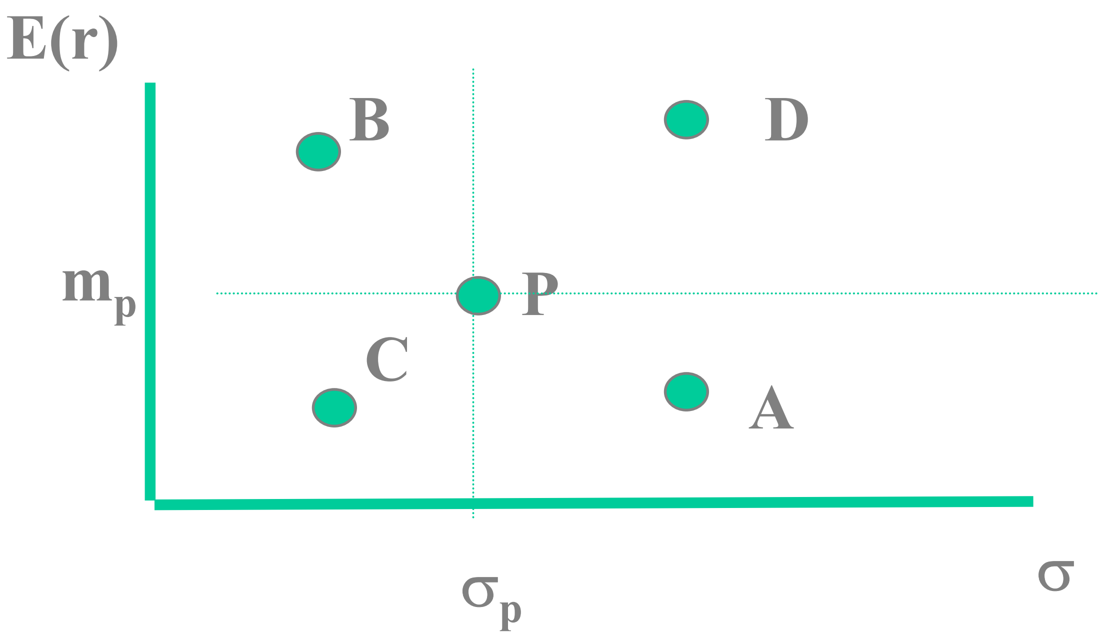
Si dice che un portafoglio A domina un portafoglio B:

$$A \succ B$$

Quando vale almeno una delle disuguaglianze con il segno forte

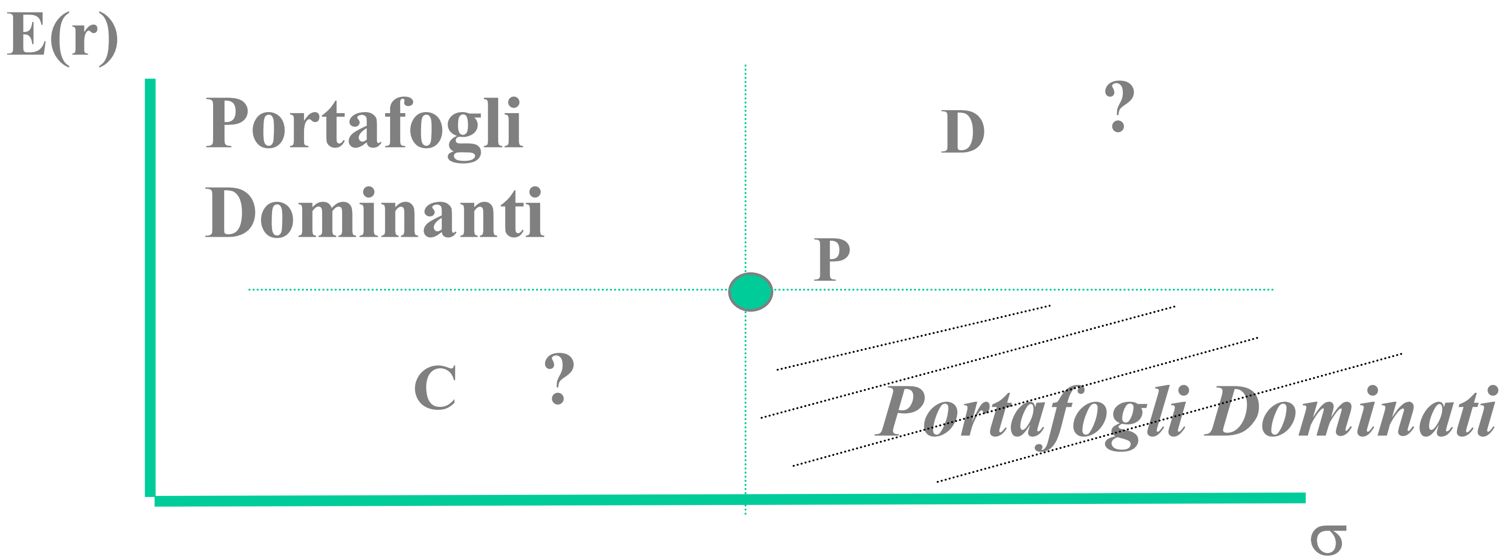
$$A \succ B \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} E[A] \geq E[B] \\ \sigma_A^{\ 2} \leq \sigma_B^{\ 2} \end{cases}$$

Criterio M-V: Principio di dominanza



- D domina A; ha un maggior rendimento atteso
- C domina A: ha un rischio piu' contenuto
- B domina C; ha un rendimento atteso maggiore

Criterio M-V



- Titoli Efficienti: hanno minor rischio e un maggior rendimento atteso

I portafogli C e D non sono confrontabili: il criterio introduce un *ordinamento parziale* tra portafogli

Non vogliamo esaminare le **singole azioni** e scartare quelle dominate.

Vogliamo estendere l'analisi a tutti i portafogli che posso ottenere combinando le azioni.

Si può scoprire che un titolo dominato non deve essere necessariamente escluso dal mio portafoglio perché……

Criterio M-V Principio di dominanza

Portafogli ammissibili: insieme di alternative possibili (che includono le singole azioni e combinazioni lineari delle stesse)

Portafogli efficienti: un portafoglio e' efficiente quando non e' dominato da nessun altro portafoglio ammissibile

La scelta tra i portafogli efficienti avviene in base alla propensione al rischio dell'investitore, ovvero in base ad una *funzione di utilità.*

Rivediamo brevemente gli indicatori statistici per singoli titoli

- **indicatori di rendimento**
- **indicatori di rischio**
  - **varianza e deviazione standard**

Indicatori statistici per portafogli

- **rendimento e rischio**
- **correlazione e covarianza**

Come confrontare i titoli e i portafogli tra loro?

La frontiera efficiente

portafoglio con due titoli rischiosi

portafoglio composto da un risk free e un titolo rischioso

portafoglio a n titoli

Impostazione del modello

Consideriamo un numero *n* di titoli a rendimento non certo. Si è già visto che i rendimenti dei singoli titoli sono rappresentati da *variabili aleatorie* che indicheremo con

R_1 , R_2 , …..R_n

Sia C il capitale disponibile per investire negli n titoli (portafoglio P)

Devo decidere quanto investire nel titolo 1, quanto nel titolo 2,…, tenuto conto del criterio di scelta media-varianza, ovvero allo scopo di ottenere portafogli a minimo rischio, per un fissato livello di rendimento.

Impostazione del modello

Indicato con C_1 l'ammontare da destinare all'acquisto del titolo 1 , con C_2 l'ammontare da destinare al titolo 2, e così via, risulta

$C_{1} + C_2 + \ldots.. + C_n = C$

poiché tutto il capitale disponibile viene investito.

Per rendere omogenei tali valori, ovvero per confrontare tra loro portafogli di diversi importi, conviene

$$\frac{c_1}{C} + \frac{c_2}{C} + \ldots \frac{c_n}{C} = \frac{C}{C}$$

$$\text{ovvero } x_1 + x_2 + \ldots..+ x_n = 1$$

Impostazione del modello

Essendo $x_i \geq 0, \forall i$, quindi ogni x_i rappresenta la quota percentuale investita nel titolo *i* .

Rendimento del portafoglio: variabile aleatoria R_P

$$R_P = x_1 R_1 + x_2 R_2 + \ldots..x_n R_n$$

somma pesata di n v.a. o combinazione lineare di n variabili.

Per ogni v.a. R_i , rendimento del titoli i-esimo, si possono calcolare valore atteso e varianza

$E(R_i)=m_i$ e $Var(R_i)$

Ipotesi del modello

Il modello di Markowitz si basa sulle seguenti ipotesi

•Gli investitori selezionano i portafogli in base al rendimento atteso e al rischio atteso.

•L'orizzonte temporale è uniperiodale

•Gli investitori sono avversi al rischio e massimizzano l'utilità attesa

Come costruiamo la frontiera efficiente a partire da due titoli azionari?

A tal fine introduciamo il concetto di diversificazione: come ridurre il rischio totale, senza "sacrificare" il rendimento.

Scopriremo che si può verificare che il portafoglio efficiente a rischio minimo ha un rischio minore di $\min(\sigma_1, \sigma_2)$.

Si parla di effetto contrazione del rischio.

Come costruiamo la frontiera efficiente a partire da due titoli azionari?

Supponiamo di avere due azioni (v.a. R_1 e R_2) con
$E(R_1)<E(R_2)$ e $\sigma_1 < \sigma_2$

Il portafoglio e' caratterizzato da

$$E(R_p) = x\,E(R_1) + (1-x)\,E(R_2)$$

$$\sigma_p^2 = x^2 \sigma_1^2 + (1-x)^2 \sigma_2^2 + 2x(1-x)\,\sigma_1 \sigma_2 \rho$$

Dobbiamo esprimere il rendimento in funzione del rischio

Esempio*

Siano dati 2 titoli

$E(R_1) = 8\%, \sigma_1 = 12\%$
$E(R_2) = 10\%, \sigma_2 = 15\%$

Facciamo delle ipotesi su ρ

Quando abbiamo una contrazione del rischio?

Considero 8 portafogli con diversi pesi e ipotizzo diversi coefficienti di correlazione

frontiera efficiente.xls

*Da Bodie Kane Marcus "Essential of investment"

Il portafoglio e' caratterizzato da

$$E(R_p) = x\, E(R_1) + (1-x)\, E(R_2)$$

$$\sigma_p^{\,2} = x^2 \sigma_1^{\,2} + (1-x)^2 \sigma_2^{\,2} + 2x(1-x)\, \sigma_1 \sigma_2 \rho$$

$$0 \le x \le 1$$

Portafoglio	E[r]	-1	-0.15	0	0.15	1		x	1-x
1	0.080	0.120	0.120	0.120	0.120	0.120		1.000	0.000
2	0.084	0.066	0.096	0.101	0.105	0.126		0.800	0.200
3	0.088	0.012	0.087	0.094	0.100	0.132		0.600	0.400
4	0.089	0.000	0.087	0.094	0.101	0.133		0.556	0.444
5	0.090	0.015	0.089	0.096	0.103	0.135		0.500	0.500
6	0.092	0.042	0.095	0.102	0.108	0.138		0.400	0.600
7	0.096	0.096	0.119	0.122	0.126	0.144		0.200	0.800
8	0.100	0.150	0.150	0.150	0.150	0.150		0.000	1.000

Significato di ρ: coeff. di correlazione lineare

ρ =1 *Perfetta correlazione lineare positiva.*

●Significa che i rendimenti dei titoli sono perfettamente correlati positivamente: variano nella stessa direzione e per lo stesso ammontare. Nella realtà non esistono titoli che si comportano così: esistono invece titoli con elevata correlazione positiva (ρ =0,8 o ρ =0,9).

● ρ = -1 *Perfetta correlazione lineare negativa.*

●I rendimenti dei titoli sono perfettamente correlati negativamente: variano in direzioni opposte e per lo stesso ammontare.

ρ = 0. Assenza di correlazione lineare

●I titoli non sono correlati né positiva-mente, né negativamente. Nel piano di rappresentazione dei due rendimenti si ottiene una nuvola di punti

ρ =1 : perfetta correlazione positiva

Riprendiamo la (2):

$\sigma_P^{\,2} = x^2 \sigma_1^{\,2} + (1\text{-}x)^2 \sigma_2^{\,2} + 2x(1\text{-}x)\,\rho_{12}\,\sigma_1 \sigma_2$

diventa

$$\sigma_P^{\,2} = \left[x\sigma_1 + (1-x)\sigma_2\right]^2$$

Quindi

$$\sqrt{\sigma_P^{\,2}} = \sigma_P = x\sigma_1 + (1-x)\sigma_2$$

da cui si può ricavare la variabile x e sostituire in (1). Risulta:

$$x = \frac{\sigma_2 - \sigma}{\sigma_2 - \sigma_1}$$

ρ =1 : perfetta correlazione positiva

E sostituendo in $m_P = x\, m_1 + (1\text{-}x)\, m_2$

Si ottiene:

$$m = \frac{m_2 - m_1}{\sigma_2 - \sigma_1}\sigma + \frac{\sigma_2 m_1 - \sigma_1 m_2}{\sigma_2 - \sigma_1}$$

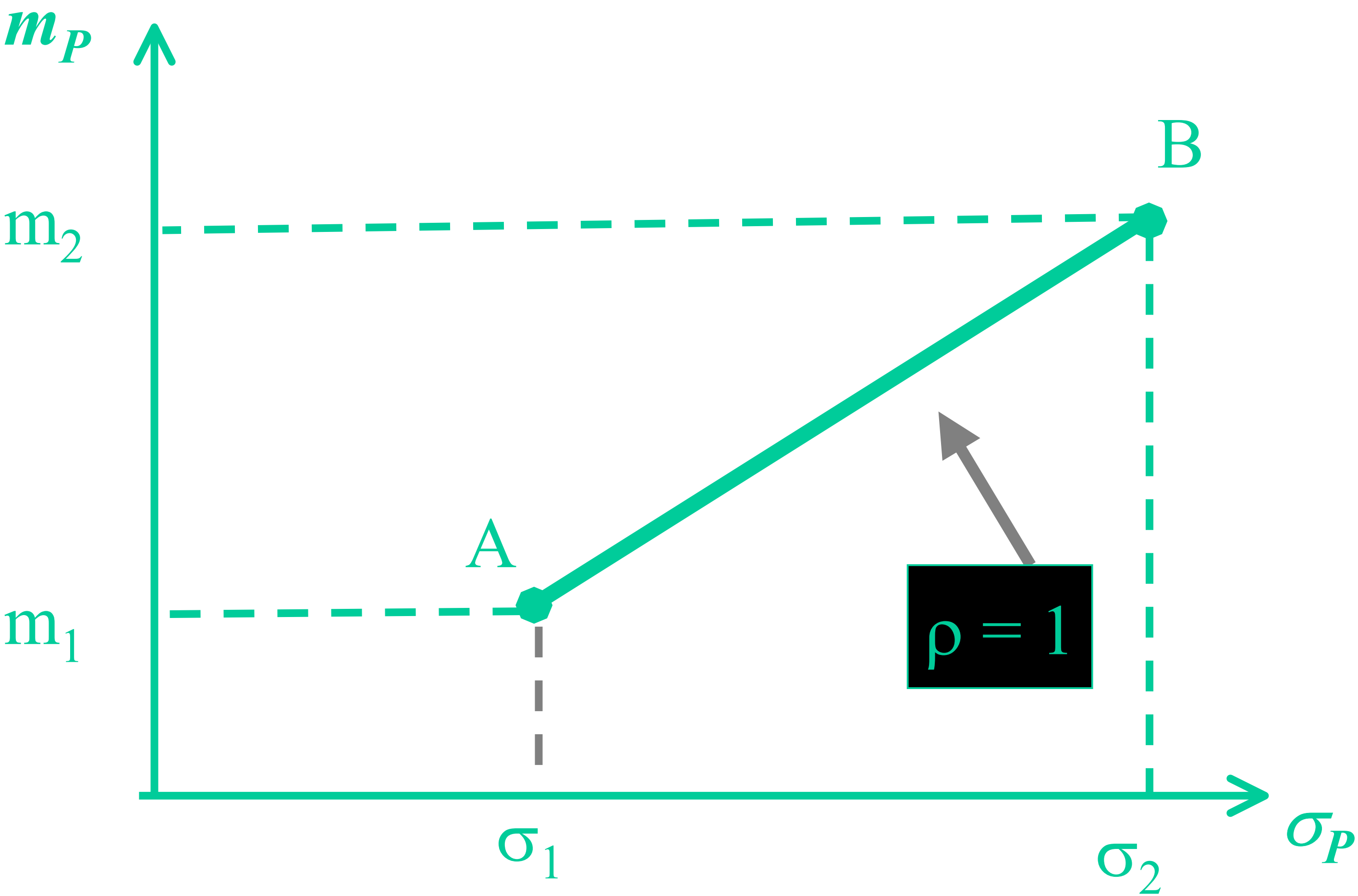
e posto

$$\beta = \frac{m_2 - m_1}{\sigma_2 - \sigma_1}, \quad risulta\ \beta > 0$$

Si ha la F.E $\boxed{m = \beta\sigma + \alpha}$

Si può verificare che la retta passa per A e B.

Perfetta correlazione positiva



La (2) diventa : $\sigma_P^{\ 2} = \left[x\sigma_1 - (1-x)\sigma_2\right]^2$

Quindi

$$\sqrt{\sigma_P^{\ 2}} = \sigma_P = \left|x\sigma_1 - (1-x)\sigma_2\right|$$

$$\sigma_P = \begin{cases} x\sigma_1 - (1-x)\sigma_2 \quad , \text{per } \ x \geq \dfrac{\sigma_2}{\sigma_1+\sigma_2} & \text{(1)} \\ -\left[x\sigma_1 - (1-x)\sigma_2\right] \quad , \text{per } \ x \leq \dfrac{\sigma_2}{\sigma_1+\sigma_2} & \text{(2)} \end{cases}$$

ρ=-1:perfetta correlazione negativa

Si noti che per x= $\sigma_2/(\sigma_1+\sigma_2)$ si ottiene un PRT con varianza nulla!

Esaminiamo i due casi separatamente:

1 si ricava la variabile x e si sostituisce nella (1).

$$x = \frac{\sigma + \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}$$

Si ottiene

$$m = \frac{m_1 - m_2}{\sigma_1 + \sigma_2}\sigma + \frac{m_1\sigma_2 + m_2\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2}$$

ρ=-1:perfetta correlazione negativa

Per semplificare si pone

$$\beta_1 = \frac{m_1 - m_2}{\sigma_1 + \sigma_2}$$

Notare che $\beta_1 < 0$!

e $$\alpha_1 = \frac{m_1\sigma_2 + m_2\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2}$$

Si ha la F.E

$$m = \beta_1 \sigma + \alpha_1$$

Si può verificare che tale retta passa per i punti **A** e **C** $(0, \alpha_1)$

2 si ricava la variabile x e si sostituisce nella (1):

$$x = \frac{-\sigma + \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}$$

Si ottiene $$m = \frac{m_2 - m_1}{\sigma_1 + \sigma_2}\sigma + \frac{m_1\sigma_2 + m_2\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2}$$

Posto

$$\beta_2 = \frac{m_2 - m_1}{\sigma_1 + \sigma_2}, \text{ con } \beta_2 > 0 \qquad \text{e} \quad \alpha_1 = \frac{m_1\sigma_2 + m_2\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2}$$

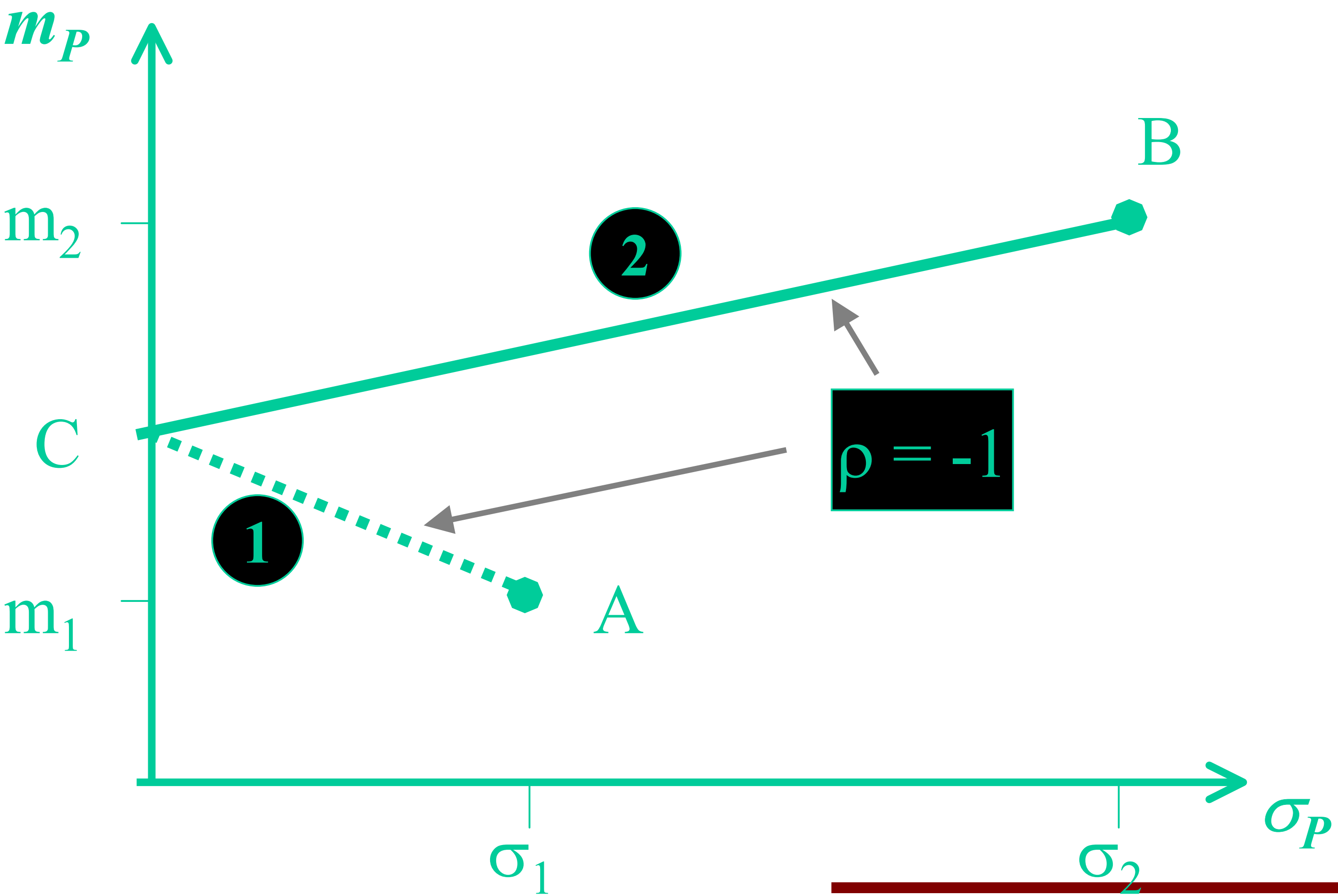
Si ha la F.E

$$\boldsymbol{m = \beta_2\, \sigma + \alpha_1}$$

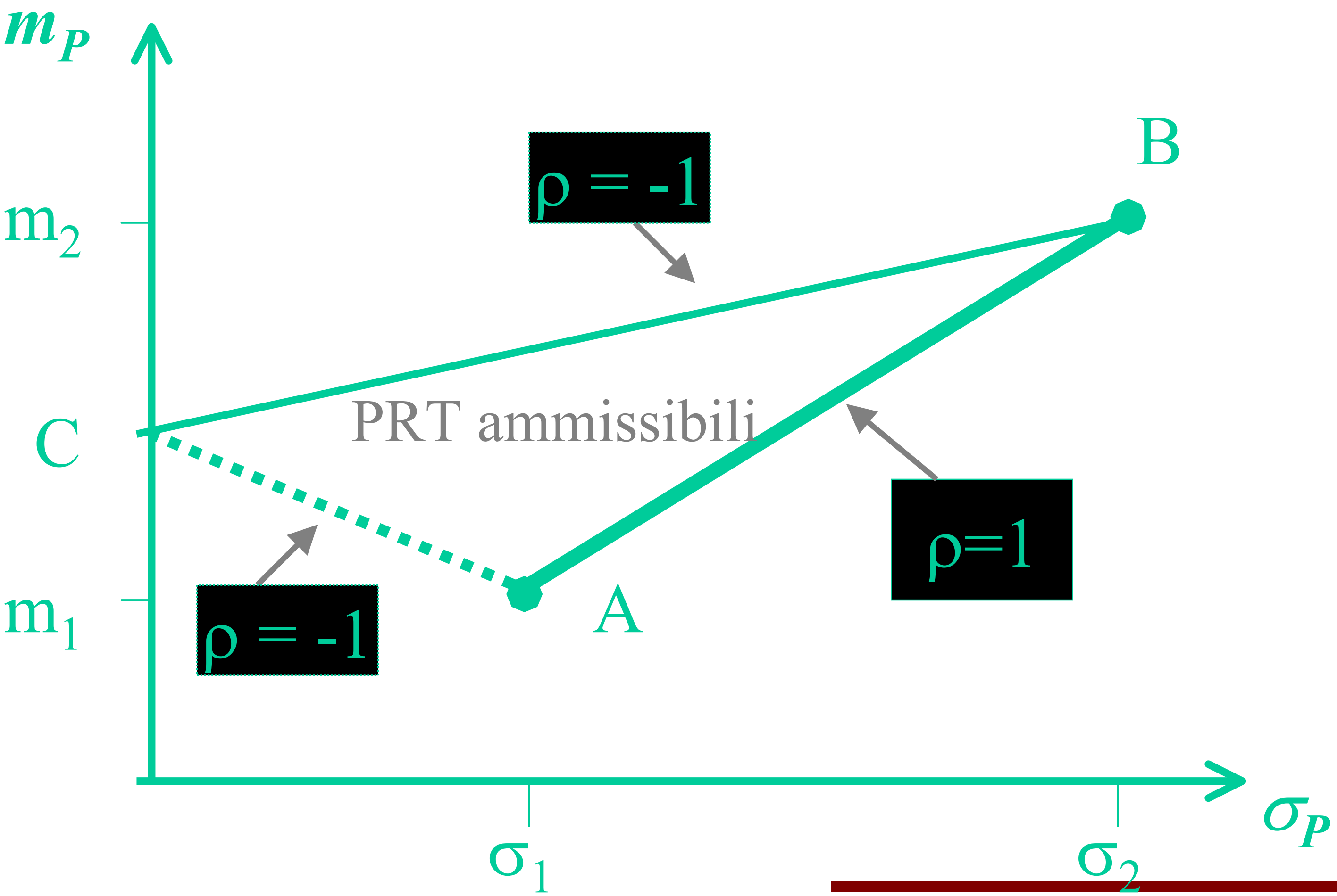
Si può verificare che tale retta passa per i punti

C (0, α_1) e B.

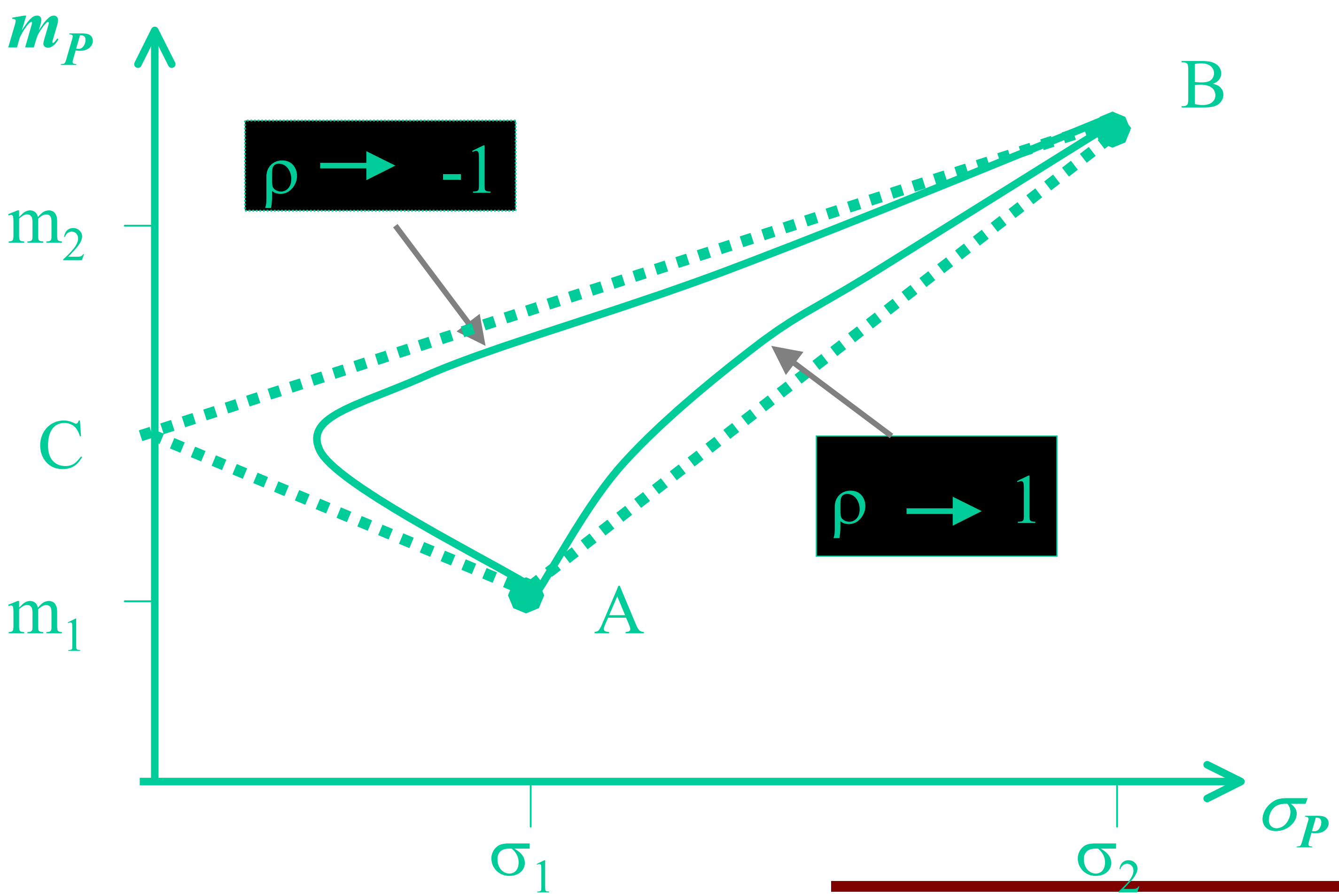
PRT con perfetta correlazione negativa



PRT ammissibili



PRT ammissibili



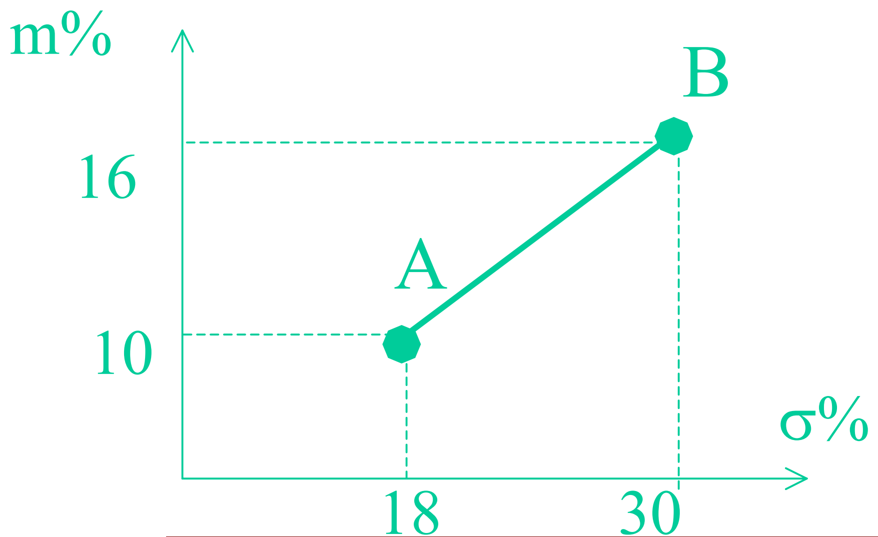
Le formule relative ai casi esaminati si semplificano notevolmente quando si sostituiscono valori numerici.

- Si considerano due azioni tali che:

R_1 : $m_1 = 10\%$, $\sigma_1 = 18\%$

R_2 : $m_2 = 16\%$, $\sigma_2 = 30\%$

- Sia $\rho = 1$ graficamente abbiamo visto che la F.E. è lineare



Esempio con $\rho = 1$

- Calcoliamo m_P e σ_P

$m_P = 10x+16(1-x)= 16-6x \qquad (1)$

$\sigma_P = 18x+30(1-x)= 30-12x$

Ricavo x : $x=(30-\sigma)/12$ e sostituisco in (1)

$$\mathbf{m_P = 0,5\,\sigma_P + 1} \qquad \textbf{F.E.}$$

Verifico che passa per A e B.

Esempio ρ =- 1

- Sia $\rho = -1$. La (1) non cambia $m_P = 16-6x$

- $\sigma_P = |18x-30(1-x)| = |48x-30|$

$$\sigma_P = \begin{cases} 48x - 30 & \text{per } x \geq 0{,}625 \quad (1) \\ -48x + 30 & \text{per } x \leq 0{,}625 \quad (2) \end{cases}$$

1 $\sigma_P = 48x-30$ Ricavo x : $x=(\sigma+30)/48$ e sostituisco in (1)

$$\mathbf{m_P = 12{,}25 - 0{,}125\, \sigma_P} \qquad \textbf{F.A.}$$

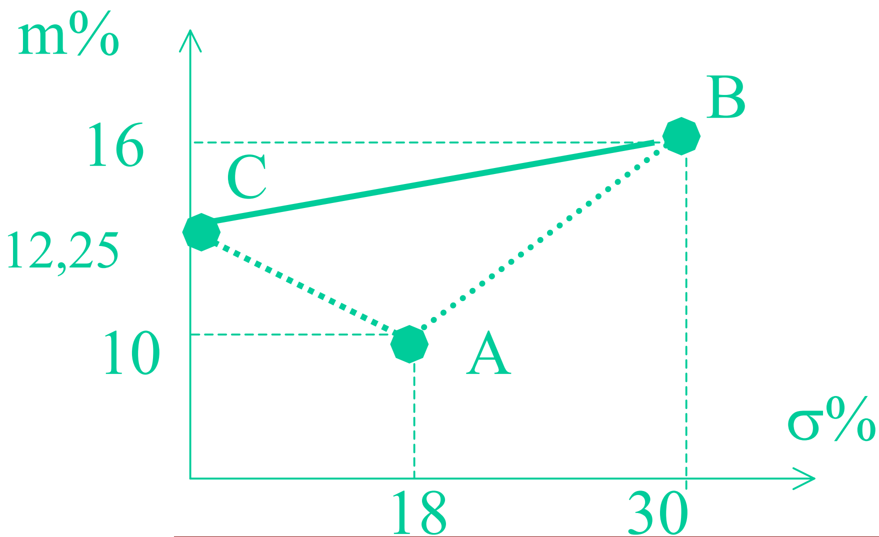
Verifico che passa per **A** e **C**

2 La (2) diventa $\sigma_P = -48x+30$, per $x \leq 0{,}625$

Ricavo x : $x=(30-\sigma)/48$ e sostituisco in (1)

$$\mathbf{m_P = 12{,}25 + 0{,}125\,\sigma_P} \quad \textbf{F.E.}$$

Verifico che **non** passa per **A** , passa per **B** e **C**:i PRT efficienti sono collocati sul segmento CB



Esempio $\rho = 0$

- Non abbiamo le formule generali, iniziamo con i dati:

$\sigma_P^{\,2} = x^2 \sigma_1^{\,2} + (1-x)^2 \sigma_2^{\,2} + \mathbf{0} = 18^2 x^2 + 30^2 (1-x)^2$

Sviluppando e raccogliendo risulta

$$\sigma_P^{\,2} = 1.224\, x^2 - 1.800\, x + 900$$

La varianza del PRT è una funzione di secondo grado che dipende da x. Quando è minima la varianza?

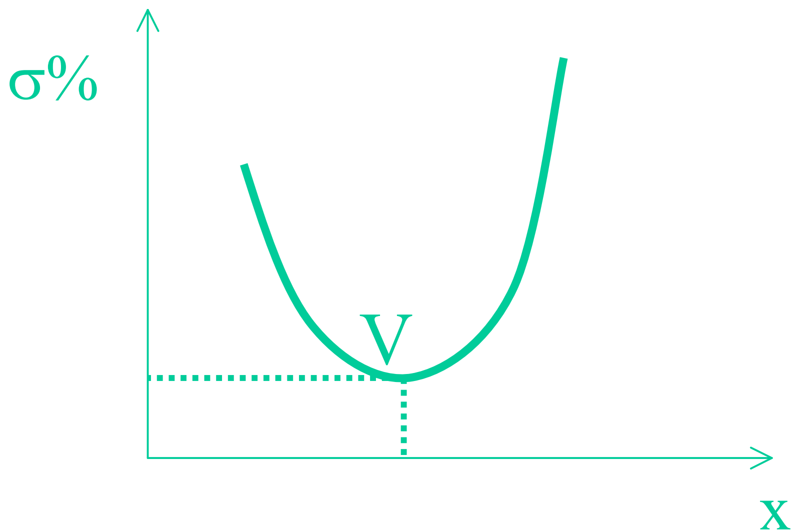
$$\frac{d\sigma^2}{dx} = 2.448x - 1.800 = 0$$

x=0.735

Sostituendo questo valore di x in σ_P^2 si ha:

$$\sigma_P^{\,2} = 238{,}2 \quad , \quad \sigma_P = \sqrt{238{,}2} = 15{,}4\%$$

Quale rendimento medio corrisponde a questo PRT?

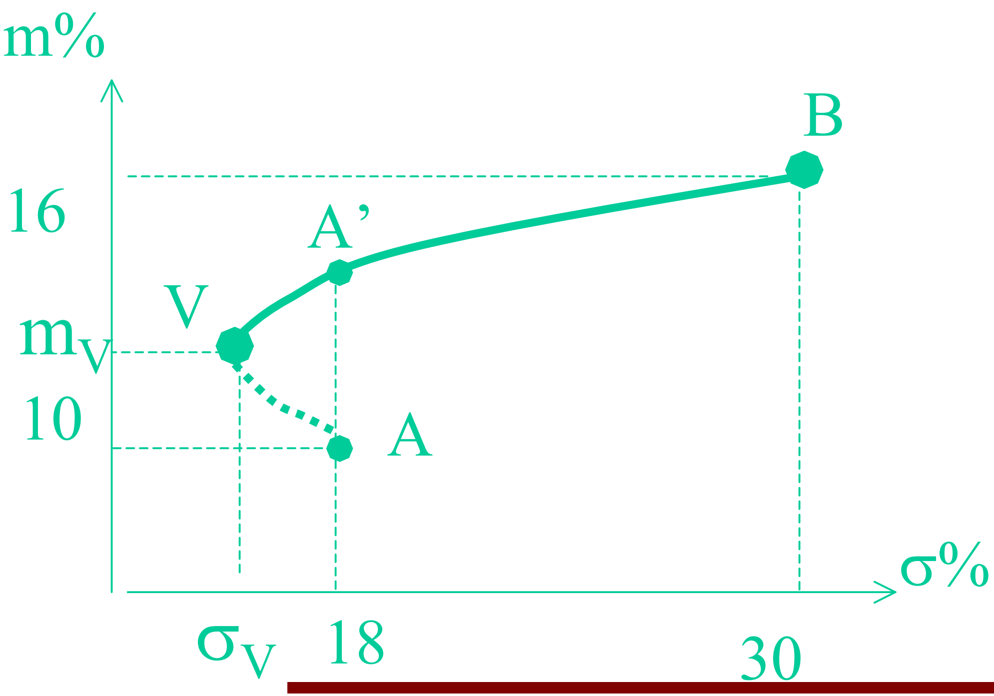


Dalla (1) $m_P = 16 - 6x$ sostituendo $x = 0{,}735$

Si ha $m_P = 11{,}58\%$

Possiamo allora cercare di rappresentare la F.E.

Sull'arco VB sono collocati i PRT efficienti. Una opportuna miscela di A e B conduce al PRT V con $\sigma_V = 15{,}4\% < \sigma_1$. Come si spiega?



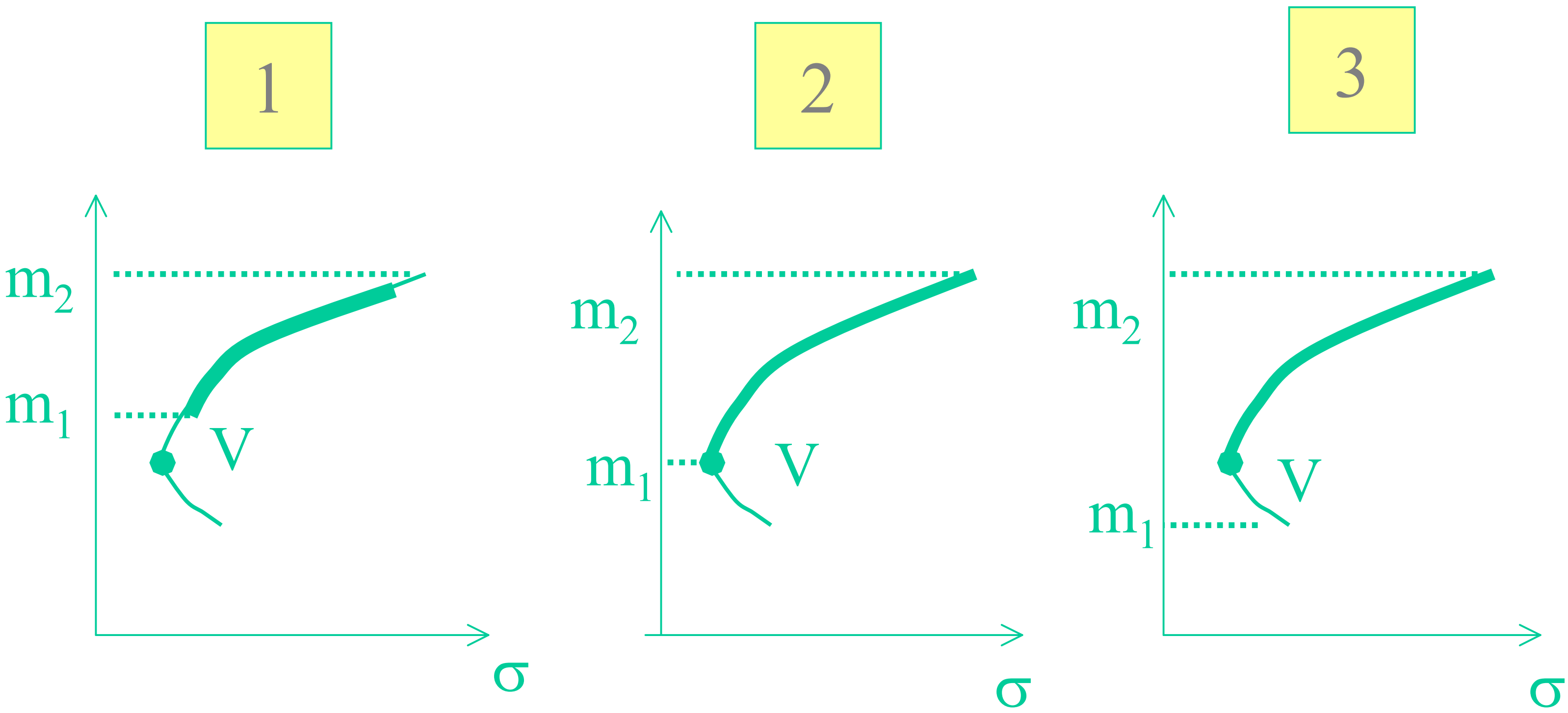
E' opportuno caratterizzare i casi in cui la F.E. ha un punto di svolta.

Si dimostra che esiste un $\rho^* > 0$ tale che:

- se $\rho_P > \rho^*$ non si ha punto di svolta. La linea dei PRT ammissibili è compresa tra σ_1 e σ_2 e coincide con i PRT efficienti

- se $\rho_P \leq \rho^*$ la curva ha un punto di svolta: i PRT efficienti sono collocati sull'arco superiore della curva VB

Possiamo distinguere tre casi possibili



Deve essere V compreso tra m_1 e m_2 : casi 2 e 3.

2

Se $V = m_1 \rightarrow x=1$

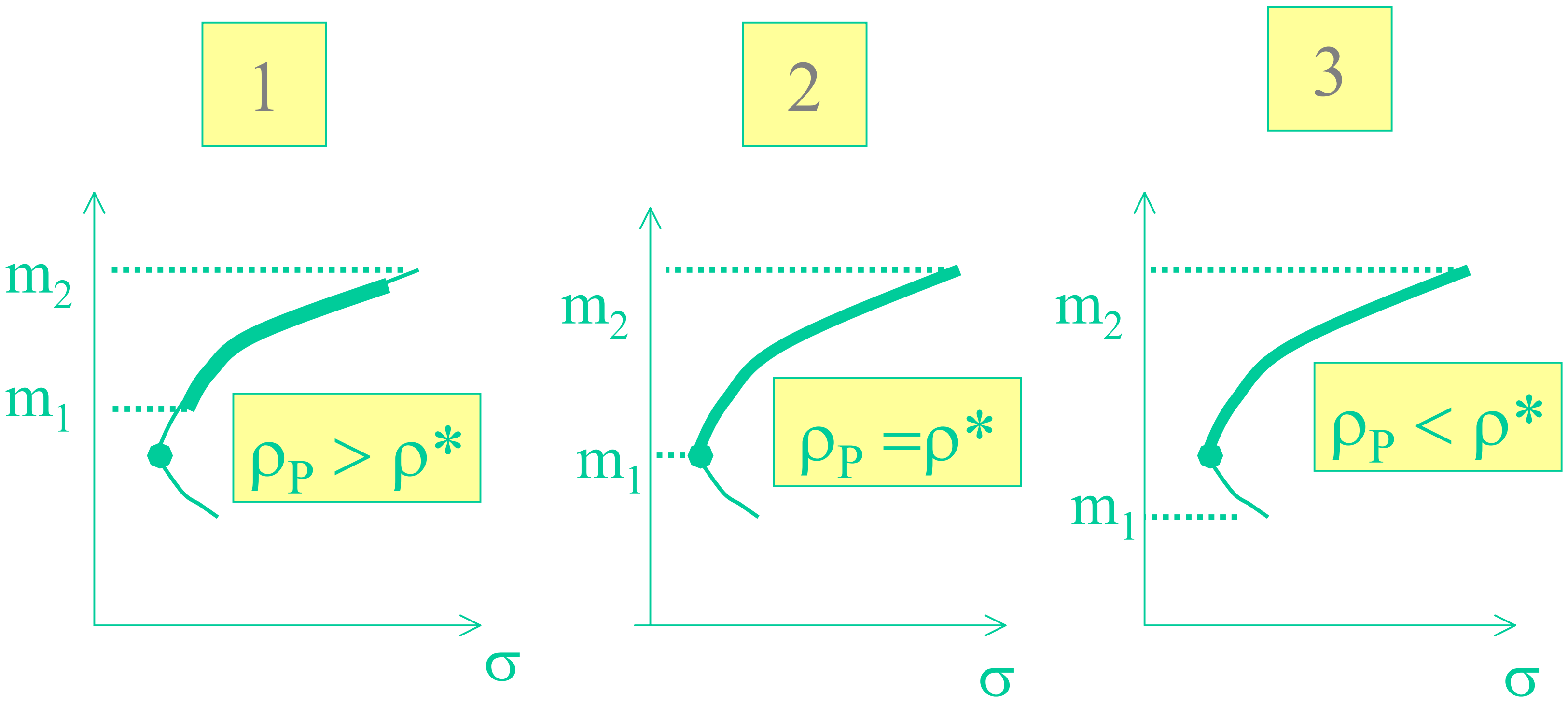
In altri termini la varianza è minima per x=1

$$\sigma_P^2 = x^2 \sigma_1^2 + (1-x)^2 \sigma_2^2 + 2x(1-x)\, \rho_{12}\, \sigma_1 \sigma_2$$

$$\frac{d\sigma^2}{dx} = 0 \quad \text{per } x = 1$$

$$\left.\frac{d\sigma^2}{dx}\right|_{x=1} = 2\sigma_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 = 0 \qquad \rho^* = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$$

Quindi in un PRT c'è contrazione del rischio se risulta $\rho_P \leq \rho^*$. Rivediamo i casi esaminati



Riprendiamo l'esempio già trattato: si ha
$\sigma_1 = 18\%$ e $\sigma_2 = 30\%$

Se fosse $\rho_P = 0,3$ come trovare i PRT efficienti che investono nelle due azioni?

Notiamo che risulta $$\rho^* = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{18}{30} = 0,6 \quad \text{quindi} \;\; \rho < \rho^*$$

Occorre calcolare σ_P^2 con i nuovi dati. Si ha

$\sigma_P^2 = 900x^2 - 1.476x + 900$

$$\frac{d\sigma^2}{dx} = 1.800x - 1.476$$

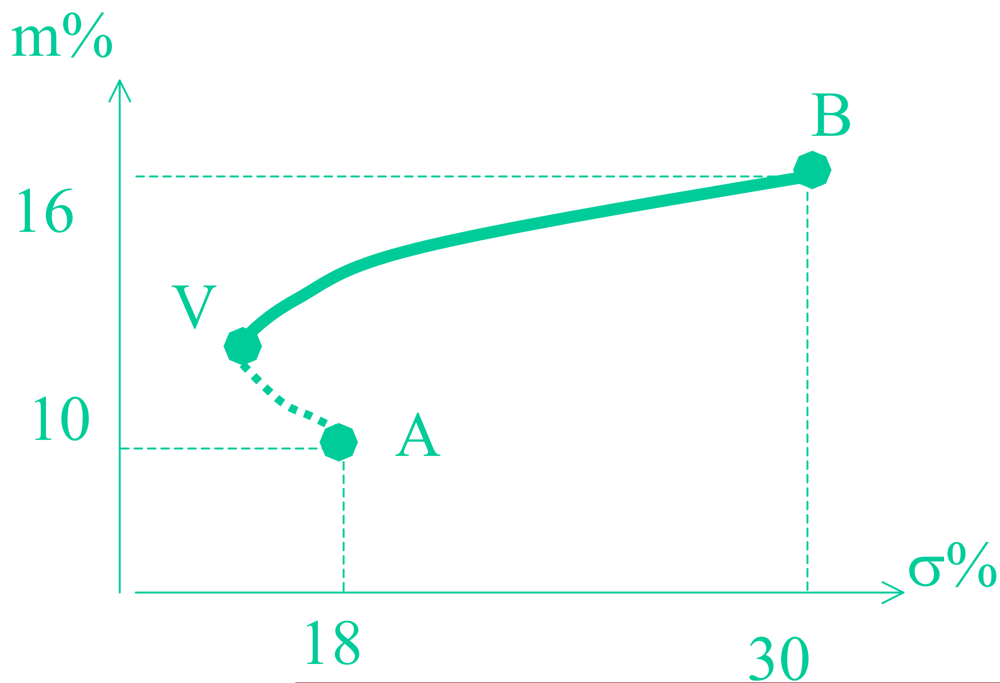
$$\frac{d\sigma^2}{dx} = 0 \qquad \text{per } \; x = 0,82$$

Risaliamo alle coordinate in σ e m :

$\sigma^2_{(x=0,83)}$=289,84 , σ=17,02% $m_{P\ (x=0,83)}$=16-6x=11,08%

PRT a var Minima:

$$V = \begin{cases} x = 0.82 \\ \sigma = 17\% \\ m = 11\% \end{cases}$$



PRT efficienti: arco VB

Se invece fosse ρ_P = 0,7 come trovare i PRT efficienti che investono nelle due azioni?

Notiamo che risulta $$\rho^* = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{18}{30} = 0,6 \quad \text{quindi} \;\; \rho > \rho^*$$

Occorre calcolare σ_P^2 con i nuovi dati. Si ha

$\sigma_P^2 = 468x^2 - 1.044x + 900$

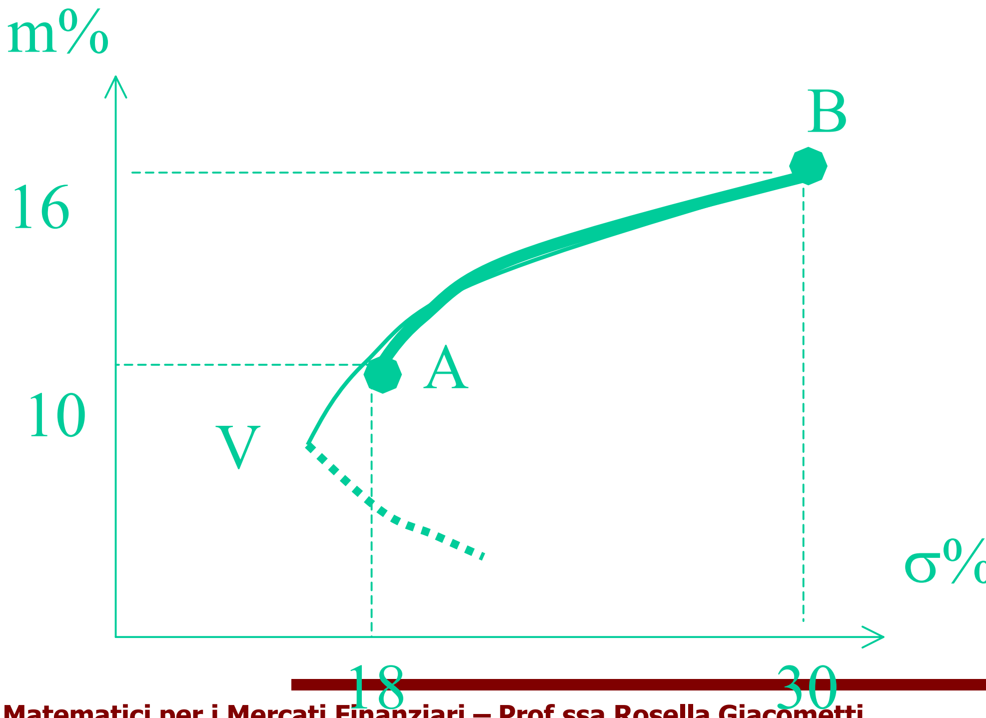
$$\frac{d\sigma^2}{dx} = 936x - 1.044$$

$$\frac{d\sigma^2}{dx} = 0 \qquad \text{per} \;\; x = 1,11$$

La Var è minima per valori non ammissibili!

Infatti graficamente si nota che i PRT efficienti sono sull'arco **AB**

Non c'è contrazione del rischio



Si può verificare che il portafoglio efficiente a varianza minima abbia varianza minore di min(σ_1,σ_2).

$\Downarrow$

si parla di effetto contrazione del rischio.

Quale relazione deve intercorrere tra i due titoli, perché si verifichi l'effetto contrazione?

portafoglio con due titoli rischiosi

- se $\rho=1$ non ho benefici della diversificazione, tanto vale investire nel titolo a rischio minore, se voglio minimizzare il rischio
- se $\rho<\rho^*$ inizio ad avere benefici nel diversificare,
- se $\rho=-1$ posso addirittura annullare il rischio

Rivediamo brevemente gli indicatori statistici per singoli titoli

- **indicatori di rendimento**
- **indicatori di rischio**
  - **varianza e deviazione standard**

Indicatori statistici per portafogli

- **rendimento e rischio**
- **correlazione e covarianza**

Come confrontare i titoli e i portafogli tra loro?

La frontiera efficiente

portafoglio con due titoli rischiosi

portafoglio composto da un risk free e un titolo rischioso

portafoglio a n titoli

Si consideriamo due titoli

1) investimento certo $(0,R_f)$
2) investimento aleatorio caratterizzato da
   $(\sigma_2, E(R_2))$

Ipotizziamo $E(R_2) > R_f$

Il portafoglio generale e' caratterizzato da

$E(R) \ = x\,E(R_f) + (1\text{-}x)\,E(R_2)$

$\sigma^2 = x^2 \sigma_1^{\,2} + (1\text{-}x)^2 \sigma_2^{\,2} + 2x(1\text{-}x)\,\sigma_1 \sigma_2 \rho$

Rischio nullo

Correlazione nulla

Per cui il tutto si semplifica in

(1) $$E(R) = R_f x + (1-x)E(R_2)$$

(2) $$\sigma^2 = (1-x)^2 \sigma_2^2$$

Dobbiamo esprimere il rendimento in funzione del rischio

Dalla (2) ricavo

$$(1-x)^2 = \frac{\sigma^2}{\sigma_2^2}$$

$$\Downarrow$$

Sostituisco nella (1)

$$E(R) = R_f x + (1-x)E(R_2)$$

$$\Downarrow$$

L'insieme dei portafogli ammissibili

$$E(R) = R_f + \frac{(E(R_2) - R_f)}{\sigma_2}\sigma$$

Investi 100 Euro in un portafoglio.

Il portafoglio comprende:

- 1) un asset rischioso con un rendimento atteso del 12% e deviazione standard del 15%
- 2) un investimento privo di rischio con rendimento 5%.

Quale percentuale del portafoglio dovrebbe essere investita in attività prive di rischio in modo che l'intero portafoglio abbia deviazione standard pari al 9%?

Le equazioni di rendimento e rischio sono

$$E(r) = 5\% x + (1 - x) 12\%_{0}$$

$$\sigma^2 = (1 - x)^2 15\%^2$$

Imponendo che la deviazione standard sia 9%

$$\sigma = (1 - x) 15\% = 9\%$$

$$x = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

Investi 100 Euro in un portafoglio.
Il portafoglio comprende:

- 1) un asset rischioso con un rendimento atteso del 12% e deviazione standard del 15%
- 2) un investimento privo di rischio con rendimento 5%.

Quale percentuale del portafoglio dovrebbe essere investita in attività prive di rischio in modo che l'intero portafoglio abbia deviazione standard pari al 9%?

La percentuale del portafoglio investita in attività prive di rischio è x=2/5 ossia il 40%

Hai 500 Euro da investire. Il tasso di rendimento privo di rischio è 8%, così come quello di finanziamento. Il rendimento di un titolo rischioso è il 16%. Se volessi ottenere un rendimento del 22%, quanto dovresti investire nell'attività priva di rischio?

Soluzione

L' equazioni del rendimento è

$$E(r) = 8\%x + (1 - x)16\%$$

Non ho informazioni sulla volatilità del titolo.

Imponendo che il rendimento atteso sia 22%

$$E(r) = 8\%x + (1 - x)16\%_0 = 22\%$$

$$x = -\frac{3}{4}$$

Hai 500 Euro da investire. Il tasso di rendimento privo di rischio è 8%, così come quello di finanziamento. Il rendimento di un titolo rischioso è il 16%. Se volessi ottenere un rendimento del 22%, quanto dovresti investire nell'attività priva di rischio?

La percentuale del portafoglio investita in attività prive di rischio è x=-3/4 ossia dovrei finanziarmi per 375 Euro.

Quale portafoglio scegliere?

Tutti i punti sulla frontiera efficiente sono “buone combinazioni di rischio/ rendimento, tuttavia

…..non e’ detto che due portafogli efficienti siano egualmente desiderabili.

la scelta tra i portafogli efficienti avviene in base alla propensione al rischio dell’investitore

Quale portafoglio scegliere?

•Ogni investitore e' caratterizzato da una funzione di utilità che ne coglie le caratteristiche di tolleranza al rischio.

•La funzione di utilità viene calcolata su una combinazione rischio rendimento e misura l'utilità che deriva dal possedere un portafoglio con questo profilo.

Proviamo a rispondere alla domanda

Hai vinto un premio, scegli tu quale

a) $2000 subito e certi

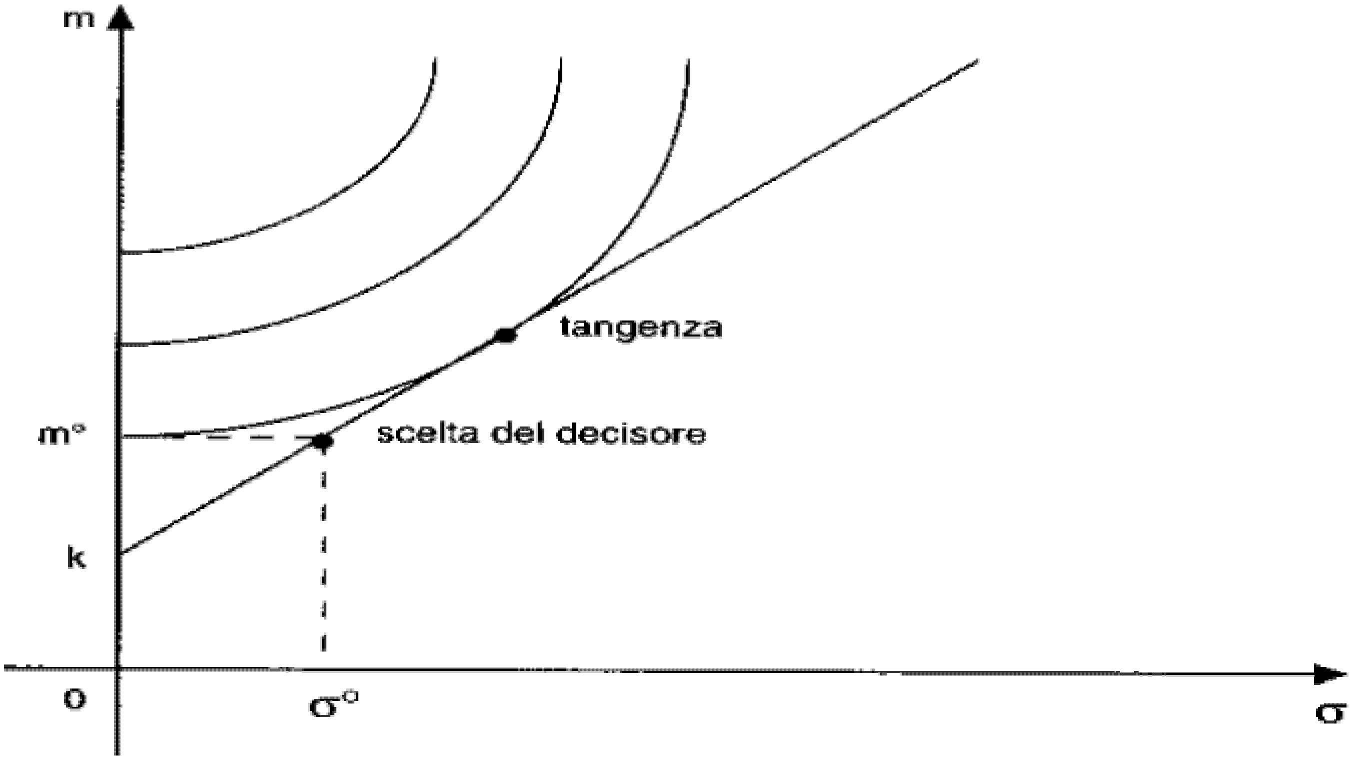
b) una possibilità del 50% di vincere $5000

Quale portafoglio scegliere?

•Esistono combinazioni di rischio e rendimento che forniscono la stessa utilità ossia i portafogli che danno la stessa utilità sono indifferenti --→ Curve di indifferenza

•Il portafoglio ottimo e' ottenuto dal punto di intersezione tra le curve di indifferenza che fornisce la più elevata utilità e la frontiera efficiente.

Quale portafoglio scegliere?



PRT efficienti e curve di utilità

Esistono tre tipologie di atteggiamenti nei confronti del rischio:

- Propensione al rischio
- Neutralità verso il rischio
- Avversione al rischio

La Portfolio Theory assume l'ipotesi che tutti gli individuai siano avversi al rischio. Questo corrisponde a una funzione non decrescente e concava.

Quale funzione è atta ad esprimere le preferenze individuali?

- lineare
- Quadratica
- Cubica
- Logaritmica, od altro?

PRT efficienti e curve di utilità

Si assume che le preferenze siano ben rappresentate da una funzione di utilità quadratica

Sia R una v.a. che rappresenta il “rendimento %” di un titolo o di un PRT: allora

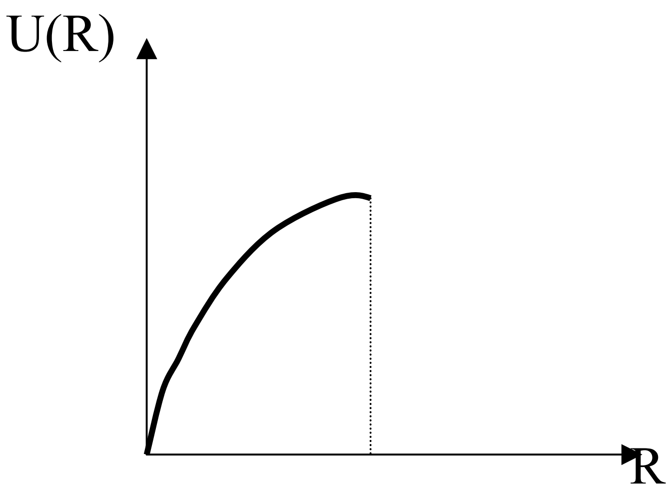
$U(R)=R-gR^2$, con g parametro positivo

- Funzione non decrescente e concava. Verifichiamolo:

- $U'(R)= 1-2gR\geq 0$, per $R\leq 1/(2g)$

-$U''(R)=-2g<0$, essendo $g>0$

Si tratta di una famiglia di parabole con vertice $R=1/(2g)$



Calcoliamo il valore atteso di U(R) (variabile aleatoria)

$-E[U(R)] = E(R-gR^2) = E(R) - gE(R^2)$ (*)

Per il momento del secondo ordine $E(R^2)$ ricordiamo che vale

$Var(R) = E(R^2) - [E(R)]^2$, quindi

$E(R^2) = Var(R) + [E(R)]^2 = \sigma^2 + m^2$ e sostituendo in (*)

$-E[U(R)] = m - g(\sigma^2 + m^2)$, dove g misura del grado di avversione al rischio. Indicato con μ una costante, si pone

$E[U(R)] = \mu$ luogo di utilità costante e si ottiene

PRT efficienti e curve di utilità

$m - g\,\sigma^2 - gm^2 = \mu$ e dividendo per (-g)

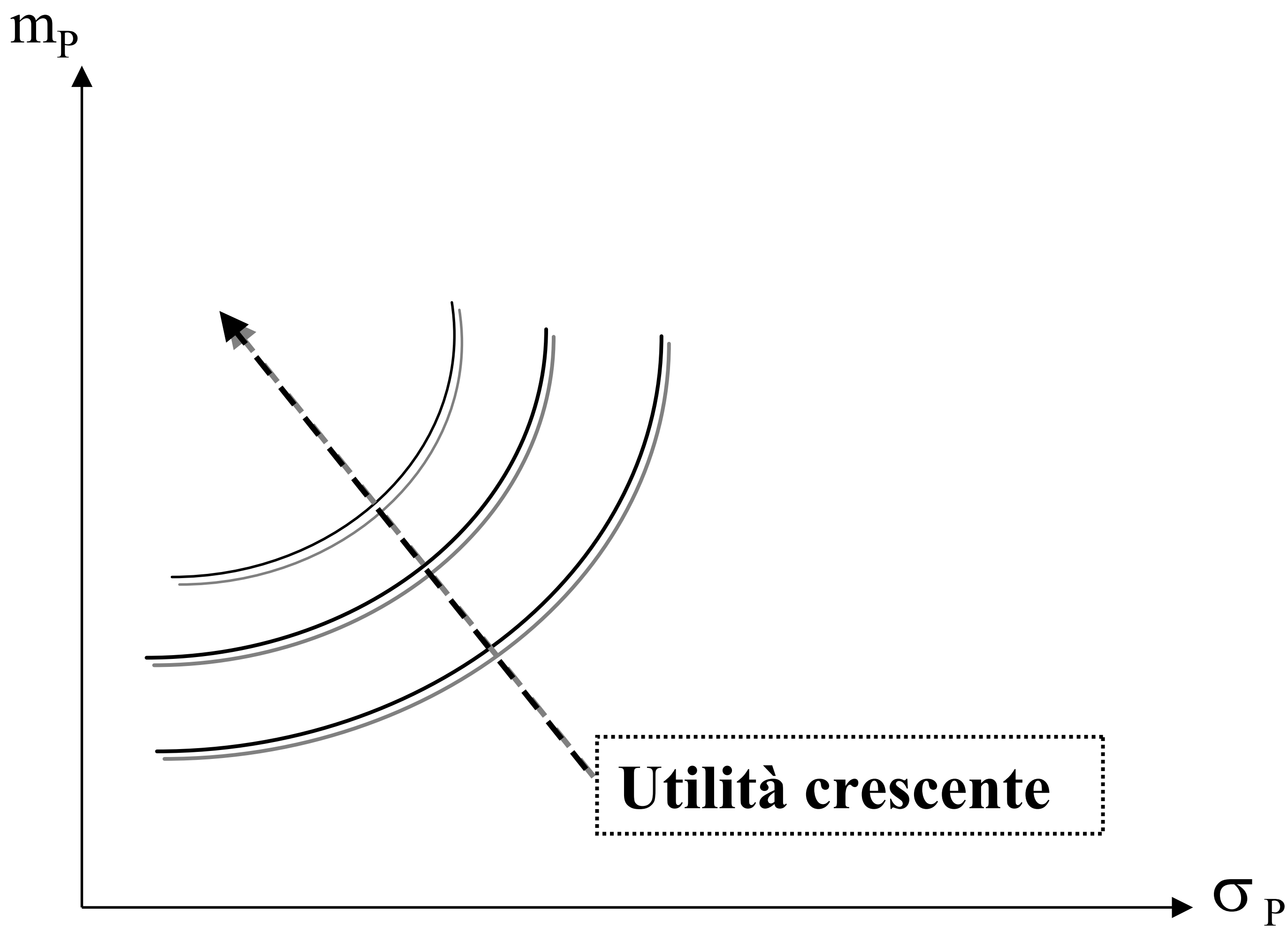
$$\sigma^2 + m^2 - \frac{1}{g}m + \frac{\mu}{g} = 0$$

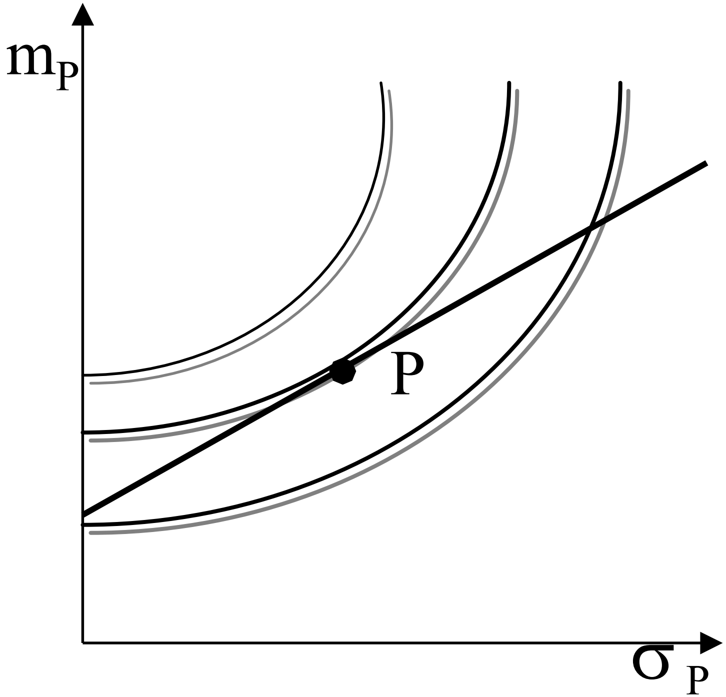
Equazione di un fascio di circonferenze concentriche

Con centro C(0 , 1/(2g)) e raggio $r = \sqrt{\frac{1}{4g^2} - \frac{c}{g}}$

Nel piano m- σ sono rappresentati da archi di circonferenza per m<1/(2g).: sono tratti di curve di isoutilità

PRT efficienti e curve di utilità





Il portafoglio ottimale sara' quello efficiente, cioè sulla F.E., che si trova sulla curva di indifferenza piu' elevata nel grafico **P**

Il PRT **P** è il punto di tangenza tra la famiglia di curve di isoutilità a l'equazione della F.E.

Data la frontiera efficiente

$m_P = 1+0,5\ \sigma_P$ con $18 \leq \sigma_P \leq 30$

ci proponiamo di trovare il PRT ottimo, avendo un grado di avversione al rischio pari a g=4.

Occorre risolvere

$\max(m - g\ \sigma^2 - gm^2)$ sapendo che

$m_P = 1+0,5\ \sigma_P$.

$18 \leq \sigma_P \leq 30$

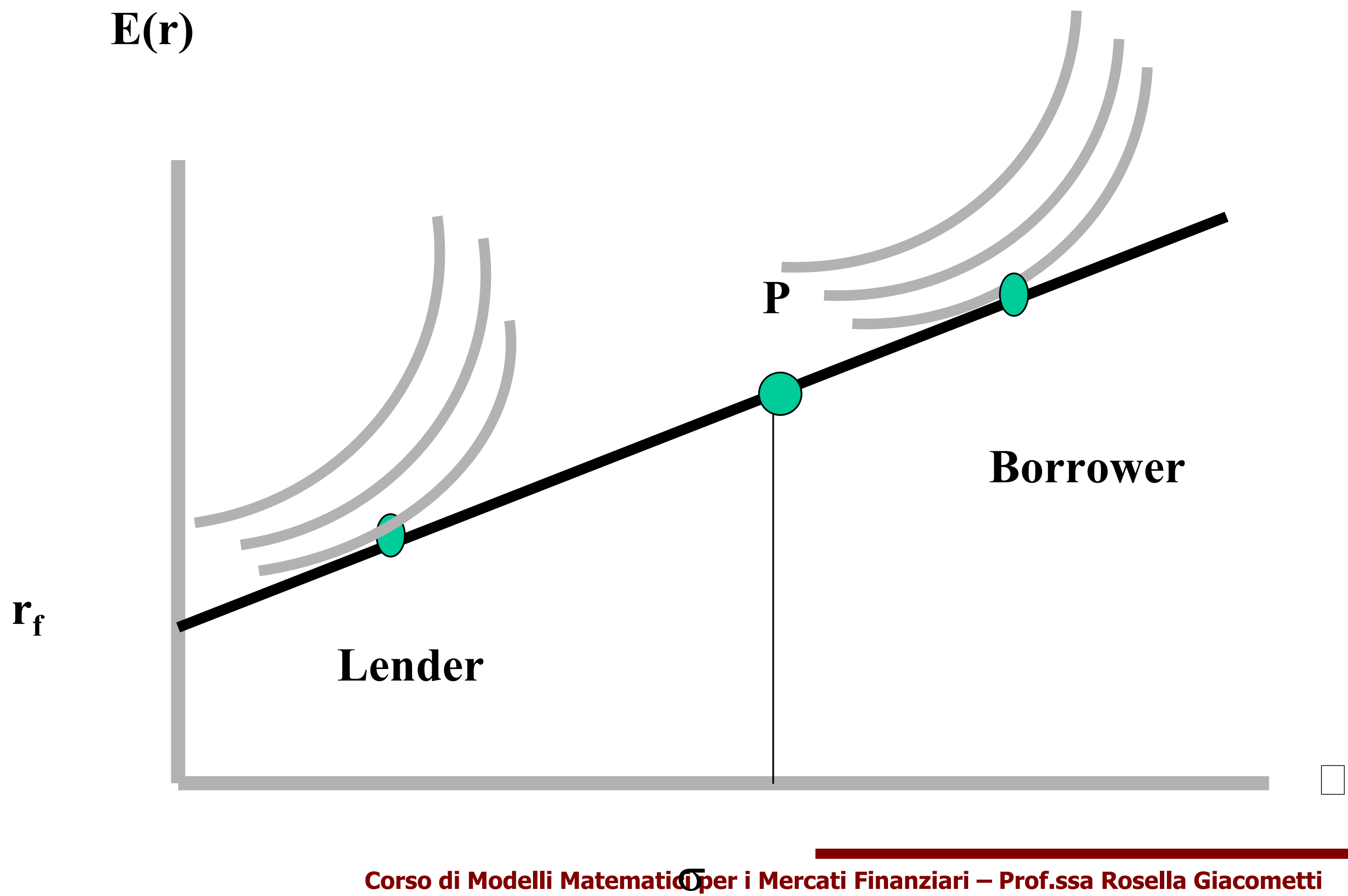
Si tratta di mettere a sistema le due funzioni e risalire all'unica soluzione.

Il testo indica come utilità quadratica:

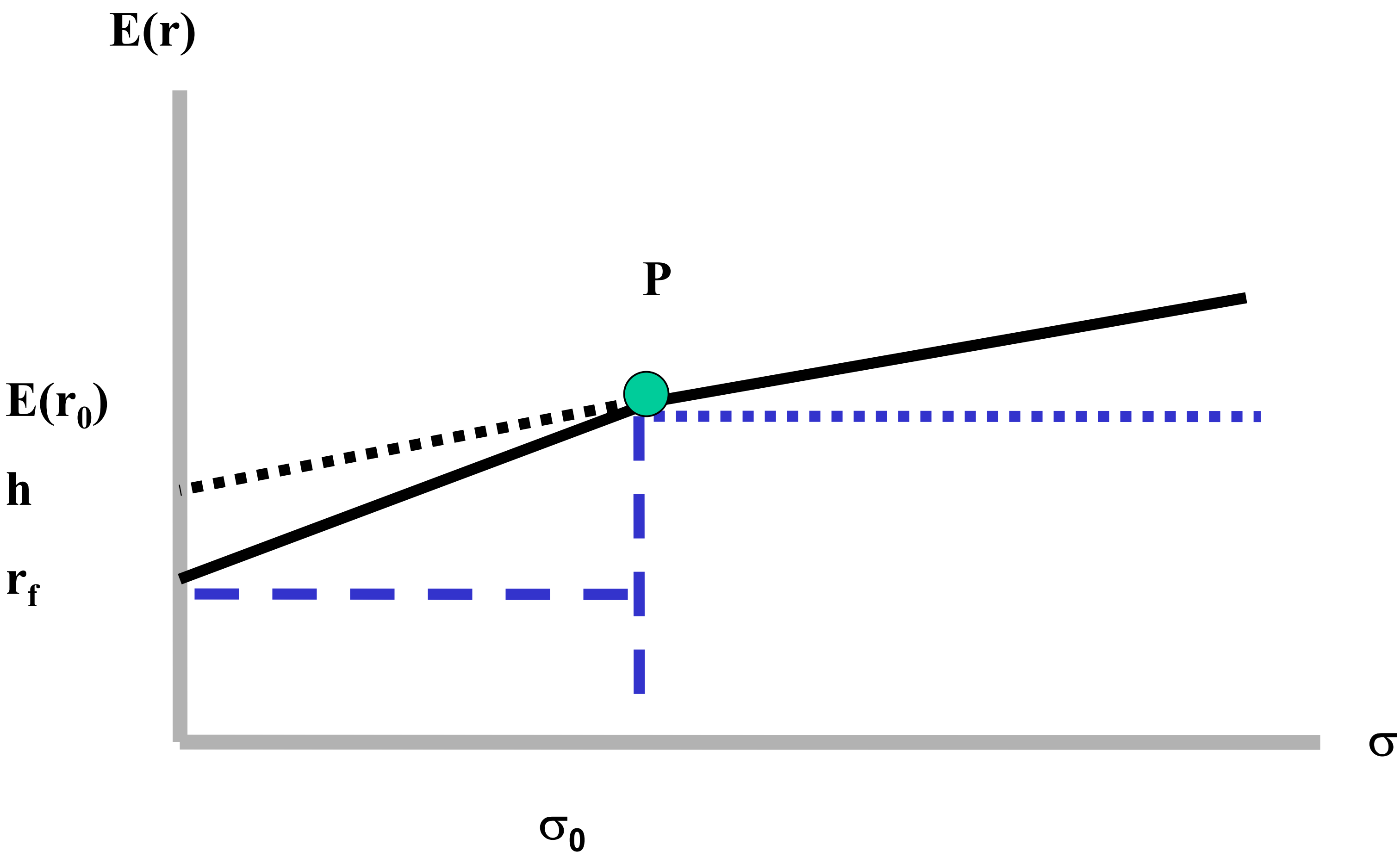
$$E[U(R)] = E(R) - 0.5 A \sigma^2$$

Un'elevata avversione/propensione al rischio porta ad un portafoglio con un'alta/bassa componente di attività priva di rischio

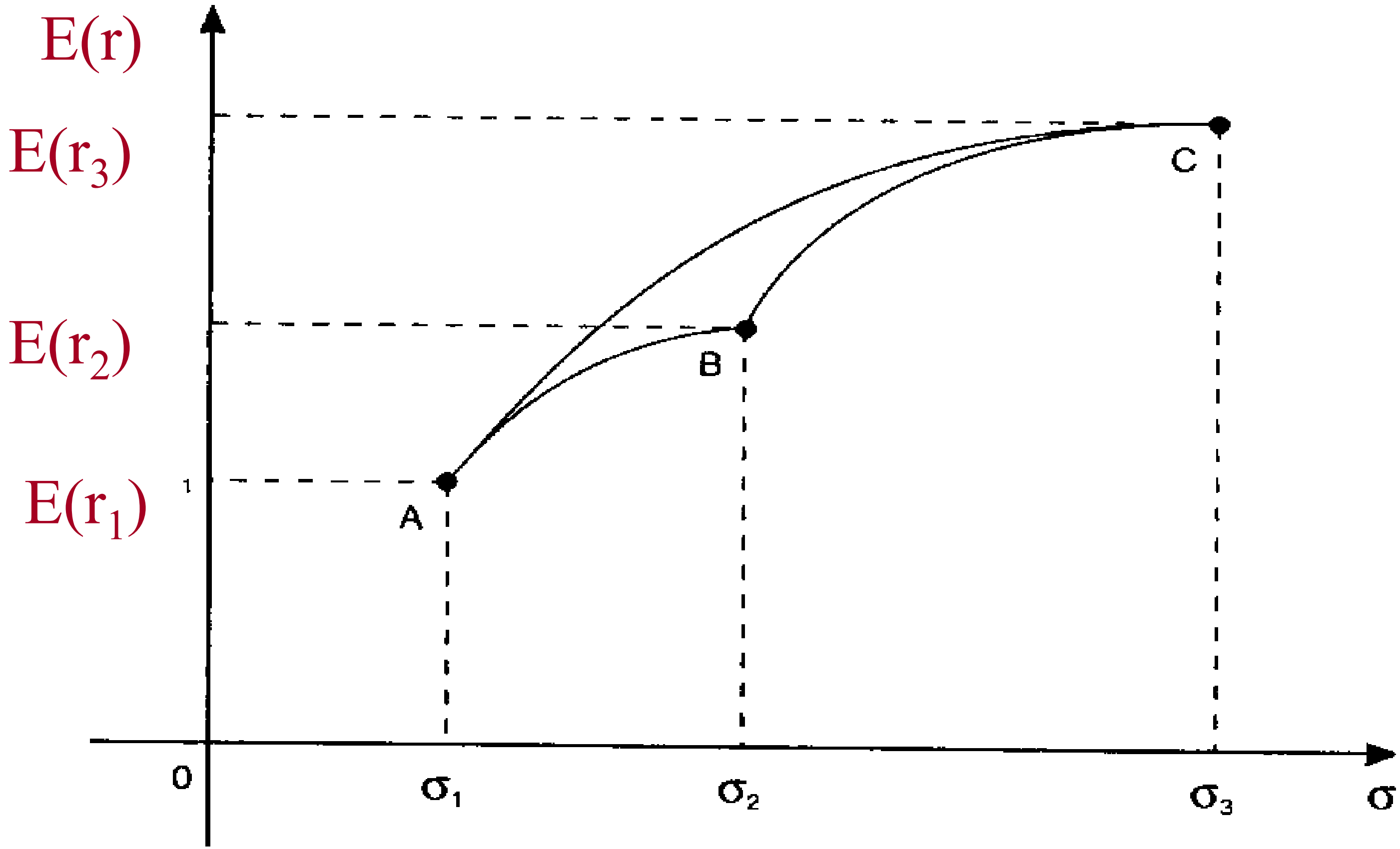
Un investitore può aumentare il grado di rischiosità del suo portafoglio tramite effetto leva o leverage


E(r)
P
Borrower
r_f
Lender
σ

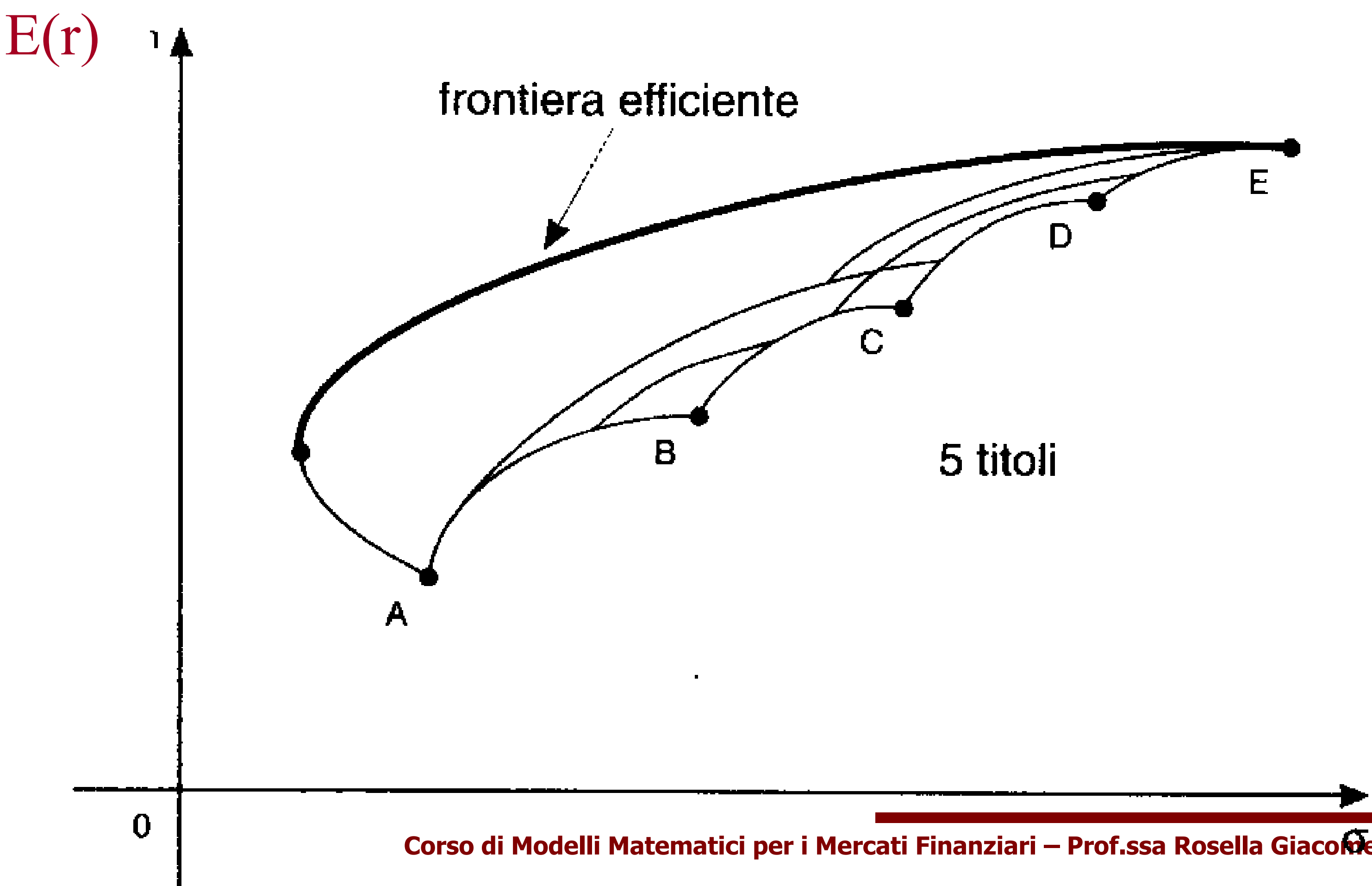
Portafogli efficienti in presenza di un tasso di indebitamento $h>r_f$



Frontiera efficiente con tre titoli rischiosi



Frontiera efficiente con più titoli rischiosi: esempio intuitivo



Fissato un livello di rendimento K, determino il portafoglio a varianza minima. Si tratta di minimizzare la varianza….

$$\underset{x_1,..x_n}{Min}\; \overbrace{x_1^2\sigma_1^2 + x_2^2\sigma_2^2 + \ldots x_n^2\sigma_n^2} + \overbrace{2x_1\sigma_1 x_2\sigma_2\rho_{12} + 2x_1\sigma_1 x_3\sigma_3\rho_{13+.....}}$$

$$\textit{nel}\ \text{rispetto dei vincoli}$$

$$\sum_i x_i E(r_i) = k$$

$$\sum_i x_i = 1$$

Posso pensare di far "girare" del software

Frontiera efficiente con più titoli rischiosi

Spesso si preferisce usare una notazione matriciale….

$$Min\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Con vincoli

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E(r_1) \\ E(r_2) \end{bmatrix} = \mu$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1$$

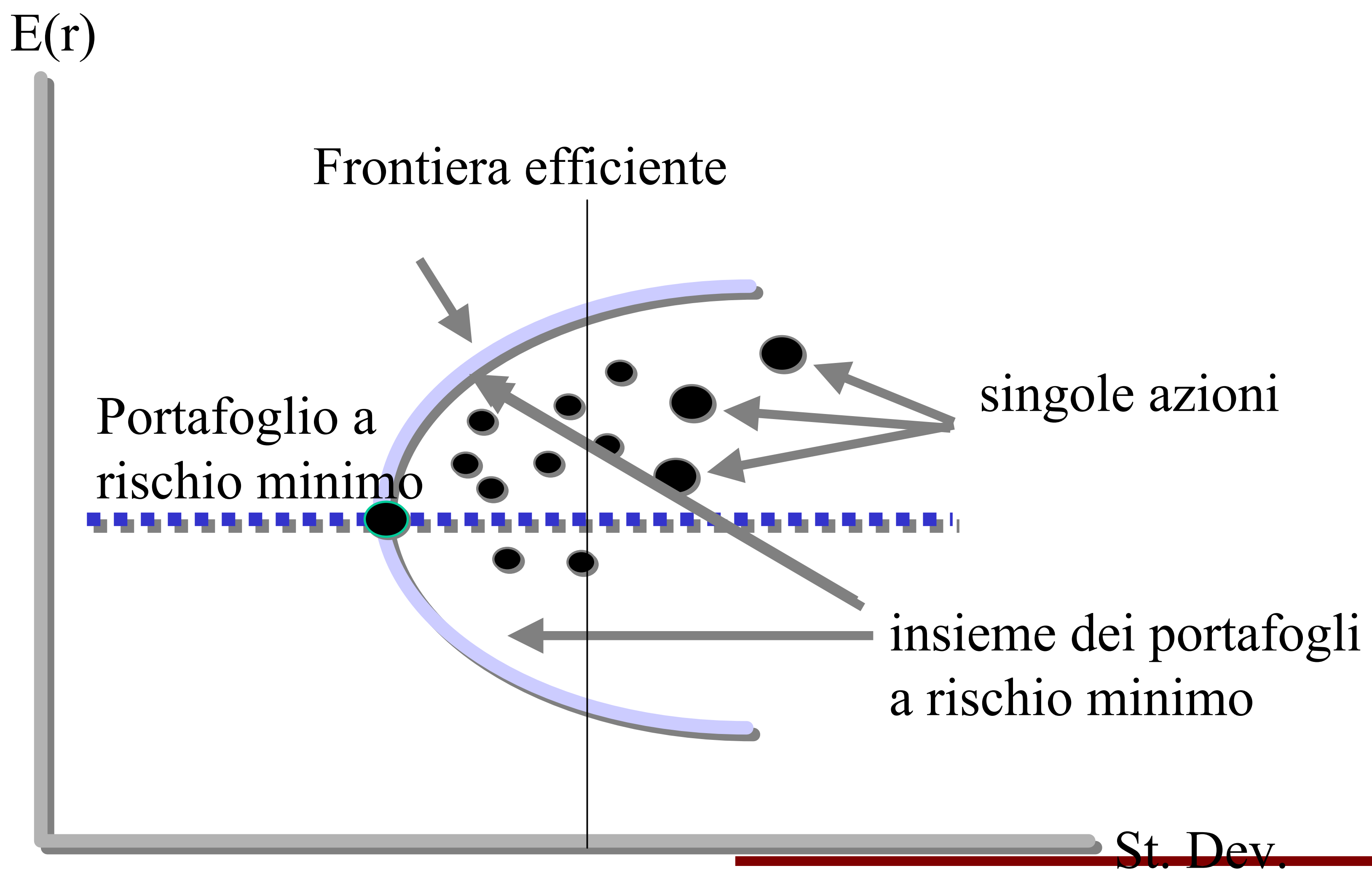
Spesso si preferisce usare una notazione matriciale ancora piu' compatta

$$Min \ \underline{x}' V \underline{x}$$

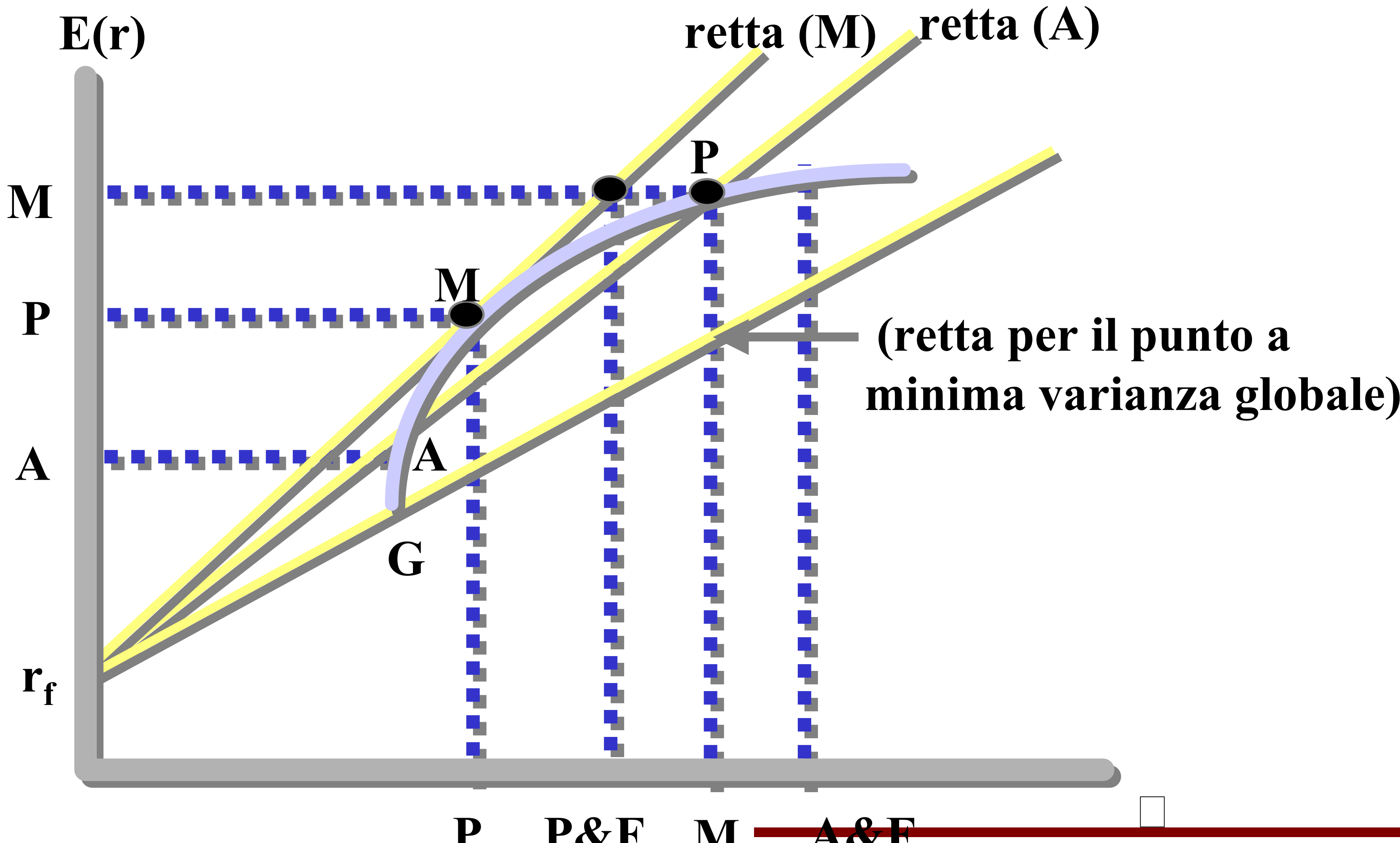
Con vincoli

$$\underline{x}' \underline{E(r)} = \mu$$

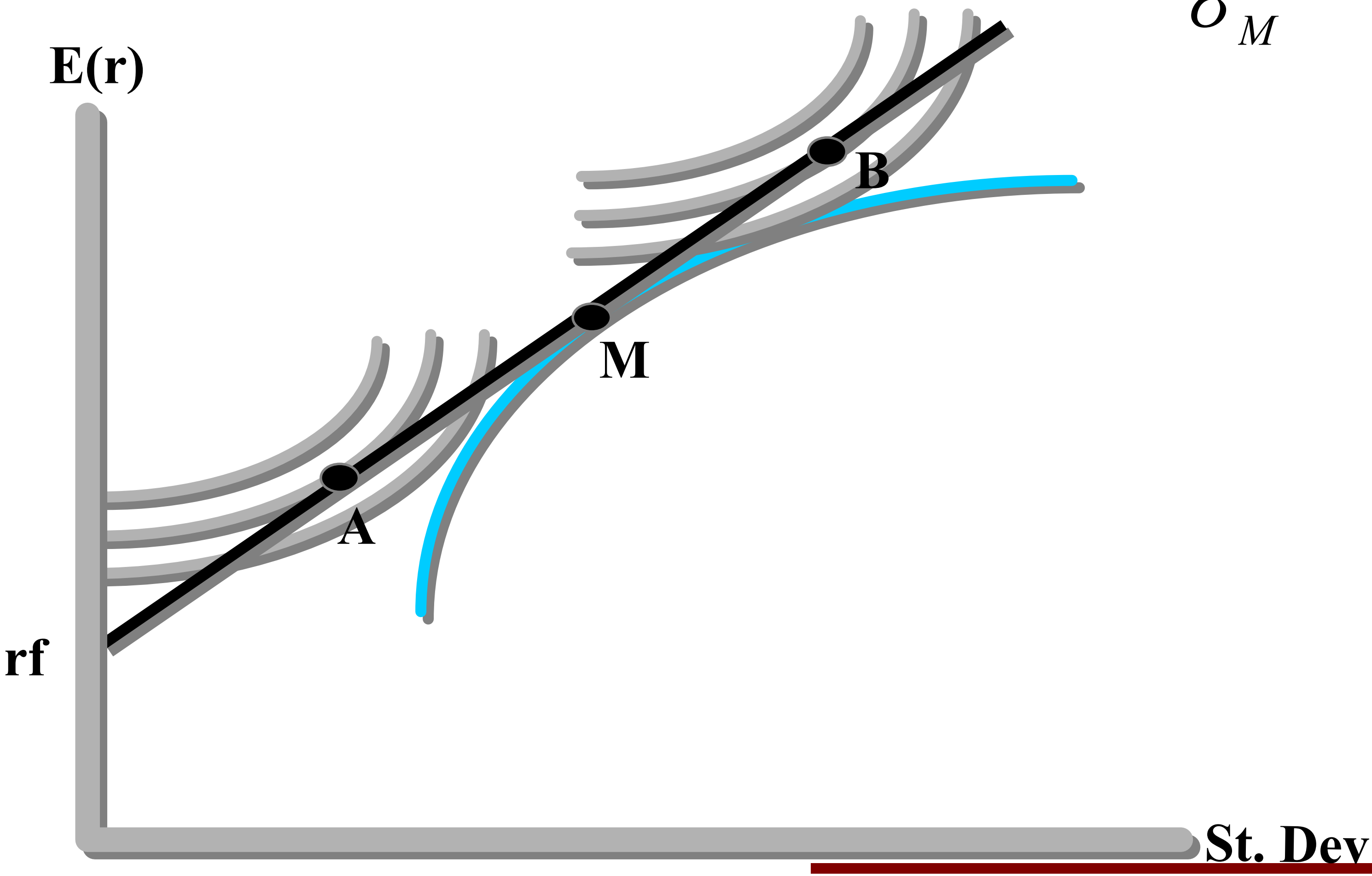
$$\underline{x}' \underline{1} = 1$$


E(r)
Frontiera efficiente
singole azioni
Portafoglio a
rischio minimo
insieme dei portafogli
a rischio minimo
St. Dev.

Includiamo anche il titolo privo di rischio



$$E(r) = r_f + \frac{(E(r_M) - r_f)}{\sigma_M}\sigma$$



Indice

- Misure di rischio e rendimento
- La diversificazione dei rischi
- I modelli di portafoglio in media e varianza.
- La frontiera efficiente nello spazio rischio/rendimento

- Procedimenti per stimare i parametri del modello in media e varianza.

- Il Capital Asset Pricing Model
- L'Arbitrage Pricing Theory.

Il modello media varianza e’ costruito su forti ipotesi spesso contraddette nella realtà: le principali obiezioni/ dubbi sono:

- La frontiera efficiente cambia al cambiare della lunghezza dell’orizzonte dell’analisi?
- Cosa cambia se gli investitori hanno un orizzonte multiperiodale?
- I rendimenti sono distribuiti normalmente?
- La varianza è una misura di rischio appropriata?
- L’utilizzo di previsioni basate sulla media dei rendimenti passati e sulla volatilità storica è ottimale?

Cerchiamo di capire i diversi gradi di influenza di queste obiezioni e come intervenire per migliorare il modello

Commentiamo una per una queste obiezioni

La frontiera efficiente cambia al cambiare della lunghezza dell'orizzonte dell'analisi?

- *Se la varianza e' costante nel tempo , i rendimenti non sono correlati e sono normali allora la scelta di portafoglio e' indipendente dall'orizzonte*

Gli investitori hanno un orizzonte multiperiodale. Cosa cambia?

- *Se il livello di ricchezza posseduto non modifica l'avversione al rischio*
- *Se i rendimenti non sono correlati*
- *Se non ci sono cash–flow intermedi*
- *Se non ci sono costi di transazione*

Allora possiamo ottenere una soluzione multiperiodale ripetendo l'analisi uniperiodale piu' volte

Passiamo ora ad altre obiezioni

- I rendimenti non sono necessariamente distribuiti normalmente.
  - *questa approssimazione può essere accettabile.*
- La varianza può non essere una misura di rischio appropriata
  - *In effetti dipende dal tipo di strumenti nel portafoglio e dal grado di simmetria delle distribuzioni. Potremmo pensare di utilizzare altre misure di rischio*

Il modello media-varianza in pratica

Il modello media varianza e' costruito su un insieme di dati di input.

Le stime dei dati di input sono affette da errori di stima (si parla di estimation error)

- *Perche'?*
- Sono calcolate su una serie storica limitata di dati, che costituiscono una realizzazione di un processo.
  - Considero serie più lunghe…………….stazionarietà dei dati
  - Aumento la frequenza…………………presenza di autocorrelazione
- *Effetti sulle allocazioni ottimali*
  - Scarsa diversificazione
  - Instabilità (sensibile a piccole variazioni degli input specie per altri livelli di propensione al rischio)
  - Ambiguità (presenza di portafogli statisticamente equivalenti)
  - Deludente performance out of sample

L'estimation error non ha lo stesso peso su tutti gli input ed è molto piu critico nella stima dei valori attesi

Gli approcci che vedremo sono rivolti a proporre rimedi all' estimation error di questi ultimi

Approcci

1) Imporre vincoli sui pesi per forzare la diversificazione, specie con vincoli che impongono di investire almeno una percentuale nei singoli assets
2) Strategia di resampling

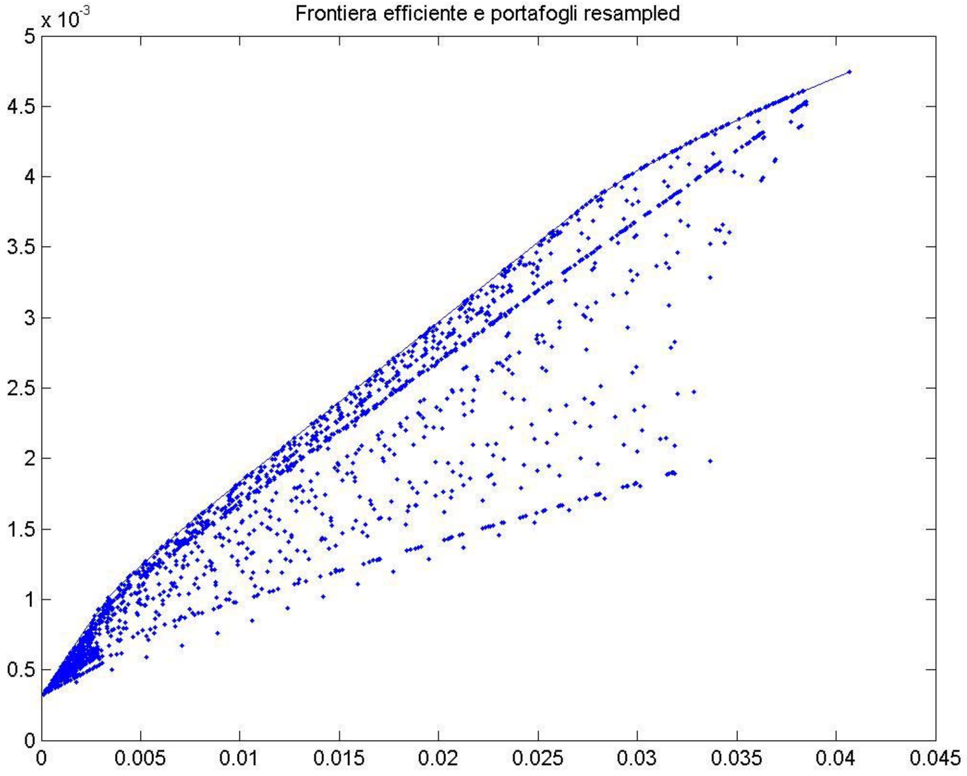
Si tratta di una tecnica di simulazione montecarlo

1) costruiamo la frontiera efficiente a partire dai dati storici
2) selezioniamo m portafogli equi distanziati
3) generiamo t dati da una normale con media e varianza stimate al passo 1
4) Ricalcoliamo media e varianza e calcoliamo una nuova frontiera efficiente (statisticamente equivalente) prendendo m portafogli equi distanziati
5) La frontiera Resampled e’ ottenuta prendendo la media dei pesi dei portafogli che occupano la stessa posizione d’ordine
6) Valutiamo nuovi portafogli rispetto ai rendimenti attesi e alla matrice var-Cov di partenza

Michaud ha brevettato in U.S.A. nel 1999 la tecnica di "Resampling".

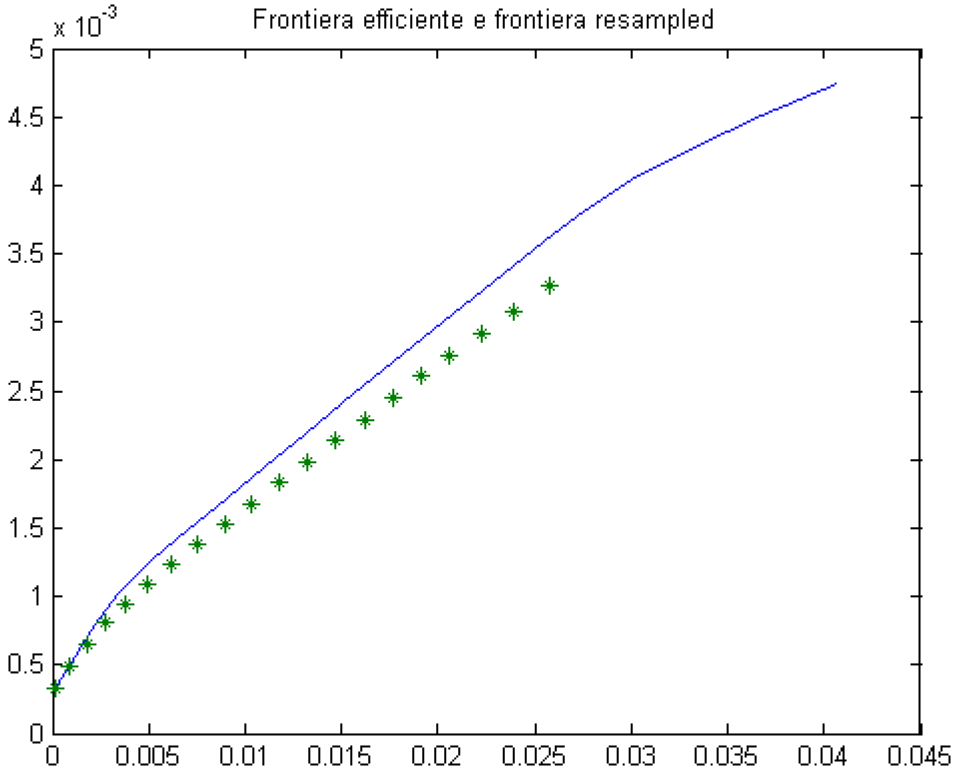
L'idea di base e' che gli input del modello Media Varianza sono stime di valori futuri e quindi hanno un grado di incertezza.

Il resampling cerca di ovviare alla presenza dell'incertezza simulando i diversi comportamenti di mercato delle attività finanziarie, in base alle stime fatte, e cerca i portafogli che in media, sono ottimali rispetto alle diverse simulazioni del mercato



Ecco un esempio

Tutti i portafogli efficienti giacciono al di sotto della frontiera efficiente di partenza



Osserviamo che

1)la frontiera resampled è più corta, infatti nelle varie simulazioni non e' sempre lo stesso asset ad avere il rendimento atteso più elevato

2) e' maggiormente diversificata e quindi più stabile

Approccio Standard per la Stima della Volatilità

L'utilizzo di previsioni basate sulla media dei rendimenti passati e sulla volatilità storica non necessariamente è ottimale

In genere

(Sia m il numero di dati)

r_i viene approssimato da $(P_i - P_{i-1})/ P_{i-1}$

si assume che il valore medio di r_i sia nullo

si sostituisce $m - 1$ con m

In tal caso, una stima della varianza è

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} r_{n-i}^2$$

Ad ogni osservazione è attribuito un peso 1/m

Ponderazione

Invece di assegnare uguale peso a tutte le osservazioni, possiamo definire il tasso di varianza nel modo seguente

$$\sigma_n^2 = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i r_{n-i}^2$$

dove

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$$

Modello EWMA

Nel modello a media mobile con pesi esponenziali (*Exponentially Weighted Moving Average* – EWMA), i pesi assegnati alle volatilità si riducono esponenzialmente via via che procediamo all'indietro nel tempo.

La previsione della volatilità in n è dato dal contributo al tempo n-1 corretto dall'errore commesso nella previsione precedente, con $0 \leq \lambda \leq 1$

$$\sigma_n^2 = r_{n-1}^2 + \lambda(\sigma_{n-1}^2 - r_{n-1}^2)$$

Possiamo riscrivere

$$\sigma_n^2 = \lambda\sigma_{n-1}^2 + (1-\lambda)r_{n-1}^2$$

e sostituendo a ritroso

$$\boxed{\sigma_{n-1}^2 = \lambda\sigma_{n-2}^2 + (1-\lambda)r_{n-2}^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\sigma_n^2 = \lambda[\lambda\sigma_{n-2}^2 + (1-\lambda)r_{n-2}^2] + (1-\lambda)r_{n-1}^2$$

$$\sigma_n^2 = \lambda^2\sigma_{n-2}^2 + \lambda(1-\lambda)r_{n-2}^2 + (1-\lambda)r_{n-1}^2 =$$

$$= \lambda^3\sigma_{n-3}^2 + \lambda^2(1-\lambda)r_{n-3}^2 + \lambda(1-\lambda)r_{n-2}^2 + (1-\lambda)r_{n-1}^2$$

e sostituendo a ritroso avendo n dati a disposizione

$$\sigma_n^2 = \lambda^n \sigma_0^2 + \lambda^{n-1}(1-\lambda) r_1^2 + \ldots + \lambda^{n-i}(1-\lambda) r_i^2 \ldots. + (1-\lambda) r_{n-1}^2$$

Tutti i dati sono presenti nel calcolo della volatilità ma i dati piu' lontano hanno peso minore

È necessario memorizzare un numero relativamente poco elevato di dati

Dobbiamo ricordarci solo la stima corrente del tasso di varianza e l'osservazione più recente della variabile di mercato

RiskMetrics utilizza λ = 0,94 per prevedere la volatilità giornaliera

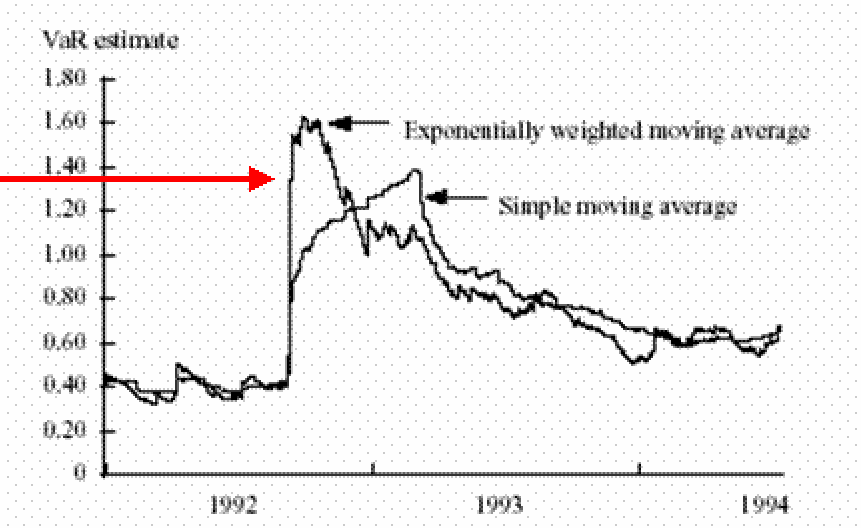
primo foglio.xls

- RiskMetrics usa l' exponentially weighted moving average model (EWMA).
-
- A seguito di uno shock (un rendimento grande in valore assoluto), la volatilità reagisce velocemente allo shock, in base al peso dato all'informazione piu' recente. Inoltre il peso di ogni dato relativo alla volatilità decresce esponenzialmente nel tempo, rimanendo come patrimonio storico.

- L'uso di medie mobili semplici (SMA) ha invece un comportamento anomalo in quanto non appena lo shock esce dal campione usato nella media mobile, la volatilità si appiattisce.

Previsione della volatilità

EWMA volatility forecasts react faster to shocks in the market as recent data carry more weight than data in the distant past.



Proseguendo...........

Abbiamo visto la Teoria del portafoglio e il modello di Markowitz per il singolo investitore

Introduciamo ora :

Il Capital Asset Pricing Model (CAPM)

Il modello ad un fattore di Sharpe

Il modello a piu' fattori di Ross

Dal modello di Markowitz al Capital Asset Pricing Model

Questa caratterizzazione della “frontiera efficiente” ricomparirà più tardi nel CAPM, un modello di equilibrio alla base della moderna teoria finanziaria

I fondatori di tale teoria saranno Sharpe, Lintner e Mossin (che lavoreranno indipendentemente!)

Noi seguiremo l’approccio di Sharpe

In pratica, il CAPM dice che:

Tutti gli investitori hanno la stessa frontiera efficiente:

$$E(r_i) = r_f + \frac{E(r_m) - r_f}{\sigma_m} \sigma_i$$

Tale linea prende il nome di capital market line (CML) e rappresenta l'insieme dei portafogli in grado di offrire il piu' alto rendimento atteso per ogni unità di rischio.

Vale SOLO per portafogli efficienti.

In pratica, quindi, succede che:

Tutti gli investitori detengono un portafoglio che è combinazione lineare di un solo titolo rischioso (il “portafoglio di tangenza”) e l'attività priva di rischio

Poiché tutti gli investitori detengono lo stesso portafoglio rischioso… il portafoglio di tangenza coincide con il portafoglio di mercato, cioè un portafoglio che contiene tutte le azioni esistenti, in proporzioni pari al loro valore di mercato

Ovviamente, ciò succede perché

Le informazioni sono gratuite e disponibili a tutti gli investitori

Tutti gli investitori

-hanno aspettative omogenee sull'andamento futuro dei titoli

-sono razionali e ottimizzano la propria combinazione di media e varianza

-hanno lo stesso orizzonte operativo

-possono possono investire e prendere a prestito senza limiti al tasso risk-free

Non esistono tasse, costi di transazione o altre imperfezioni del mercato

Prezzo di mercato per il rischio

In questo contesto, la pendenza e' il tasso al quale in equilibro, viene scambiato rischio e rendimento

$$\frac{E(r_m) - r_f}{\sigma_m}$$

può essere visto come l'extra-rendimento che è necessario offrire su un portafoglio con volatilità unitaria, cioè come il prezzo di mercato di una unità di rischio

La CML e' valida solo per i portafogli efficienti e perfettamente diversificati ma non vale per tutti i portafogli ammissibili e/o i singoli titoli.

Per tutti portafogli (efficienti e non) vale una relazione diversa, nota come Security Market Line (SML), in cui compare il coeff. di correlazione tra il singolo titolo e il mercato, atto ad isolare il rischio sistematico.

$$E(r_i) = r_f + \left(E(r_m) - r_f\right)\frac{\sigma_i}{\sigma_m}\rho_{im}$$

β_i misura il solo rischio sistematico

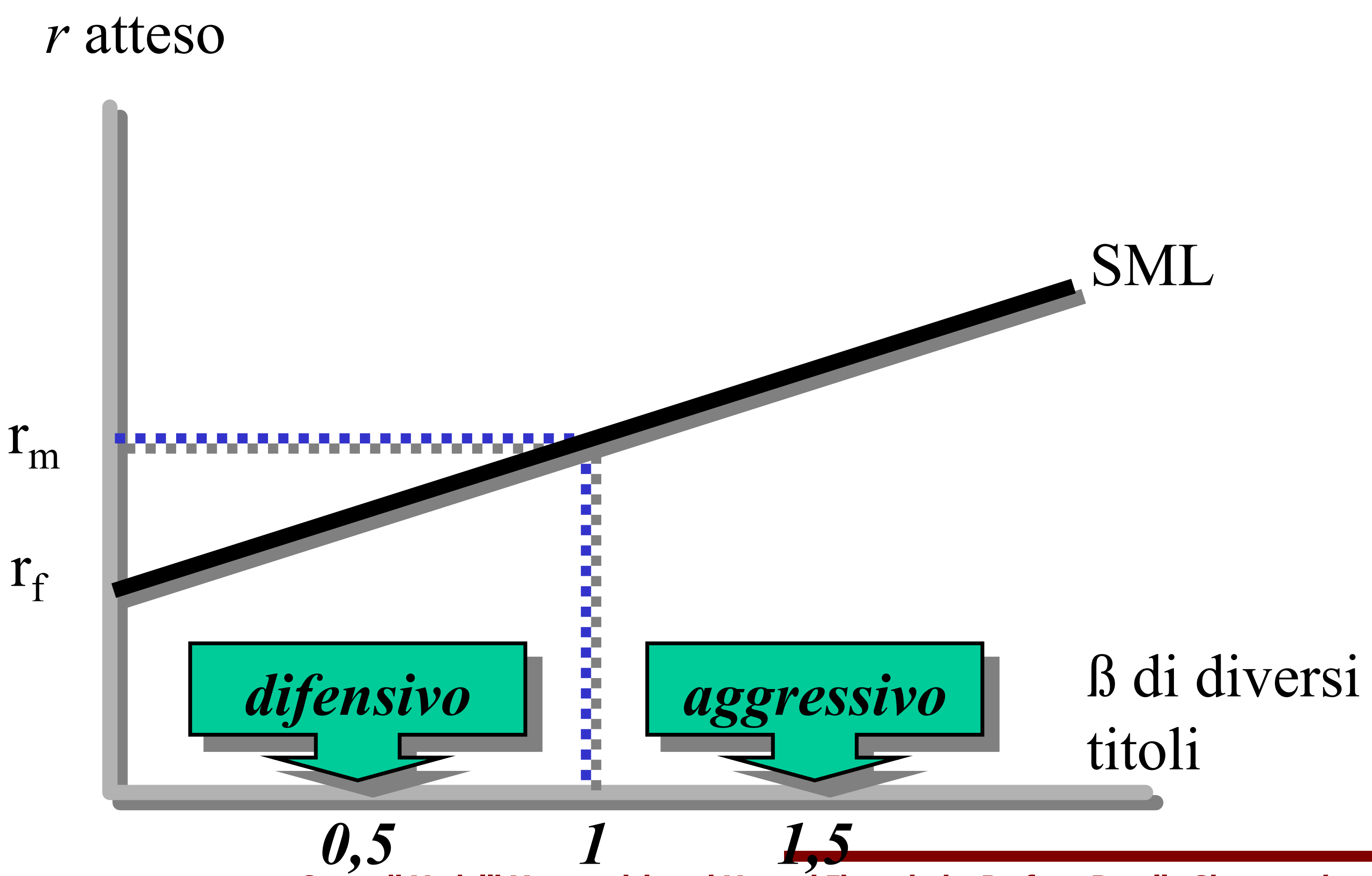
La Security Market Line

Il rendimento atteso di ogni titolo si ottiene considerando come misura di rischio il beta e non la volatilità, perche' la componente specifica e' eliminabile tramite diversificazioe a costo zero

:

$$E(r_i) = r_f + (\underbrace{E(r_m) - r_f}_{\textit{fisso}})\beta_i$$

La Security Market Line



Il β come indicatore del "carattere" di un titolo

Il β di un titolo misura il contributo del rischio di mercato al rischio totale del titolo. In particolare, se:

- $\beta>1$ titolo aggressivo
- $\beta=1$ il titolo segue il mercato
- $0<\beta<1$ titolo difensivo o conservativo
- $\beta=0$ titolo privo di rischio di mercato
- $\beta<0$ titolo superdifensivo

Qualche parola in più sul Beta…

Il beta misura la "sensitività" dei singoli titoli azionari al rischio generale di mercato (un po' come fa la duration per le obbligazioni….).

$$\beta_i = \frac{Cov(r_i, r_m)}{Var(r_m)} = \rho \frac{\sigma_i}{\sigma_m}$$

Facilmente stimabile su dati storici se si usa una proxy per il portafoglio di mercato

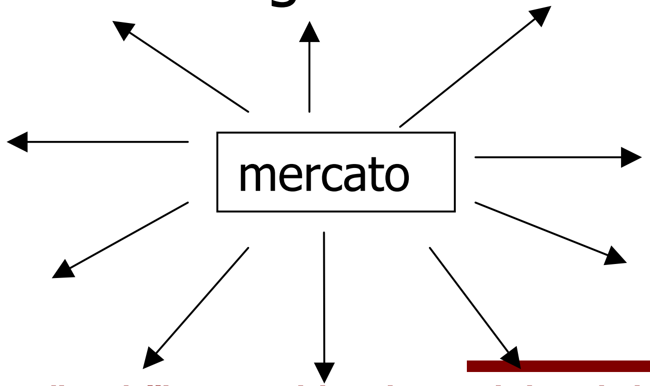
primo foglio.xls

il modello ad un fattore di Sharpe: the single index model

Sharpe nel 1963 fa alcune ipotesi:

- I rendimenti di tutti i titoli sono legati fra di loro esclusivamente dalla dipendenza da un unico fattore ("fattore di mercato").

- Tale dipendenza è lineare (una retta)
- Vediamo cosa ciò significhi in concreto…



Perché il modello di Markowitz è "ingordo di dati":

Il modello di Markowitz per un portafoglio di n titoli richiede

- n stime delle medie
- n stime delle varianze
- $n(n-1)/2$ stime delle covarianze

Esempio

Se $n = 50$, richiede un totale di 1325 stime

Se $n=100$, richiede un totale di 5150 stime!!!

Vantaggi del modello ad un fattore di Sharpe

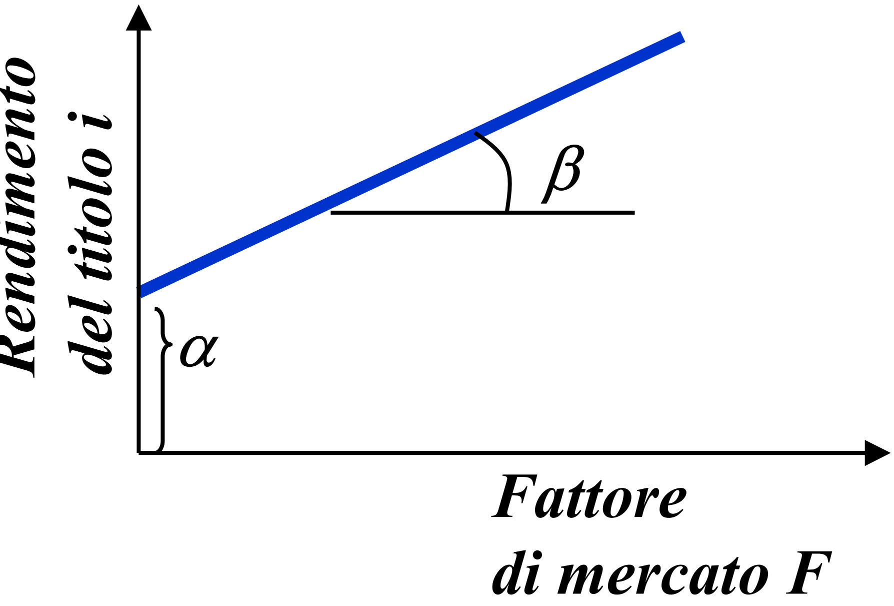
Sharpe introduce concetti "rivoluzionari" quali

- *fattore di rischio unico*
- *sensitività al fattore di rischio*
- *rischio individuale e sistematico*

Il modello a un fattore rende possibile stimare il Capital Asset Pricing Model in modo relativamente più semplice

Il modello a un fattore di Sharpe/2

$$\mathbf{r_i = \alpha_i + \beta_i F + u_i}$$



β_i = sensitività del titolo alle variazioni del fattore.

F = fattore di mercato, ad es. il rendimento di un indice come il MIB o lo S&P500

α_i = rendimento del titolo quando il fattore di mercato vale zero

u_i = componente di rischio individuale (non sistematica)

$$\underbrace{r_i - r_f}_{R_i} = \alpha_i + \beta_i \underbrace{(r_m - r_f)}_{R_m} + u_i$$

In una forma più realistica si lavora con i **differenziali** tra il rendimento del titolo e l'attività priva di rischio.

Avremo allora:

α_i **=** rendimento che dovrebbe essere 0

$\beta_i(r_m - r_f)$ **=** componente di rendimento dovuta a movimenti del fattore di mercato (F diventa r_m)

u_i **=** rendimento specifico, non dovuto ai movimenti del mercato

il "rischio individuale" u_i

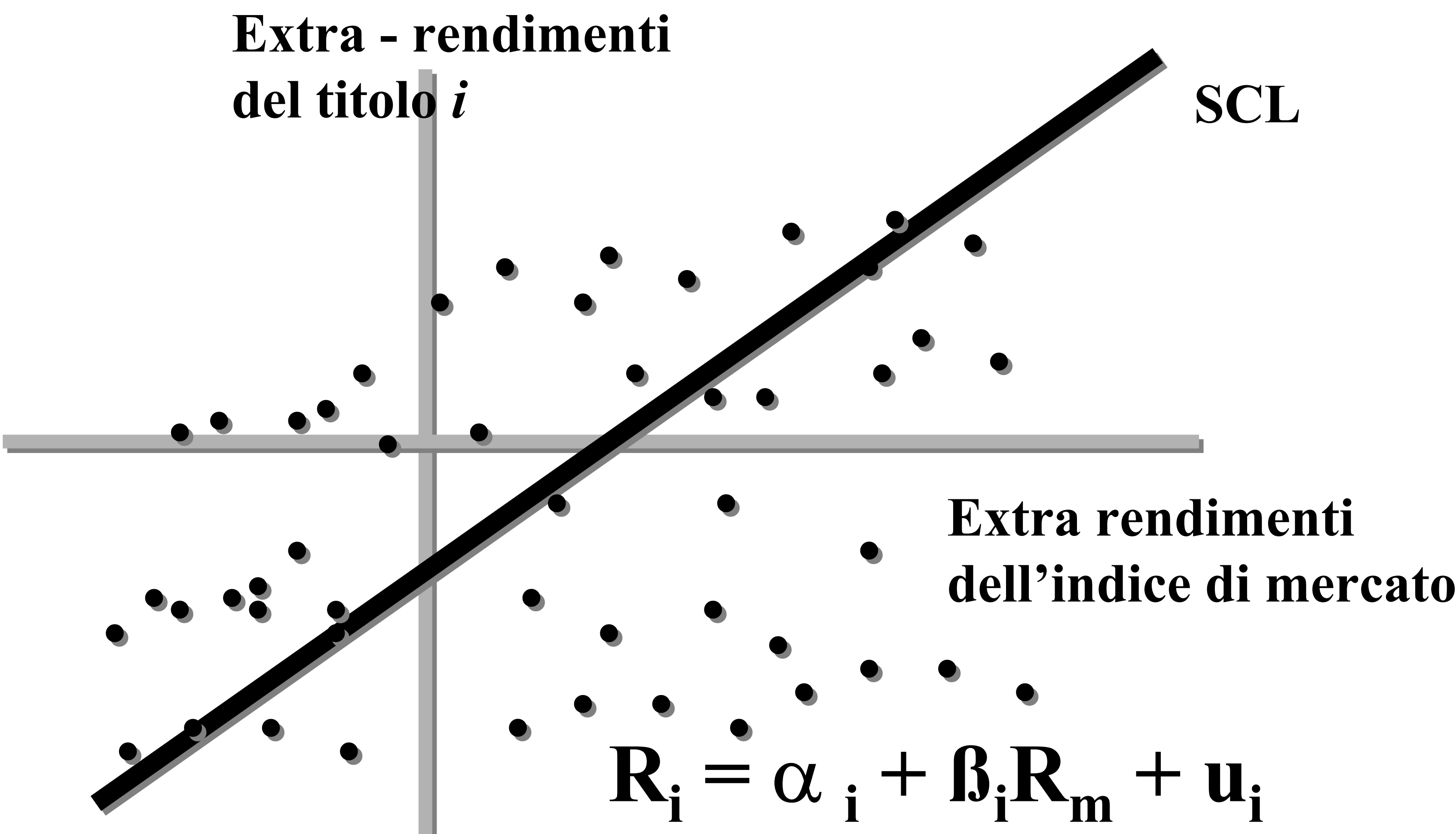
$$\underbrace{r_i - r_f}_{R_i} = \alpha_i + \beta_i(\underbrace{r_m - r_f}_{R_m}) + u_i$$

1) E' un fattore di rischio, di sorpresa. A priori, vale zero ($E(u_i)=0$)

2) Poiché è individuale, non risente dell'andamento del mercato ($COV(r_m, u_i)=0$

3) Per lo stesso motivo, non risente dell'andamento degli altri titoli ($COV(u_s, u_i)=0$)

Security Characteristic Line



$$R_i = \alpha_i + \beta_i R_m + u_i$$

Il modello di Sharpe in azione/2: il titolo GM*

	ER del mercato	ER del titolo
Gennaio	7.24	5.41
Febbraio	0.93	-3.44
Marzo	-0.38	-8.79
Aprile	-1.01	-8.08
Maggio	4.92	7.1
Giugno	1.18	-0.03
Luglio	-0.83	-2.36
Agosto	-0.91	-3.55
Settembre	-4.18	-1.16
Ottobre	3.97	-1.02
Novembre	6.25	6.32
Dicembre	3.9	2.43

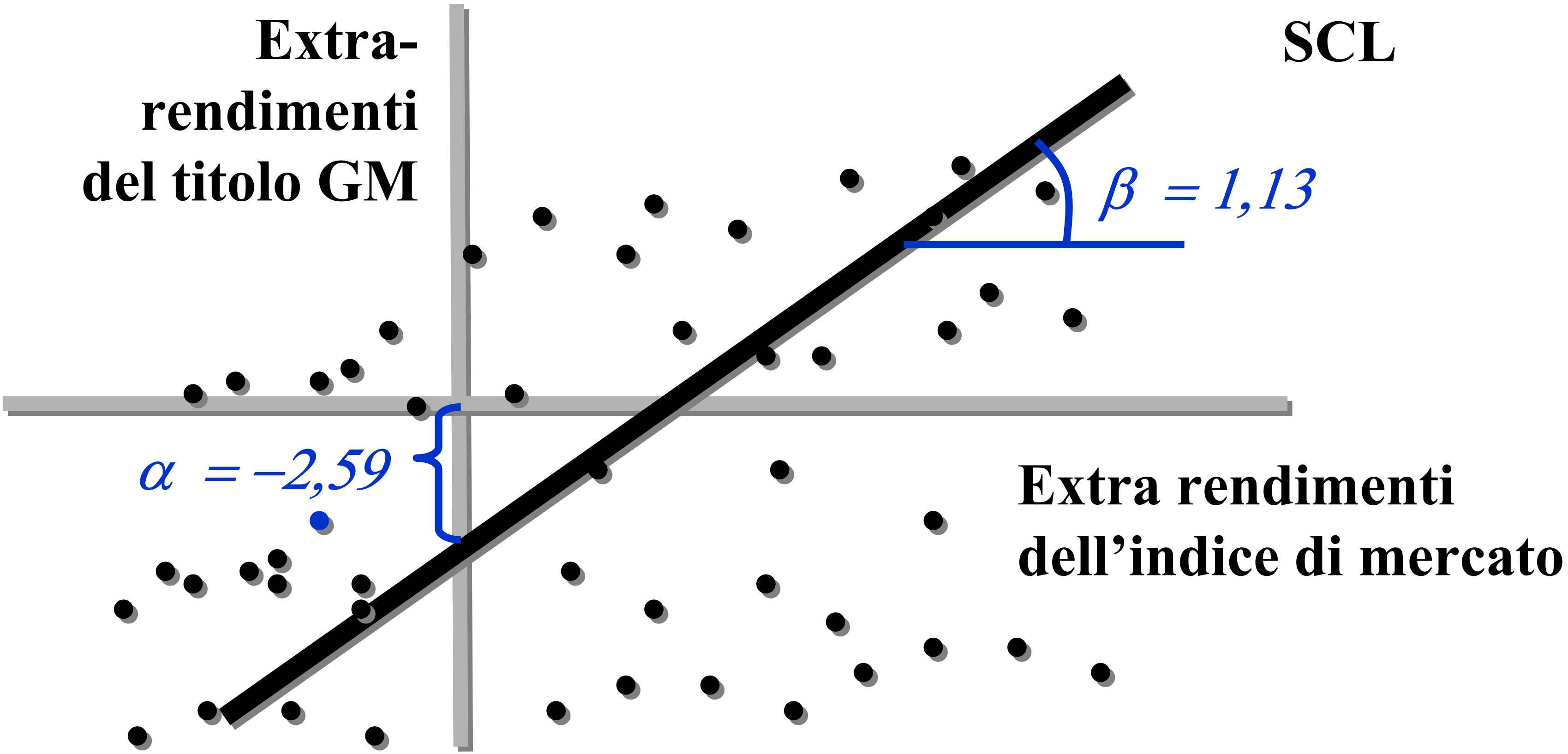
*Tratto da Bodie Kane e Marcus, *Essentials of investment*

L'interpolazione dei dati reali

con una retta (la SCL)

$$r_{GM} - r_f = \alpha + \beta(r_m - r_f)$$

	α	β
Stime dei coefficienti **Con una procedura statistica ("regressione di minimi quadrati")**	**-2.59**	**1.14**
La regressione spiega il 57,5% delle variazioni del titolo		



Se il mercato renderà il 15% e i tassi privi di rischio saranno il 5%, ci aspettiamo su GM E[GM]= 13,7%

Il CAPM e il market model: non confondiamoli

Vi sono differenze tra CAPM e market model

-CAPM : modello di equilibrio

-Il modello a un fattore

- rende possibile stimare il Capital Asset Pricing Model in modo relativamente semplice.
- necessita il passaggio dal concetto del portafoglio di mercato ad una proxy del portafoglio di mercato
- Permette di stimare la correlazione tra titoli in modo semplice

$$\rho_{ij} = \beta_i \beta_j \sigma_m^2$$

•Misuriamo il rischio con la varianza:

$$Var(R_i) = Var[\alpha_i + ß_i(R_m) + u_i]$$

•Per le proprietà della varianza:

$$Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y)$$

se X e Y sono incorrelati

$$Var(a + bX)=b^2Var(X)$$

• Nel nostro caso, quindi

$$Var(R_i) = ß_i^2\ Var(R_m) + Var(\ u_i)$$

- Nel nostro caso, quindi
    - $Var(R_i) = \beta_i^2 \, Var(R_m) + Var(u_i)$

Dove:

- $\beta_i^2 \, Var(R_m)$ è la componente sistematica della varianza, cioè la parte di rischio che dipende dal comportamento generale dei mercati

- $Var(u_i) = Var(R_i) - \beta_i^2 \, Var(R_m)$ è la componente individuale o, come si dice, idiosincratica del rischio

Abbiamo così decomposto il rischio di un titolo in 2 pezzi:

Rischio sistematico o di mercato:

- rischio riferito a un fattore macroeconomico, ad esempio a un indice di mercato

Rischio non sistematico o specifico:

- rischio non riferito al fattore

Vale dunque la relazione

Rischio totale = Rischio sistematico + Rischio specifico

Esempio primo foglio.xls

Il Beta di un portafoglio con più titoli

E' semplicemente la media dei beta individuali, ponderata per le quote di titoli in portafoglio:

$$\beta_p = \sum_{i=1,n} x_i \beta_i$$

Media e varianza del portafoglio risultano dunque facilmente calcolabili:

$$r_p = \sum_{i=1,n} x_i r_i = \sum_{i=1,n} x_i \alpha_i + \sum_{i=1,n} x_i \beta_i r_m + \sum_{i=1,n} x_i u_i =$$

$$= \alpha_p + \beta_p r_m + \sum_{i=1,n} x_i u_i$$

$$E(r_p) = \alpha_p + \beta_p E(r_m)$$

$$Var(r_p) = \beta_p^2 Var(r_m) + \sum_{i=1,n} x_i^2 Var(u_i)$$

Il rischio diversificabile

Se compro N titoli e in ognuno investo una quota 1/N del portafoglio la varianza sarà

$$Var(r_p) = \beta_p^2 Var(r_m) + \frac{1}{N^2} \sum_{i=1,n} Var(u_i)$$

Al crescere di N, il secondo addendo si avvicina a zero. Per questo il rischio individuale è detto anche diversificabile (cioè eliminabile con la diversificazione)

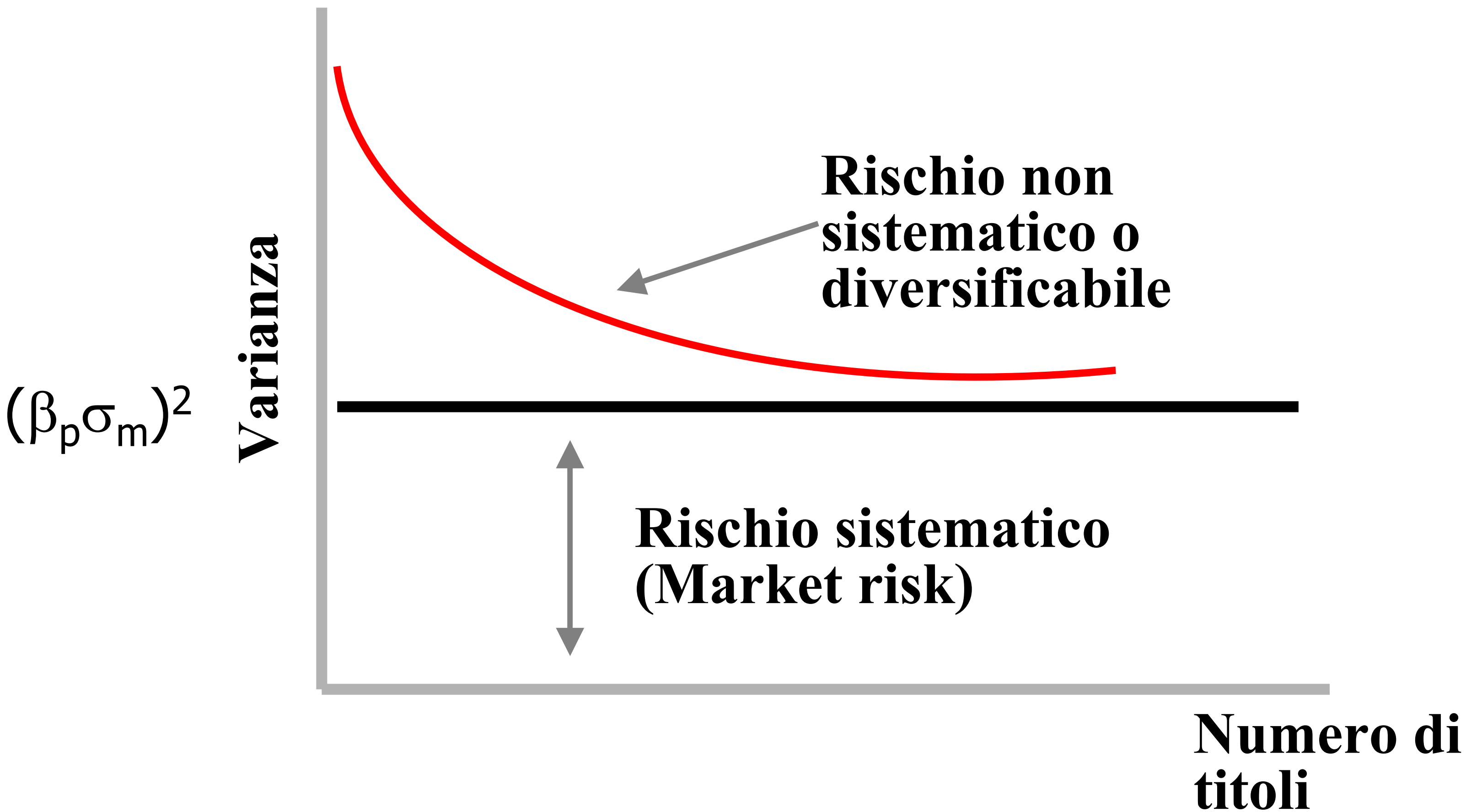
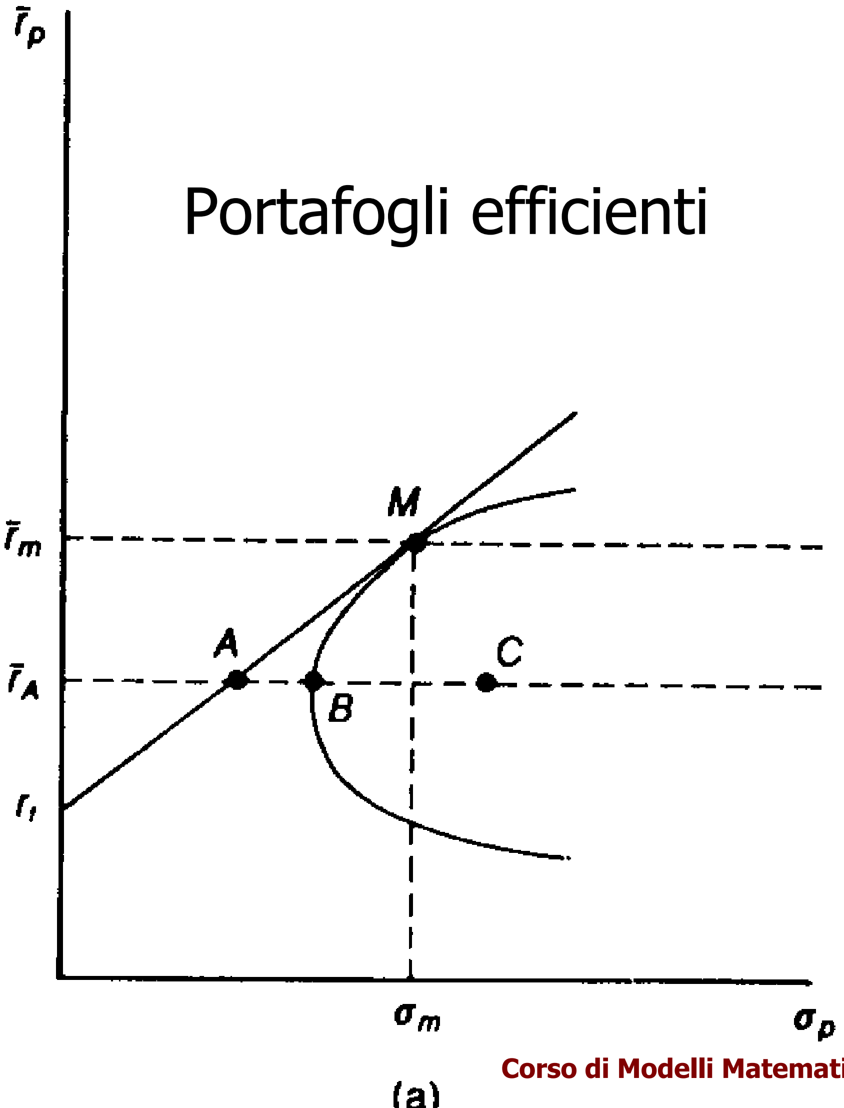
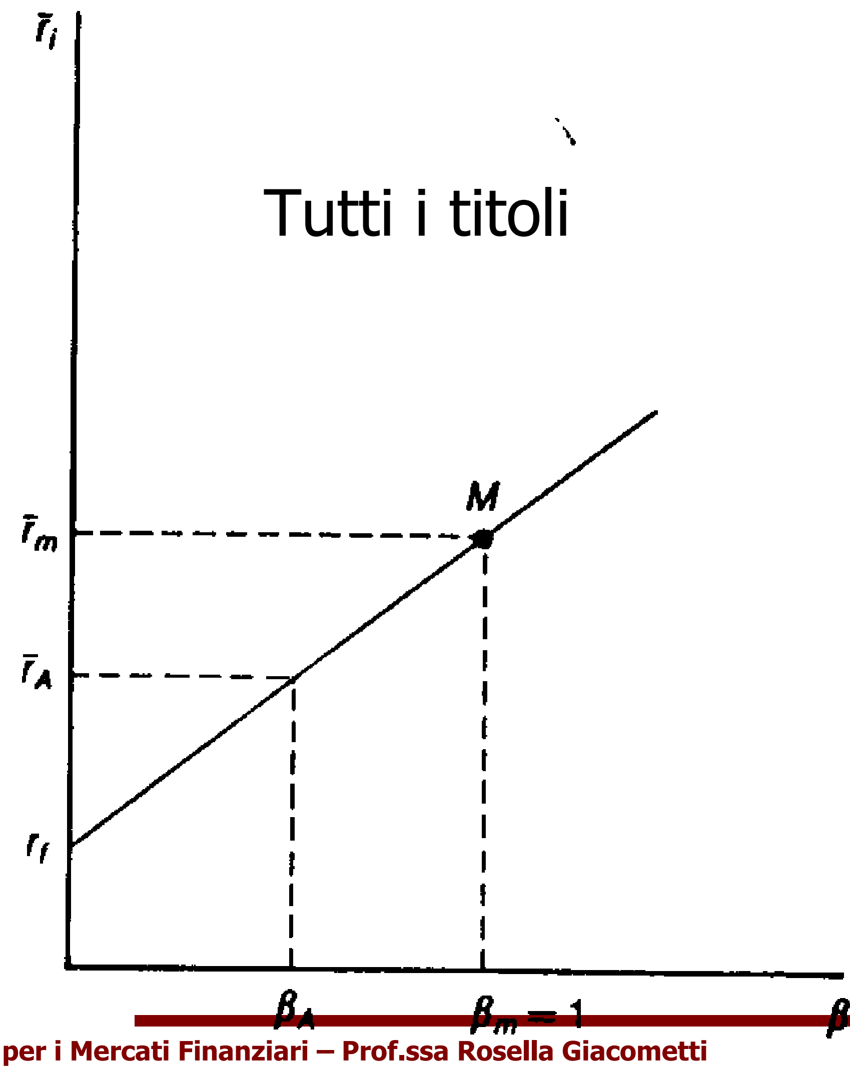

Rischio non sistematico o diversificabile
$(\beta_p\sigma_m)^2$
Varianza
Rischio sistematico (Market risk)
Numero di titoli

Foto di gruppo di A, B e C:





- Il modello CAPM è costruito su ipotesi forti, per esempio
  - tutti gli investitori valutano gli investimenti in termini di media- varianza
  - esistenza del portafoglio di mercato, unico fattore sistematico che influenza tutte le azioni.

- E' facile pensare che esistano altri fattori quali: ciclo economico, i tassi di interesse, il tasso di inflazione, il prezzo del petrolio e così via.

L'APT definisce la relazione di equilibrio tra rendimento atteso e rischio sfruttando l'ipotesi di assenza di arbitraggio

Ipotesi del modello a più fattori di Ross

Un modello fattoriale è un modello del tipo

$$R_i = \alpha_i + \sum_{j=1,k} \beta_{ij} F_j + u_i$$

- 1) $F_1, F_2 .. F_k$ sono le variazioni inattese dei fattori che influenzano il rendimento di un titolo con $E(F_j)=0$
- 2) $F_1, F_2 .. F_k$ sono indipendenti tra loro ($COV(F_j, F_k)=0$)
- 3) u_i un fattore di sorpresa specifico . ($E(u_i)=0$)
- 4) Poiché u_i è un fattore individuale, non risente dell'andamento dei fattori di rischio ($COV(F_j, u_i)=0$)
- 5) Per lo stesso motivo, non risente dell'andamento degli altri titoli ($COV(u_s, u_i)=0$)

Esempi di modelli multifattoriali

Fattori rilevanti per Chen, Ross, Roll: variazione produzione industriale, variazione inflazione, differenziale di rendimento tra titoli obbligazionari corporate e Treasury a lungo termine e differenziale tra rendimenti Treasury a lungo e a breve termine.

Fattori rilevanti per Fama e French: rendimento dell'indice di mercato, differenziale del rendimento delle azioni a bassa capitalizzazione ed alta capitalizzazione, differenziale del rendimento delle azioni ad alto e basso book-to-market ratio.

Il concetto di arbitraggio

L'APT si fonda sul concetto di assenza di arbitraggio.

L'arbitraggio è una strategia che richiede un investimento nullo iniziale e garantisce in tutti i possibile scenari futuri almeno un flusso di cassa positivo.

Consente quindi di ottenere profitti senza incorrere in rischi di perdite. (scenari equiprobabili)

Titolo	Scenario 1	Scenario 2	E(R)	σ
A	4.5%	5%	4.75%	0.25%
B	3.5%	7.5%	5.5%	2%
C	4%	6%	5%	1%

Costruisco un portafoglio P=50% A+50% B

Titolo	Scenario 1	Scenario 2
50%A+50%B	4%	6.25%
C	4%	6%

Se vendo allo scoperto 100 euro del titolo C per acquistare 100 euro del portafoglio 50% A+50% B, ottengo

- nel caso dello scenario 1 ho un risultato nullo
- nel caso dello scenario 2 ho un risultato positivo (+0.25 Euro)

Ma perché limitarci a investire 100 Euro e non investire 100000 Euro? Otterrei in uno dei due scenari un guadagno di 250 Euro senza incorrere in alcun rischio, e nulla nell'altro.

Il prezzo di C ben presto crolla, annullando le possibilità di arbitraggio.

Il modello di APT (seguiamo approccio del testo!!)

- parte dall'ipotesi che il rendimento effettivo di un titolo sia funzione di più fattori (più precisamente le variazioni del valore dei fattori rispetto alle aspettative) e

$$R_i = E[R_i] + \sum_{j=1,k} \beta_{ij} F_j + u_i$$

- arriva a spiegare il rendimento atteso in equilibrio del titolo in funzione dei beta e dei premi per il rischio λ_j

$$E[R_i] = \lambda_0 + \sum_{j=1,k} \beta_{ij} \lambda_j$$

Cenni ai modelli multi-fattori

Illustriamo il caso ad un fattore

$$R_i = E[R_i] + \beta_i F + u_i$$

Il rendimento di un portafoglio sarà

$$R_p = \sum_{i=1..N} x_i R_i = \sum_{i=1..N} (E[R_i]x_i + \beta_i F x_i + u_i x_i) =$$

$$= E[R_p] + \beta_p F + \underbrace{\sum_{i=1..n} x_i u_i}_{u_p}$$

Se il portafoglio è ben diversificato u_p tende a 0

Ipotizziamo esistano due portafogli diversificati con uguale β ma diverso rendimento atteso

$\beta_1 = \beta_2$ e $E(R_1) > E(R_2)$

E' possibile vendere allo scoperto il titolo 2 per acquistare il titolo 1 ottenendo un portafoglio con beta nullo e con rendimento.

$$R_p = E[R_1] + \beta_1 F - (E[R_2] + \beta_2 F) = E[R_1] - E[R_2] > 0$$

Tutti gli investitori adotteranno questa strategia fino a che risulterà $E(R_1) = E(R_2)$

Costruiamo un portafoglio con beta nullo

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1\beta_1 + x_2\beta_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = \dfrac{-\beta_2}{\beta_1 - \beta_2} \\ x_2 = \dfrac{\beta_1}{\beta_1 - \beta_2} \end{cases}$$

Questo portafoglio (zero-beta) non è esposto ne al rischio sistematico e ne al rischio specifico, e in assenza di arbitraggio, renderà λ_0, dove λ_0 è il rendimento del titolo zero-beta (ovvero $\lambda_0 = r_f$)

$$x_1 E(R_1) + x_2 E(R_2) = \lambda_0$$

Sostituendo i pesi sopra determinati

$$\frac{E(R_1)-\lambda_0}{\beta_1}=\frac{E(R_2)-\lambda_0}{\beta_2}$$

Atteniamo che i premi per il rischio dei singoli titoli sono uguali tra loro e costanti

$$\frac{E(R_i)-\lambda_0}{\beta_i}=\lambda_1 \quad \Rightarrow \quad E(R_i)=\lambda_0+\lambda_1\beta_i$$

Premio per il rischio per unità di beta legato al primo fattore

Se consideriamo F come il livello del fattore e non la variazione inattesa, il punto di partenza diventa

$$R_i = R_F + \beta_i F + u_i$$

E il punto di arrivo è il medesimo con $\lambda_0 = R_f$

$$E(R_i) = \lambda_0 + \lambda_1 \beta_i$$

Inoltre il portafoglio con beta=1 (portafoglio di fattore), deve avere lo stesso rendimento del mercato quindi

$$E(R_i) = \lambda_0 + \lambda_1 \beta_i$$

$$\Downarrow$$

$$E(R_M) = R_f + \lambda_1$$

$$\Downarrow$$

$$\lambda_1 = E(R_M) - R_f$$

$$\Downarrow$$

$$E(R_i) = R_f + (E(R_M) - R_f)\beta_i$$

Se avessimo k fattori di rischio avremmo che il rendimento atteso è dato dal premio per il rischio di ogni fattore moltiplicato per il beta ovvero la sensitività del titolo al fattore

$$E[R_i] = \lambda_0 + \sum_{j=1,k} \beta_{ij}\lambda_j$$

Rendimento zero-beta

Il portafoglio di fattore j ha beta=1 per quel fattore e zero per gli altri. Il suo rendimento

$$E[\gamma_j] = \lambda_0 + \lambda_j$$

Da cui

$$\lambda_j = E[\gamma_j] - \lambda_0$$

e

$$E[R_i] = \lambda_0 + \sum_{j=1,k} \beta_{ij} (E(\gamma_j) - \lambda_0)$$

Portafoglio di fattore j-esimo

Cerchiamo un portafoglio ben diversificato con una combinazione $\beta=1$ rispetto ad un solo fattore e $\beta=0$ rispetto a tutti gli altri. Lo chiamiamo portafoglio di fattore.

ESEMPIO:Suppiamo che i due portafogli di fattore abbiano $E(\gamma_1)=10\%$ e $E(\gamma_2)=12\%$ e $r_f=4\%$.

Consideriamo un portafoglio generico ben diversificato che dipende dai due fattori (es. crescita del PIL e costo petrolio)

$$\mathbf{E(r_i) = 4\% + \beta_{i1}(10\%_1 - 4\%) + \beta_{i2}(12\% - 4\%)}$$

Cenni ai modelli multi-fattori

– Se β_{i1}**=** 0,5 e β_{i2}**=** 0,75 allora il rendimento richiesto per compensare le due fonti di rischio sistematico è la somma dei due premi per il rischio

$$r_i = 4\% + 0{,}5\% \times 6\% + 0{,}75\% \times 8\% = 13\%$$

– Si tratta di una estensione della security market line

Inoltre si può dimostrare che, indicando con γ_j il portafoglio di fattore j

$$\beta_{ij} = \frac{COV(r_i, \gamma_j)}{VAR(\gamma_j)}$$

Confronto APT e CAPM

Il CAPM può essere interpretato con un APT dove l’unico fattore e’ il portafoglio di mercato.

APT ha una generalità maggiore in quanto si basa su meno ipotesi:

- non abbiamo ipotesi sulla distribuzione dei rendimenti o funzioni di utilità
- abbiamo più fattori esplicativi
- non richiede che il portafoglio di mercato sia mean variance efficiente, anzi la derivazione dell’APT si basa sull’ipotesi di assenza di arbitraggio