



## JEUX AVEC LES CHIFFRES DES DÉVELOPPEMENTS DÉCIMAUX DE QUELQUES RATIONNELS

*Jean Luc Bovet, Auvergnier*

Notre merveilleuse manière d'écrire les nombres, due, dit-on, aux Indiens via les Arabes, présente en plus de son efficacité incontestable des aspects parfois étonnants. Certaines propriétés sont bien connues, d'autres peut-être un peu moins.

1. Je vous laisse déterminer les 6 premiers multiples du nombre 142857 ou les 12 de 076923 au cas où vous ne l'auriez jamais fait. Je ne vous ferai pas l'injure d'une démonstration du phénomène : calculez simplement le développement décimal de  $1/7$ ,  $2/7$ ... et de  $1/13$ ,  $2/13$ ... ; le reste coule de source.

2. (Pour simplifier l'écriture, je note  $0, \{142857\}$  pour  $0,142857142857\dots$ ).

Parmi les développements périodiques présentant un nombre pair de chiffres dans la période, certains ont la propriété suivante : la deuxième moitié de la période est le complément à 9 de la première moitié : par exemple  $1/7 = 0, \{142857\}$ .

$$1 + 8 = 4 + 5 = 2 + 7 = 9$$

Il en va ainsi chaque fois que le développement est issu de la division par un nombre premier ou par une puissance de celui-ci.

$$1/49 = 0, \{020408163265306122448979591836734693877551\}$$

Démonstrons la chose avec une période de 6 chiffres, la généralisation étant immédiate.

Soit  $1/p = 0, \{abcdef\}$ . Alors  $10^6/p = abcdef + 1/p$ , puis  $(10^6 - 1)/p = abcdef$  : entier.

Donc  $p$  divise  $10^6 - 1$  donc  $p$  divise  $(10^3 - 1)(10^3 + 1)$ .

Or si  $p$  (premier) divise un produit, il divise l'un des facteurs. Il ne saurait diviser le premier : la période serait alors de longueur 3 (ou moins) et non 6 ;  $p$  divise donc  $10^3 + 1$ .

$(10^3 + 1)/p$  s'écrit  $abc, \{defabc\} + 0, \{abcdef\}$  c'est-à-dire  $abc, \{(a+d)(b+e)(c+f)\}$  et il est entier. Donc ou bien  $a + d = b + e = c + f = 0$ , (ce qui n'est pas possible), ou bien ces trois sommes valent chacune 9, ce qu'il fallait démontrer.

Si nous avons  $p^k$  au dénominateur, les facteurs premiers de  $p^k$ , tous égaux à  $p$  ne sauraient diviser simultanément  $10^3 + 1$  et  $10^3 - 1$  qui sont impairs et qui diffèrent de 2.

3. La contemplation de certains développements décimaux crée parfois des états d'âme :

A) dans le début de la période

$$1/49 = 0, \{02\ 04\ 08\ 16\ 32\ 65\dots\}.$$

$$1/19 = 0, \{0526315789\dots\}$$
 ou plus visiblement

$$1/199 = 0, \{005\ 025\ 125\ 628\dots\}$$
 où le report des retenues ne trouble la vision que plus tard.

Quelle est la raison de l'apparition des puissances de 2 ou de 5 dans ces développements ?

B) dans la fin de la période

$$1/19 = 0, \{ \dots 4736 8 4 2 1 \} \text{ ou plus visiblement dans}$$

$$1/199 = 0, \{ \dots 728 64 32 16 08 04 02 01 \}$$

$$1/29 = 0, \{ \dots 4137 9 3 1 \} \text{ ou plus visiblement dans}$$

$$1/299 = 0, \{ \dots 143 81 27 09 03 01 \}$$

$$1/399 = 0, \{ \dots 656 64 16 04 01 \}$$

Pourquoi les puissances de 2, 3 ou 4 interviennent-elles dans ces développements ?

C) dans le début

$$1/89 = 0, \{ 01123595505 \dots \} \text{ ou plus visiblement dans}$$

$$1/998999 = 0, \{ 000 001 001 002 003 005 008 013 021 034 055 089 144 233 377 611 \dots \}$$

Que vient faire ici la suite de Fibonacci ?

D) dans la fin

$$1/109 = 0, \{ \dots 23853211 \} \text{ ou plus visiblement dans}$$

$$1/10099 = 0, \{ \dots 444 89 55 34 21 13 08 05 03 02 01 01 \}$$

Encore une intervention de Fibonacci !

\* \* \*

A) On sait que  $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots$  Faisons  $x = \frac{1}{20}$  et enlevons 1 de chaque côté

Il vient  $\frac{1}{19} = \frac{1}{20} + \frac{1}{20^2} + \dots$

0 . 0 5	
0 . 0 0 2 5	
0 . 0 0 0 1 2 5	
0 . 0 0 0 0 0 6 2 5	
0 . 0 0 0 0 0 0 3 1 2 5	
0 . 0 0 0 0 0 0 0 1 5 6 2 5	
0 . 0 0 0 0 0 0 0 0 0 7 8 1 2 5	
0 . 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 3 9 0 6 2 5	
0 . 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 9 5 3 1 2 5	
0 . 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 9 7 6 5 6 2 5	
0 . 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 4 8 8 2 8 1 2 5	
0 . 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 2 4 4 1 4 0 6 2 5	
0 . 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 2 2 0 7 0 3 1 2 5	
0 . 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 6 1 0 3 5 1 5 6 2 5	
0 . 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 3 0 5 1 7 5 7 8 1 2 5	
0 . 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 5 2 5 8 7 8 9 0 6 2 5	
0 . 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 7 6 2 9 3 9 4 5 3 1 2 5	
0 . 0 5 2 6 3 1 5 7 8 9 4 7 3 6 8 4 2 1   0 5 2 6	

De même  $\frac{1}{49} = \frac{1}{50} + \frac{1}{50^2} + \dots$  d'où le développement en puissances de 2 ou de 5.



Remettons-le dans sa disposition habituelle :

0 0 1	1	a
0 0 0 1 1	1 1	b c
0 0 0 0 1 2 1	1 2 1	d e f
0 0 0 0 0 1 3 3 1	1 3 3 1	g h i j
0 0 0 0 0 0 1 4 6 4 1	1 4 6 4 1	k l m n o
0 0 0 0 0 0 0 1 5 10 10 5 1	1 5 10 10 5 1	p q r s t u
0 0 0 0 0 0 0 0 1 6 15 20 15 6 1	1 6 15 20 15 6 1	v w x y z A B

La somme  $1 + 6 + 5 + 1$  se présente alors en diagonale. Regardons-la avec les lettres :  $v = p (=1), q = k + l, m = h + i, j = f (=1)$ . Donc chaque diagonale est la somme des deux précédentes ce qui est la règle de Fibonacci.

D) A droite.

$$\frac{1}{109} = 0, \{009174311926605504587155963302752293577981651376146788 \\ 990825688073394495412844036697247706422018348623853211\}$$

Soit  $P$  le nombre qui s'écrit avec les 108 chiffres de la période de  $\frac{1}{109}$ . Comme précédemment,

$$P = \frac{10^{108} - 1}{109}$$

D'autre part,

$$S = 1 + 110 + 110^2 + \dots + 110^{107} = \frac{110^{108} - 1}{109} = 109^{-1} \cdot (11^{108} \cdot 10^{108} - 10^{108} + 10^{108} - 1) \\ = 109^{-1} \cdot (11^{108} - 1) \cdot 108 + P$$

Les 108 derniers chiffres de  $S$  sont donc ceux de  $P$ ,  $109^{-1} \cdot (11^{108} - 1)$  étant entier selon Fermat. Calculons  $S$

				1					1					a	
				1	1				1	1				b c	
				1	2	1			1	2	1			d e f	
				1	3	3	1		1	3	3	1		g h i j	
				1	4	6	4	1	1	4	6	4	1	k l m n o	
				1	5	10	10	5	1	1	5	10	10	5	p q r s t u

On reconnaît de nouveau le triangle de Pascal. De même qu'avant on voit que chaque diagonale est la somme des deux précédentes : règle de Fibonacci.

\* \* \*

### Remarques

1. La suite des décimales de la période de  $1/109$  recèle d'autres surprises. Pour la décaler, calculons  $21/109$  :

$$21/109 = 0, \{192660550458715596330275229357798165137614678899082568 \\ 807339449541284403669724770642201834862385321100917431\}.$$

On voit qu'à droite on n'a plus la suite de Fibonacci, mais celle de Lucas !

2. D'ailleurs, à partir de tous les chiffres précédés d'un chiffre plus grand, vers la gauche, on trouve une « supersuite » de Fibonacci. S'ils sont précédés d'un chiffre plus petit, il faut simplement leur ajouter 1.
3. La fréquence des différents chiffres est très constante : chacun intervient 11 fois sauf 0 et 9 qui interviennent 10 fois.
4. D'autre part cette suite a une propriété très remarquable (probabilité  $< 10^{-46}$  dans une suite aléatoire) : les 108 nombres formés par deux chiffres consécutifs (y compris le 108<sup>ème</sup> et le 1<sup>er</sup>) sont 00, 01, ..., 99, chacun 1 fois, sauf pour les doubles 11, 22, ..., 88 : chacun 2 fois. Cela ne saurait être dû au hasard, et je vois une explication a posteriori: si deux chiffres consécutifs (par exemple 21) se présentaient deux fois, la suite des décimales, à partir de ceux-ci, vers la gauche, serait identique et la période n'aurait pas 108 chiffres mais moins. En d'autres termes, 1/109 ne peut avoir la période maximale (108 chiffres) que si cette condition est remplie. Seuls 11 ... 88 peuvent exister 2 fois, une fois avec retenue, une fois sans. Remarquons que si les chiffres **a42** se suivent,  $a = 6$ . Si **a24**,  $a = 7$  (retenue). Si **abb0**,  $a = 2b$  (ou  $2b - 10$ ) alors que si **abb9**,  $a = 2b + 1$  (ou  $2b + 1 - 10$ ). On peut voir enfin que tous les 0 et tous les 9 sont «utilisés» pour suivre les doubles ou eux-mêmes. La suite contient donc toutes les suites de Fibonacci commençant par deux nombres d'un chiffre. Et y en a encore qui ne croient pas aux miracles !
5. Précisons enfin que les propriétés A, B, C et D sont valables dans n'importe quelle base. Voici quelques résultats :
- En base 7
 

$1/13 = 1/16 = 0, \{035245631421\}_7$	cf en base 10: 1/19
$1/41 = 1/56 = 0, \{011236326213520225065543034045314644161\}_7$	cf en base 10: 1/89
$1/55 = 1/106 = 0, \{00614403364220153211\}_7$	cf en base 10: 1/109
  - En base 12. (A et B : chiffres 10 et 11)
 

$1/23 = 1/1B = 0, \{06316948421\}_{12}$	cf en base 10: 1/19
$1/71 = 1/5B = 0, \{020408142854A997732650A1834691163061\}_{12}$	cf en base 10: 1/49
$1/131 = 1/AB = 0, \{0112359...78404491B1\}_{12}$	cf en base 10: 1/89
$1/155 = 1/10B = 0, \{00B1944B55...99BA1853211\}_{12}$	cf en base 10: 1/109
6. La propriété notée sous 4. est valable en base 2 et en base 6. (Mais pas dans les quelques autres bases que j'ai testées...). Il faut et il suffit pour cela que  $b^2 + b - 1$  soit premier et que son inverse soit de période maximale ( $b^2 + b - 2$  chiffres) dans la base b, mais cette remarque est bien loin de donner les bases où la propriété est vraie !
- En base 2,  $1/5 = 1/101 = 0, \{0011\}_2$   
 En base 6,  $1/41 = 1/105 = 0, \{0051335412440330234455042201431152253211\}_6$  ; tous les nombres de 2 chiffres de 00 à 55 apparaissent 1 fois sauf 11, 22, 33 et 44 qui apparaissent 2 fois.
7. On m'a signalé enfin que les nombres 109 et 89, qui présentent des propriétés « fibonaccien-nes » (donc des accointances avec le nombre d'or  $\varphi$ ), sont donnés par les polynômes  $b^2 + b - 1$  et  $b^2 - b - 1$  dont les zéros sont  $\varphi$  et  $-1/\varphi$  pour le premier, et pour le second  $-\varphi$  et  $1/\varphi$ . Coïncidences ?