Matematica: Catalogo fondamentale

Conoscenze di base di matematica per l'università

Traduzione dal tedesco ad opera della Commissione di matematica della Svizzera italiana CMSI

Avvertenza: Questo documento è pubblico e vuol invitare alla discussione; espone lo stato dei lavori e non è un testo definitivo.

Preambolo

Antefatto

Nel 1990, la Conferenza dei Rettori delle Università svizzere aveva pubblicato un Catalogo delle conoscenze di base di matematica. Vi figurava la materia che veniva considerata nota all'inizio degli studi universitari. Dopo la riforma della maturità del 1995, la *Deutschschweizerische Mathematikkommission* DMK, la *Commission Romande de Mathématique* CRM e una Commissione della Scuola Politecnica Federale di Zurigo rielaborarono il catalogo e, dopo un'ampia consultazione sul piano nazionale, ne raccomandarono l'adozione.
Le condizioni quadro cambiarono ancora all'inizio del secolo - in taluni Cantoni venne ridotta la durata degli studi fino alla maturità, si introdussero calcolatrici grafiche e software di calcolo simbolico (CAS, *Computer Algebra System*) come pure di geometria dinamica - e si aprirono così nuove prospettive per l'insegnamento della matematica a livello liceale. Indagini come EVAMAR II[1] hanno mostrato che nel passaggio dal Liceo all'Università sorgono problemi anche a causa della diversa dotazione oraria della matematica come disciplina fondamentale.
Nelle giornate dedicate a "Il passaggio Liceo-Università" dell'ottobre 2010, organizzate al Centro Stefano Franscini dalla Commissione Liceo-Università della Società Svizzera degli Insegnanti delle Scuole Secondarie in collaborazione con la Società svizzera dei docenti universitari venne perciò proposto di rielaborare il catalogo. La Commissione Liceo-Università ha incaricato la DMK di formare un gruppo di rappresentanti delle tre Commissioni di matematica – la DMK, la CRM e la *Commissione di Matematica della Svizzera italiana* CMSI - e delle Scuole universitarie per realizzare il progetto e proporre un documento per una consultazione generale.

Scopi del Catalogo

Sovente nei Licei non si conosce con precisione quali conoscenze e quali abilità matematiche vengano presupposte nei corsi universitari di base; analogamente nelle Scuole universitarie spesso non si conosce con precisione quale formazione ci si possa attendere da parte dei nuovi studenti.
Questo Catalogo deve servire da orientamento e informazione per entrambe le parti, senza chiedere una standardizzazione dei contenuti e dei piani di studio che sarebbe malvista poiché la libertà d'insegnamento con le sue diversificazioni è un bene prezioso, senza il quale non è possibile uno sviluppo della scuola. Nel Catalogo devono trovar posto anche le differenze storiche e culturali che si sono radicate nel tempo, ma deve risultare chiaramente quale sapere, quali capacità, quali abilità e quale livello di comprensione debbano avere in matematica i giovani in possesso di una maturità liceale. Si deve comunque evitare un'eccessiva eterogeneità tra scuole e tra Cantoni e il Catalogo deve servire come orientamento per la stesura dei programmi cantonali o di sede. Allo stesso tempo questo Catalogo può chiarire anche le aspettative del Liceo per il passaggio dalla Scuola media, anche se, a dire il vero, esso espone globalmente quali capacità e quali conoscenze disciplinari l'Università si aspetta dagli studenti. Vi trovano posto anche argomenti che devono già essere stati

[1] Seconda fase della valutazione della maturità liceale secondo ORM 95; http://www.sbfi.admin.ch/themen/01366/01379/01625/index.html?lang=it

sistemati prima del liceo. Per fare qualche esempio, il calcolo algebrico, le equazioni, la geometria elementare, la stereometria e considerazioni di carattere stocastico devono già essere state affrontate in precedenza e, al più tardi a livello liceale, trattate di nuovo nell'insegnamento, ma ad un più alto livello di astrazione.

Condizioni quadro

Questo Catalogo è stato concepito per la Matematica come disciplina fondamentale. È pensato per una dotazione globale di 16 ore-lezione/settimana distribuite su 4 anni. Le scuole che dispongono di meno ore devono effettuare delle riduzioni di programma, perché la matematica richiede tempo. Inoltre, nei Licei gli allievi devono essere informati che – a dipendenza del curricolo universitario che intendono scegliere – potrebbe essere opportuna la frequenza del corso di OS FAM oppure di OC Matematica applicata.

Che c'è di nuovo?

Internet e il computer permeano e condizionano le nostre attività quotidiane e ogni ambito disciplinare al Liceo, ma nessuna disciplina è influenzata più fortemente della matematica dalle innovazioni introdotte dall'informatica. Internet, software per la visualizzazione e la geometria, come pure CAS e altri sussidi devono trovar posto in qualsiasi insegnamento moderno della matematica. Questi nuovi strumenti offrono la possibilità di insegnare la matematica in modo orientato alla comprensione. Temi come la discussione di curve o la ricerca di funzioni primitive di bizzarri integrandi hanno perso importanza nell'era dei sistemi di algebra computazionale. L'introduzione di sussidi elettronici deve avvenire, però, in modo mirato e ben ponderato perché non conduca ad un indebolimento delle capacità di calcolo: affinché gli studenti possano affrontare con padronanza le esigenze dello studio, le Scuole universitarie si aspettano, come finora, che gli studenti sappiano lavorare senza sussidi nelle espressioni algebriche, nella risoluzione di equazioni e nell'esecuzione di calcoli anche lunghi. Un insegnamento che integra i CAS in modo sensato e critico non può esaurirsi nel trattare con il computer gli esercizi tradizionali; deve invece porsi davanti a nuovi compiti senza per questo dimenticare le abilità strumentali tradizionali.

Le richieste effettive per lo studio universitario variano considerevolmente a dipendenza del curricolo scelto, della materia d'esame e dell'Università. In talune Scuole universitarie, per gli esami di base dopo il primo anno di studi non vengono più ammesse calcolatrici tascabili di nessun genere: da un lato perché non sono necessarie, in quanto gli esercizi dell'esame sono orientati alla comprensione e richiedono abilità nel trattare con gli oggetti matematici e, d'altro canto, perché ovvi motivi giuridici impediscono l'uso di sussidi elettronici agli esami. Ne deriva che le Scuole universitarie sono tenute a specificare in opuscoli o in siti web le esigenze per i singoli curricoli. Da parte loro, i docenti e gli allievi del Liceo devono informarsi su tali esigenze per garantire una preparazione adeguata allo studio universitario.

A causa dell'eterogeneità delle situazioni, il Catalogo non può fornire indicazioni valide in generale per l'uso dei CAS; tende comunque a un equilibrio tra l'abilità nei metodi (sintassi), il sapere orientato alla comprensione (semantica) e la ricerca personale (esplorazione), e un tale equilibrio si rispecchia nei contenuti di questo Catalogo.

Scopi generali dell'insegnamento della matematica

La matematica è un campo immenso dello scibile e un bene culturale sviluppatosi durante millenni; le sue applicazioni sono la base della nostra società fortemente tecnologicizzata. Essa fornisce strumenti fondamentali a tutte le scienze che lavorano con il metodo quantitativo e a quelle che argomentano logicamente. Il fine formativo del suo insegnamento va ben oltre il suo studio come disciplina a se stante.
Nell'insegnamento deve esserci spazio

- per le domande, la ricerca di risposte, le giustificazioni, la scoperta di regole;
- per spiegare, esercitare, imparare e ripetere;
- per le esplorazioni, gli aspetti ludici, la storia, l'aneddotica e la competizione.

La matematica è moderna e viva, e cambia continuamente: lo si constata nella sua evoluzione, nell'immagine che essa mostra all'esterno, negli strumenti usati e in sempre nuove applicazioni. Questa dinamicità deve riflettersi nella scuola. La matematica è curiosità e creatività e l'insegnamento deve risvegliare il gusto per queste sue peculiarità.
Un progetto per l'insegnamento deve quindi contenere i seguenti elementi:

- la matematica come campo del sapere: storia e aneddoti, applicazioni e panoramica sulle idee generali sono importanti per la motivazione e come scopo formativo per tutti;
- gli strumenti fondamentali;
- la matematica come scienza.

Da questo punto di vista segue tutta una serie di conseguenze generali per l'insegnamento.

Aspetti non legati a un argomento

In matematica i fatti vengono dimostrati, e di conseguenza le verità valgono sempre e ovunque. Nessun'altra disciplina consente una simile esperienza. Il confronto intensivo con la matematica richiede e promuove un certo rigore nello spirito e insegna ad essere ostinati e tenaci davanti ad esercizi impegnativi. La fiducia in sé e il coraggio di provare sono i presupposti perché gli allievi siano aperti davanti a temi matematici, abbiano la volontà di scoprire da soli, di giustificare e di dimostrare. Dovrebbero anche sperimentare che la presentazione pulita di una procedura risolutiva, così come le considerazioni di plausibilità, costituiscono le premesse per poter scoprire gli errori e correggerli. Il sapersi porre in modo positivo davanti ad un lavoro e una corretta autostima costituiscono un importante corredo per iniziare lo studio con successo.

Argomentare logicamente. Il rapporto con il sapere e con l'informazione richiede, non solo in matematica, la capacità di connettere logicamente tra loro diversi elementi. Anche argomenti interni alla matematica rendono necessario che ci si occupi di strutture logiche, poiché solo per mezzo delle loro connessioni si giunge al concetto centrale della dimostrazione. Cos'è una dimostrazione e perché la si usa è un tema che deve pure essere affrontato nell'insegnamento, così come lo sono particolari tecniche di dimostrazione (diretta e per assurdo, induzione completa). Il modo di lavorare della matematica esige che gli allievi prendano confidenza con i concetti di definizione, teorema (ipotesi, tesi), dimostrazione, condizione necessaria e sufficiente, negazione, inversione e contrapposizione. È necessario che questi concetti vengano esercitati con esempi appropriati.

Costruzione di modelli. La matematica è lingua e strumento per altre scienze. L'enorme utilità della matematica nella vita di tutti i giorni rimane però nascosta agli osservatori più superficiali. Consiste sia nel fatto che la matematica consente di costruire modelli di fenomeni sperimentabili, sia nella possibilità di indagarli con metodi matematici e di trarre poi dai risultati conclusioni per la realtà. Le questioni centrali sono: cos'è un modello? Come si arriva da un fenomeno reale a un modello?

Quali fattori si possono trascurare e quali invece sono rilevanti? Dove stanno i limiti del modello? Quale relazione esiste tra modello e realtà? Come si possono realizzare prognosi, simulazioni e ottimizzazioni con l'aiuto di modelli? Queste questioni vanno senz'altro affrontate a scuola.

Abilità di calcolo. Così come per conoscere perfettamente una lingua si devono avere un vocabolario di base e una buona familiarità con la grammatica, anche per lavorare in matematica bisogna possedere un certo bagaglio di abilità strumentali e di tecniche. Di questo bagaglio fa parte anche il corretto uso della notazione matematica. Tali abilità strumentali devono essere continuamente esercitate con esempi appropriati. Solo una sufficiente capacità nel calcolo consente di potersi esprimere matematicamente.

Pensiero algoritmico. L'algoritmo è un concetto centrale della matematica e ne accentua il lato costruttivo e dinamico; costituisce altresì un ponte verso l'informatica. In molti ambiti giocano un ruolo importante ad esempio le ricorrenze, i cicli e i loro invarianti, come pure i procedimenti iterativi e numerici.

Capacità di visualizzare geometricamente. Molti concetti della geometria come la dimensione, la simmetria, le grandezze conservate, gli invarianti, le trasformazioni – come del resto la visione spaziale - sono importanti per una comprensione approfondita di altre parti della matematica. Ciò che può essere visto chiaramente in geometria può essere trasferito su oggetti più astratti. Tramite la visualizzazione geometrica si può favorire la comprensione di aspetti più profondi.

Uso delle nuove tecnologie. Gli allievi devono poter avere un primo contatto con software di matematica per affrontare i problemi in modo analitico, numerico e statistico. In particolare deve sparire la paura di confrontarsi con media elettronici, e il primo approccio alle moderne tecnologie deve essere curato anche nell'ottica di un loro uso più avanzato a livello universitario. Ciò deve sia consentire un contatto con problematiche vicine alla realtà per mezzo di applicazioni semplici, sia sostenere e favorire la scoperta di fenomeni matematici più complessi per mezzo della sperimentazione, della simulazione e del calcolo numerico. Deve anche rendere accessibile l'impiego di metodi di visualizzazione e l'elaborazione di dati. Contemporaneamente l'allievo deve poter sperimentare che un uso acritico del computer può condurre a conclusioni errate.

Nella didattica di sostegno (*scaffolding*) e grazie al concetto *black box - white box,* il computer consente anche agli allievi più deboli di avere successo con la matematica. E poiché i calcoli (sintattici) di routine possono essere delegati alla macchina, l'insegnante può dedicare più tempo ad approfondimenti teorici e orientati alla comprensione, senza ovviamente trascurare il calcolo manuale.

Mentalità scientifica. La matematica è una disciplina scientifica con i suoi propri metodi di lavoro, che dovrebbero ripercuotersi nell'insegnamento. Partendo da osservazioni puntuali o sistematiche, da generalizzazioni o da considerazioni di casi particolari, si stabilisce un'ipotesi. È importante distinguere bene ciò che si cerca da ciò che si conosce e porre attenzione all'uso di denominazioni adatte. Costruendo su un'idea centrale appropriata si cerca – basandosi su conoscenze pregresse e per deduzione – di dimostrare la tesi o di modificarla in modo da acquisire nuovo sapere e riordinare le conoscenze. Fa parte della mentalità scientifica anche la discussione di una soluzione mediante considerazioni di plausibilità o calcoli approssimati. Da questo processo, che richiede un alto grado di creatività, si ricavano nuovi punti di vista, nuove relazioni, nuove possibilità di interpretazione e nuovi interrogativi.

Interdisciplinarità

Con l'ORM 95 e l'introduzione di opzioni specifiche come *Fisica e applicazioni della matematica* o *Biologia e chimica*, l'interdisciplinarità ha assunto grande importanza nell'insegnamento liceale. Il Catalogo suggerisce occasioni per collegare i contenuti della matematica ad altre discipline. In questo modo si mostra anche l'utilità della matematica come scienza strutturante e si fornisce all'allievo una motivazione maggiore. L'interdisciplinarità non deve però essere elevata a principio assoluto: senza un sapere disciplinare ben fondato non si può lavorare in modo interdisciplinare. Non di rado i contenuti matematici vengono inizialmente compresi più facilmente in forma pura, e proprio in questa forma mostrano la loro propria estetica e la legittimazione della matematica quale scienza indipendente.

Gli argomenti

I programmi di matematica si orientano su quattro *direttrici* classiche, sviluppandone anche le applicazioni: *Geometria*, *Algebra* elementare, *Analisi*, *Stocastica*. La matematica scolastica ripercorre in questo modo lo sviluppo storico della disciplina, senza poterne però conglobare gli argomenti più attuali.

Al Liceo, *l'algebra* si sviluppa dall'aritmetica, cioè dal calcolo numerico, e giunge fino a comprendere le variabili e il calcolo con esse. In questo modo si crea un'importante premessa per il concetto di funzione e per l'analisi. Le regole fondamentali del calcolo algebrico (commutatività, associatività, distributività) vengono rese accessibili grazie ad analogie con il calcolo numerico oppure ad argomentazioni geometriche e stanno alla base delle trasformazioni di espressioni algebriche e della teoria delle equazioni elementari. Lo studio delle funzioni più semplici (potenza, radice, esponenziale, logaritmica) e la corrispondente pratica del calcolo vengono pure tradizionalmente messi in relazione con l'algebra. Grazie al linguaggio dell'algebra si apre così un ampio campo di applicazioni e di modelli accessibili su cui poggerà poi l'analisi. Aspetti dell'algebra avanzata, come ad esempio lo stretto legame tra algebra e geometria, trovano difficilmente posto nella disciplina fondamentale, eppure il quadro storico chiede di mostrare –almeno in modo esemplare– l'evoluzione della matematica come scienza.

L'analisi si occupa di relazioni funzionali nelle scienze e nella matematica. Fornisce un linguaggio per descrivere queste relazioni e sviluppa contemporaneamente gli utensili numerico-analitici e grafico-visivi e i metodi per indagarle. Le tecniche di calcolo (sintassi) devono venir sottoposte a rigoroso esame concettuale (semantica). La tecnologia ben si presta a facilitare questo compito. Uno dei temi centrali tradizionali dell'analisi liceale, la discussione di curve, non è quindi più attuale e non appare più come tema a se stante. Molte leggi scientifiche, tra le più fondamentali e significative, dalla fisica passando per la meteorologia, la biologia, la chimica, la medicina fino all'economia politica, si basano sul calcolo differenziale e integrale e vengono formulate sotto forma di equazioni differenziali. Affinché tali modelli e leggi possano venir capiti anche solo a livello di applicazione, è indispensabile che il concetto e la comprensione qualitativa di un'equazione differenziale vengano trasmessi anche nella disciplina fondamentale; e ciò si può fare con metodi matematici semplici senza dover usare procedimenti analitici di risoluzione.

Nel campo della *geometria*, storicamente, vennero poste le basi della prassi del metodo matematico. Negli Elementi di Euclide venne impiegata per la prima volta la struttura dei testi matematici in uso ancora oggi: definizioni, assiomi, teoremi e dimostrazioni. Questa impostazione si è dimostrata fondamentale in matematica e può essere illustrata e resa viva in modo analogo e sperimentale nell'insegnamento della geometria mediante esempi chiari e intuitivi. Lo sviluppo della geometria nel quadro dei gruppi di trasformazioni e degli invarianti ha condotto ad importanti

generalizzazioni, come la topologia o la geometria discreta, e ad una unificazione interna con l'algebra. Gli allievi devono vivere la geometria anche come strumento moderno, che si è trasformato grazie agli sviluppi tecnologici e si è orientato su questioni attuali. La comprensione e la descrizione in forma numerica di figure e corpi (forma, grandezza, posizione) e la loro rappresentazione si ripercuotono in diverse scienze. In particolar luogo, la geometria vettoriale offre la possibilità di uscire dallo stretto ambito matematico per applicare concetti geometrici in fisica, in chimica, in biologia, in geografia, nelle scienze economiche, ecc.
Nel recente passato la *stocastica* ha trovato numerose applicazioni in tutte le scienze che lavorano quantitativamente ed ha così guadagnato importanza: ciò vale anche per molti indirizzi di studio al di fuori delle scienze naturali e della tecnica, come ad esempio la medicina, l'economia, la psicologia, la sociologia, l'economia politica e il diritto. La stocastica è diventata sempre più fondamentale per questi indirizzi di studio, e ciò si rispecchia nei contenuti del Catalogo. Ne consegue che la stocastica appartiene oggi alla cultura generale: ogni giorno siamo confrontati con caso, statistica, rischio e incertezza. Non si tratta di anticipare contenuti delle lezioni universitarie di statistica, ma di gettare un colpo d'occhio elementare nel modo di pensare della stocastica. Il rapporto con gli aspetti quotidiani accresce in molti allievi una motivazione particolare per la matematica, poiché spesso i problemi che si trattano in statistica offrono loro un accesso che non dipende dalle precedenti esperienze d'insegnamento. La stocastica si presta bene a illustrare aspetti della modellizzazione matematica. I modelli stocastici si rivelano essere sia un importante ampliamento dei modelli deterministici dell'analisi, sia un motivo di contrapposizione con essi.

Campi della matematica esterni alle quattro direttrici citate in precedenza, fosse anche solo per ragioni di tempo, non possono trovare spazio nella scuola. Ciò nonostante, i principali campi della numerica o della matematica discreta dovrebbero venir accennati con l'aiuto di strumenti informatici.

Contenuti propri alla disciplina

I contenuti di ogni campo matematico vengono esposti in una tabella a tre colonne. Ogni tabella viene ampliata con cenni ad altri temi opzionali di approfondimento, a relazioni trasversali con altri campi interni alla disciplina o con altre discipline, e con applicazioni.

Le tre colonne *Contenuti orientati alla comprensione dei concetti (semantica)*; *Abilità algoritmiche orientate ai procedimenti (sintassi)*; *Approfondimenti orientati alla comprensione (esplorazione)* devono ripercuotersi nell'insegnamento con lo stesso peso. Non è quindi sufficiente padroneggiare sintatticamente le regole di derivazione se alla derivata non è legato alcun contenuto concettuale, come pure se nelle applicazioni non la si usa come strumento al di là della definizione formale. Questa impostazione dell'insegnamento ha come conseguenza che durante gli esami non devono venir valutate solo abilità orientate al procedimento. La colonna *Approfondimenti orientati alla comprensione (esplorazione)* assume un ruolo particolare, in quanto può essere usata a piacere sia per un approccio esplorativo, sia per un confronto più approfondito con un argomento. Le Scuole universitarie devono poter contare sul fatto che i contenuti delle tre colonne – Semantica, Sintassi ed Esplorazione – sono stati affrontati nell'insegnamento. I contenuti elencati sotto "Temi di approfondimento" e "Relazioni trasversali" sono, per contro, da vedere come proposte che arricchiscono e possono, a seconda del caso, essere sostituiti da altri contenuti pertinenti.

Algebra e nozioni elementari			
Argomenti	**Contenuti orientati alla comprensione dei concetti (semantica)**	**Abilità algoritmiche orientate ai procedimenti (sintassi)**	**Approfondimenti orientati alla comprensione (esplorazione)**
Insiemi numerici N, Z, Q, R	• Diverse rappresentazioni • Rappresentazioni esatte e approssimate • Valore assoluto	• Calcolo con frazioni e radicali	• Numeri irrazionali
Variabili, operazioni e loro inverse, espressioni, formula binomiale, polinomi	• Rappresentazione geometrica delle operazioni algebriche • Riconoscere le strutture nelle espressioni algebriche	• Proprietà associativa, commutativa, distributiva • Operazioni con frazioni algebriche • Frazioni doppie, radicali, fattorizzazione	• Formula binomiale (triangolo di Pascal - Tartaglia)
Proporzionalità diretta e inversa	• Riconoscerle nelle applicazioni		• Riconoscere altre dipendenze funzionali
Potenze e logaritmi	• Comprendere le regole per le potenze ad esponenti naturali • Concetti di radice *n*-esima e logaritmo	• Regole per le potenze ad esponenti razionali e per i logaritmi • Scale logaritmiche	• Ricavare le regole per le potenze ad esponenti interi negativi e razionali
Equazioni	• Soluzione di un'equazione • Trasformazioni equivalenti	• Uso delle manipolazioni algebriche per trasformare equazioni in equivalenti • Risoluzione di alcuni tipi di equazioni di primo grado, quadratiche, riconducibili alle forme $x^a = b$, $a^x = b$ oppure $\log_a x = b$ • Verifica delle soluzioni per sostituzione	• Risoluzione di disequazioni
Sistemi di equazioni	• Sistemi lineari e non • Significato geometrico di un sistema lineare in R^2	• Uso di differenti metodi risolutivi	• Casi particolari di sistemi lineari • Insieme soluzione di tali sistemi

Tempo previsto

Da 30 a 35 settimane (con 4 ore-lezione settimanali), in aggiunta a quanto trattato alla Scuola media (da 20 a 40 settimane)

Temi opzionali di approfondimento

- Equivalenza di equazioni
- Numeri complessi
- *Crittologia*: algoritmo RSA, protocollo Diffie-Hellmann per lo scambio di chiavi
- *Analisi numerica*: qualche metodo per la risoluzione approssimata di equazioni

Collegamenti con altri ambiti della matematica

Le trasformazioni algebriche vengono impiegate in tutti gli ambiti della matematica. In particolare occorre trattare quanto segue:

- *Analisi:* espressioni, equazioni, funzioni
- *Geometria:* trasformazioni di formule per aree e volumi
- *Stocastica:* distribuzione binomiale

Applicazioni e collegamenti con altri ambiti disciplinari

Informatica

- Rappresentazione binaria di un numero
- Calcolo approssimato con la calcolatrice tascabile

Fisica

- Legge di Ohm, $s = v\, t$, terza legge di Keplero
- Formula delle lenti sottili
- Scala dei decibel

Chimica

- pH
- Equilibrio chimico

Biologia

- Legge di Weber-Fechner (percezione della luminosità e dell'intensità sonora)
- Legge di Henry (solubilità)

Geografia

- Scala Richter

Scienze economiche

- Programmazione lineare
- Semplici modelli economici (ad esempio, domanda/offerta)

Filosofia

- Concetto di "infinito"
- Concetto di "verità"

Analisi			
Argomenti	**Contenuti orientati alla comprensione dei concetti (semantica)**	**Abilità algoritmiche orientate ai procedimenti (sintassi)**	**Approfondimenti orientati alla comprensione (esplorazione)**
Successioni e serie	• Modelli di crescita discreti (divisione cellulare, interesse composto, curva di Koch) • Definizione esplicita e ricorsiva • Concetto intuitivo di convergenza	• Successioni, successioni di somme parziali, serie • Uso del simbolo di sommatoria • Successioni e serie aritmetiche e geometriche • Calcolare limiti	• Induzione completa • Applicazioni nella matematica finanziaria (interessi e rendite) • Teoremi sui limiti
Funzioni	• Modelli discreti e continui • Concetto di funzione, differenza tra espressione, equazione e legge d'associazione • Grafico di una funzione	• Calcolare valori numerici di funzioni • Funzioni come scatole nere	• Dai dati alle funzioni e viceversa • Interpolazione
	• Monotonia, simmetrie, periodicità, limitatezza, zeri • Comportamento asintotico, concetto di limite, continuità, invertibilità in senso grafico	• Funzioni elementari e loro grafico (funzioni potenza, polinomiali, esponenziali, logaritmiche, trigonometriche)	• Biunivocità, iniettività, suriettività • Funzioni inverse (ad esempio funzioni radice e funzioni trigonometriche inverse)
	• Analisi di espressioni di funzioni (ad esempio di funzioni composte)	• Operazioni con funzioni: somma, prodotto, quoziente, composizione • Trasformazioni (contrazione (omotetia), traslazione, riflessione)	
Fondamenti del calcolo differenziale	• Indice della variazione: tassi di variazione medio e istantaneo • Linearizzazione, tangente, pendenza	• Rapporto incrementale • Rapporto incrementale/derivata • Funzione derivata • Proprietà fondamentali (linearità) • Derivata delle funzioni elementari • Approssimazione lineare	• Applicazioni nelle scienze naturali, sociali ed economiche (cinematica, crescita e decadimento) • Criteri di monotonia

Analisi			
Fondamenti del calcolo integrale	• Somma di Riemann	• Integrale definito • Proprietà fondamentali (linearità, additività)	• Applicazioni alla geometria e alla fisica • Cenni all'integrazione numerica
Teorema fondamentale del calcolo infinitesimale	• Giustificazione intuitiva	• Primitiva, integrale indefinito	• Esempi in geometria e in fisica
Calcolo infinitesimale	• Ottimizzazione • Estremi e flessi	• Calcolo di derivate (regole del prodotto, del quoziente e della composizione) • Calcolo di integrali (primitive delle funzioni elementari) • Problemi di massimo e minimo	• Applicazioni in fisica (ad esempio spazio e velocità, lavoro, energia)
Equazioni differenziali e modellizzazione	• Concetti fondamentali della modellizzazione con equazioni differenziali • Tasso di variazione momentaneo di una funzione • Concetto di soluzione di un'equazione differenziale	• Metodo di Eulero	• Campi direzionali e risoluzione grafica • Applicazioni (ad esempio, modelli per l'evoluzione di popolazioni in biologia, caduta libera in fisica)

Tempo previsto

Da 40 a 50 settimane di 4 ore-lezione settimanali.

Temi opzionali di approfondimento

- Regola di Bernoulli-de l'Hôpital
- Metodo di Newton
- Derivazione numerica
- Integrazione numerica
- Approssimazione (ad esempio serie di Taylor)
- Metodi d'integrazione
- Integrali impropri (ad esempio densità di probabilità, criterio integrale per le serie, campi potenziali e gravitazionali)
- Regressione (metodo dei minimi quadrati)

- Metodi analitici di risoluzione per equazioni differenziali (ipotesi di soluzione esponenziale, separazione delle variabili)

Collegamenti con altri ambiti

Stocastica

- Dati e funzioni (interpolazione, regressione)
- Densità di probabilità
- Speranza matematica
- Mediana

Algebra

- Metodi numerici di risoluzione delle equazioni (bisezione, Erone, Newton-Raphson)
- Ricorsione e iterazione

Geometria

- Frattali e attrattori nelle iterazioni (ad esempio nel metodo di Newton-Raphson)
- Probabilità geometriche (ad esempio, problema di Buffon)
- Solidi di rotazione

Applicazioni e collegamenti con altri ambiti disciplinari

Fisica

- Spazio, velocità e accelerazione in funzione del tempo
- Moto di masse puntiformi (equazioni differenziali elementari, principio d'inerzia di Galileo, caduta libera)
- Energia e lavoro
- Campi (potenziali, gravitazionali)
- Decadimento esponenziale (radioattività)
- Legge di raffreddamento di Newton
- Oscillazioni

Biologia

- Modelli di crescita e di decrescita (lineare, esponenziale [ad esempio divisione cellulare], logistica, successione di Fibonacci)
- Sistemi elementari di equazioni differenziali (ad esempio modello di Lotka-Volterra)
- Modelli per la competitività

Scienze economiche e finanziarie

- Interessi e rendite
- Funzioni marginali
- Funzioni totali
- Rendita dei consumatori e dei produttori
- Modelli per la concorrenzialità

Medicina

- Funzione di Bateman e serie geometriche per la modellizzazione dell'assunzione discreta, rispettivamente continua, di farmaci
- Capacità di pompaggio del cuore
- Legge di Hagen-Poiseuille per flussi laminari in vasi sanguinei
- Modello S-I-R (modello matematico per la propagazione di una malattia infettiva mortale oppure immunizzante)

Sport

- Linea di partenza della corsa dei 1'500 metri
- Ottimizzazione del tiro libero nella pallacanestro

Geometria			
Argomenti	**Contenuti orientati alla comprensione dei concetti (semantica)**	**Abilità algoritmiche orientate ai procedimenti (sintassi)**	**Approfondimenti orientati alla comprensione (esplorazione)**
Geometria elementare	• Triangoli, quadrilateri, cerchio, congruenza e similitudine, teoremi di Talete e Pitagora, angoli al centro e alla circonferenza • Ricavare e spiegare relazioni in situazioni geometriche • Trasformazioni (traslazione, rotazione, simmetria centrale e assiale, omotetia)	• Costruzioni con riga e compasso • Calcolo delle grandezze mancanti in figure geometriche	• Poligoni regolari • Ricavare formule per le aree • Dimostrare congruenze e similitudini di figure
Trigonometria	• Definizione delle funzioni trigonometriche • Gradi sessagesimali e radianti • Teoremi dei seni e del coseno	• Risoluzione di triangoli rettangoli e qualsiasi • Risoluzione di semplici equazioni riconducibili alla forma trig$(ax+b)=c$	• Riconoscere la relazione tra il grafico delle funzioni trigonometriche e la loro definizione nel cerchio trigonometrico • Relazioni algebriche tra le funzioni trigonometriche • Non-linearità (formule di addizione)
Rappresentazioni tridimensionali (prospettiche)	• Interpretazione di una rappresentazione prospettica	• Rappresentazione intuitiva (schizzo) di situazioni spaziali	

Geometria			
Geometria solida	• Volumi e superfici (cubo, parallelepipedo, prisma, piramide, tetraedro, ottaedro, cilindro, cono, sfera)		• Principio di Cavalieri
Geometria vettoriale nel piano e nello spazio	• Sistemi di riferimento e coordinate • Concetto di vettore • Collinearità, complanarità • Significato delle operazioni vettoriali elementari, del prodotto scalare, del prodotto vettoriale • Descrizione di una retta (nel piano e nello spazio) e di un piano per mezzo di equazioni parametriche e cartesiane	• Eseguire addizioni, sottrazioni e prodotti scalari algebricamente e geometricamente • Modulo di un vettore • Prodotto scalare e vettoriale • Risoluzione di problemi di incidenza	• Risolvere problemi più complessi con strategie differenti • Determinazione algebrica di punti mancanti in una figura geometrica nel piano o nello spazio • Calcolo di volumi e aree

Tempo previsto

Da 30 a 40 settimane (con 4 ore-lezione settimanali)

Temi opzionali di approfondimento

- Sezione aurea
- Oscillazioni armoniche
- Solidi platonici
- Formula di Eulero per i poliedri
- Rette e piani tangenti
- Prodotto misto
- Invarianti nelle proiezioni parallele
- Cenni sulla prospettiva centrale
- Affinità

Collegamenti con altri ambiti della matematica

Analisi

- La distanza punto-retta come problema di ottimizzazione

Algebra

- Posizioni reciproche di rette e piani e sistemi di equazioni lineari
- Intersezioni di rette e circonferenze (risp. superfici sferiche) ed equazioni quadratiche

Applicazioni e collegamenti con altri ambiti disciplinari

Fisica

- Somma di forze e di velocità
- Prodotto scalare e lavoro
- Prodotto vettoriale e momento di una forza
- Forza di Lorentz
- Tempo e vettore-velocità nell'equazione di una retta
- Oscillazioni armoniche

Geografia

- Topografia

Tecnica

- Piani architettonici

Astronomia

- Storia della misura di distanze: raggio della Terra (Eratostene), distanza Terra-Luna (Aristarco di Samo, Lalande-Lacaille), diametri e distanze di Sole e Luna (Aristarco)
- Definizione di parsec

Stocastica			
Argomenti	**Contenuti orientati alla comprensione dei concetti (semantica)**	**Abilità algoritmiche orientate ai procedimenti (sintassi)**	**Approfondimenti orientati alla comprensione (esplorazione)**
Statistica descrittiva	• Rappresentazioni grafiche e numeriche (istogrammi, boxplot, diagrammi di dispersione) • Indici di posizione e di variazione (media aritmetica, mediana, deviazione standard, differenze quantili) • Regressione lineare • Relazione tra diagramma di dispersione e correlazione	• Calcoli / Grafici con strumenti informatici	• Riconoscere rappresentazioni ingannevoli e scorrette • Differenza tra correlazione e relazione causale
Esperimenti aleatori a uno o più stadi (prove	• Esperimento aleatorio	• Calcoli nel modello di	• Esempi di

Stocastica			
successive)	• Spazio degli eventi o campionario finito • Concetto(i) di probabilità • Additività della probabilità • Indipendenza stocastica • Probabilità condizionata	Laplace (calcolo combinatorio) • Uso di $P(A^C) = 1-P(A)$ • Rappresentazione di esperimenti casuali a più stadi con diagrammi ad albero o tabelle • Applicazione delle regole del prodotto e della somma (regola del cammino)	paradossi • Probabilità geometriche • Differenza tra successioni binarie casuali e costruite (lancio di monete) • Formula di Bayes (inversione del cammino nel diagramma ad albero)
Variabili aleatorie e speranza matematica, distribuzione binomiale	• Variabile aleatoria, speranza matematica (interpretazione "a lungo termine") • Gioco equo • Distribuzione binomiale (dove si presenta, requisiti)	• Calcolo di esempi • Probabilità di intervalli $[k_1,k_2]$ per la distribuzione binomiale (calcolo con la calcolatrice o con la regola del sigma) • Uso del simbolo di sommatoria	• Contraddizione apparente tra l'assenza di memoria del caso e l'interpretazione "a lungo termine" • Forma e ampiezza della dispersione della distribuzione binomiale in funzione di n e p • Differenza tra distribuzione binomiale e ipergeometrica
Statistica inferenziale	• Differenze tra popolazione e campione; tra probabilità e frequenza relativa • Quali deviazioni si possono ragionevolmente ancora ritenere casuali?	• Regione di rifiuto per il test binomiale con ipotesi nulla puntuale o bilaterale (determinata con la calcolatrice o con la regola del sigma)	• Specie degli errori nei test

Nel calcolo delle probabilità <u>non</u> si dovrebbero trattare solo modelli di Laplace.

Il calcolo combinatorio può essere trattato anche come capitolo a se stante; in particolar modo se s’intende collegarlo con ulteriori applicazioni (si veda la tabella seguente).

Calcolo combinatorio	• Principio di addizione • Principio di moltiplicazione	• Permutazioni, disposizioni e combinazioni • Fattoriale • Coefficienti binomiali	• Riconoscere i vari casi in differenti situazioni • Utilizzare differenti modalità di enumerazione • Calcoli ricorsivi

Tempo previsto

Da 25 a 30 settimane di 4 ore-lezione settimanali.

Temi opzionali di approfondimento

- Ruolo delle trasformazioni di variabili
- Test in medicina
- Paradosso di Simpson
- Distribuzione normale
- Indagini demoscopiche, formulari d’inchiesta (errori sistematici e casuali)
- Test dei segni
- Intervallo di confidenza per la distribuzione binomiale
- Crittoanalisi statistica

Collegamenti con altri ambiti

Algebra

- Teorema binomiale
- Scale logaritmiche
- Serie geometrica e tempo di attesa per il primo successo con il lancio di una moneta

Analisi

- Serie geometrica e tempo di attesa per il primo successo con il lancio di una moneta
- Distribuzioni di probabilità continue e calcolo integrale (densità di probabilità, funzione di ripartizione, speranza matematica, mediana)
- Regressione lineare come problema di ottimizzazione

Geometria

- Probabilità geometriche

Applicazioni e collegamenti con altri ambiti disciplinari

Fisica

- Decadimento radioattivo e distribuzione di Poisson, rispettivamente esponenziale
- Elaborazione statistica di dati sperimentali semplici (caduta libera, regressione)
- Fisica statistica e catene di Markov (modello di Ehrenfest, modelli di diffusione, entropia)

Biologia

- Ereditarietà (Leggi di Mendel, equilibrio di Hardy-Weinberg, modello di Wright-Fisher, gruppi sanguigni e la loro distribuzione in differenti luoghi geografici)
- Dinamica di popolazioni (processi di biforcazione, modelli stocastici preda-predatore)
- Metodi di cattura-marcatura-ricattura (metodo di Lincoln-Petersen)
- Test in medicina

Geografia

- Esempi dell'uso della statistica descrittiva (per esempio rappresentazione del clima in differenti luoghi della Terra)

Economia, politica

- Rappresentazioni grafiche, per esempio della distribuzione del benessere o del PIL in differenti nazioni, delle posizioni politiche di candidati e partiti

Informatica e tecnica

- Controlli della qualità e dell'affidabilità. Numeri (pseudo)-casuali (metodo di Monte Carlo)

Filosofia

- Esiste il caso?