CRM

Coordonnées barycentriques et hyperbole de Kiepert

Alexandre Junod, Lycée Denis-de-Rougemont (Neuchâtel), alexandre.junod@rpn.ch

Un triangle fournit de nombreux "points remarquables" (Clark Kimberling en a répertorié plus de 30'000 dans une liste). Beaucoup d'entre eux sont obtenus par des intersections de droites (centre de gravité, orthocentre, centres des cercles inscrit et circonscrit,…) qui peuvent découler de polygones auxiliaires construits sur les côtés du triangle (points de Napoléon, Fermat, Vecten,…). Nous avons présenté certains de ces derniers points dans le bulletin n°139 (*"Géométrie et nombres complexes"*) et cet article est né afin de généraliser la construction faite sur les côtés d'un triangle. Ceci nous mène à l'hyperbole de Kiepert et nous l'aborderons avec la notion de coordonnées barycentriques.

1 Coordonnées barycentriques

Dans le plan euclidien, on considère un triangle ABC et un point quelconque P.

1) Il existe alors de manière unique des nombres x, y et z dont la somme vaut 1 et tels que $\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$. Ce sont les *coordonnées barycentriques* de P et on note $P[x; y; z]$.
2) La droite passant par $P_1[x_1; y_1; z_1]$ et $P_2[x_2; y_2; z_2]$ est constituée des points $P[x; y; z]$ tels que $\det(\overrightarrow{OP_1}; \overrightarrow{OP_2}; \overrightarrow{OP}) = 0$, les trois vecteurs étant exprimés avec leurs composantes barycentriques.

Preuve. Exprimant le vecteur $\overrightarrow{AP}$ dans la base $\langle \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC} \rangle$, on peut trouver deux nombres uniques y et z tels que $\overrightarrow{AP} = y\overrightarrow{AB} + z\overrightarrow{AC}$. On démontre alors la première affirmation en utilisant la relation de Chasles. Pour la deuxième affirmation, on peut simplifier le déterminant en ajoutant les deux dernières lignes à la première puis en soustrayant la première colonne aux deux autres :

$$d = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x \\ y_1 & y_2 & y \\ z_1 & z_2 & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y_1 & y_2 & y \\ z_1 & z_2 & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ y_1 & y_2 - y_1 & y - y_1 \\ z_1 & z_2 - z_1 & z - z_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_2 - y_1 & y - y_1 \\ z_2 - z_1 & z - z_1 \end{vmatrix}$$

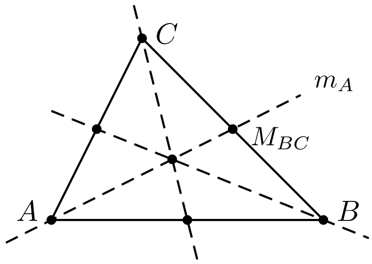
Comme y et z sont les composantes du vecteur $\overrightarrow{AP}$ dans la base $\langle \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC} \rangle$, on obtient simplement $d = \det(\overrightarrow{AP_2} - \overrightarrow{AP_1}; \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AP_1}) = \det(\overrightarrow{P_1P_2}; \overrightarrow{P_1P})$. Dire que ce déterminant est nul revient à dire que les vecteurs $\overrightarrow{P_1P_2}$ et $\overrightarrow{P_1P}$ sont proportionnels et donc que P est aligné avec P_1 et P_2. □

Nous considérons un triangle ABC et adoptons les notations usuelles pour la longueur des côtés (a, b et c) et la mesure des angles (α, β et γ). Nous notons $P[x; y; z]$ même lorsque la somme $x + y + z$ (supposée non nulle) ne vaut pas 1, en convenant que les coordonnées barycentriques de P doivent alors être normalisées (cela n'a aucune incidence sur l'équation barycentrique d'une droite donnée par deux points). Par exemple, si on multiplie chaque composante d'un point $P[a \cdot (\cdots); b \cdot (\cdots); c \cdot (\cdots)]$ par $\frac{\sin\alpha}{a} \left(= \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c} \right)$, on peut également écrire $P[\sin(\alpha) \cdot (\cdots); \sin(\beta) \cdot (\cdots); \sin(\gamma) \cdot (\cdots)]$.

Dans les raisonnements qui suivent, on peut établir les équations barycentriques des droites en développant un déterminant ou se contenter de vérifier que les droites indiquées passent bien par les points donnés par leurs coordonnées barycentriques.

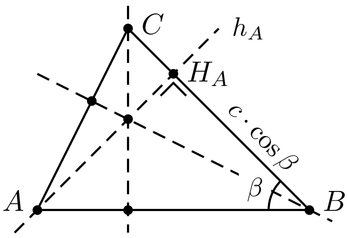
2 Médianes et centre de gravité

On a $A[1;0;0]$ et le milieu du côté BC est $M_{BC}\big[0;1;1\big]$. La droite m_A passant par A et M_{BC} a ainsi l'équation barycentrique $y = z$. Par permutation circulaire, on trouve les équations des autres médianes : $z = x$ pour m_B et $x = y$ pour m_C. Les trois médianes se coupent lorsque $x = y = z$, donc au point $G\big[1;1;1\big]$.



3 Hauteurs et orthocentre

Le pied de la hauteur issue du sommet A est le point H_A défini par la relation vectorielle



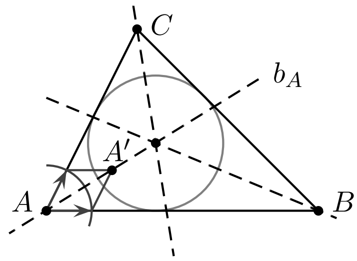
$$\begin{aligned}\overrightarrow{OH_A} &= \overrightarrow{OB} + \frac{c\cos\beta}{a}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OB} + \frac{c\cos\beta}{a}(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) \\ &= \left(1 - \frac{c\cos\beta}{a}\right)\overrightarrow{OB} + \left(\frac{c\cos\beta}{a}\right)\overrightarrow{OC}\end{aligned}$$

et comme $a - c\cos\beta = b\cos\gamma$, on a $H_A\left[0; \dfrac{b\cos\gamma}{a}; \dfrac{c\cos\beta}{a}\right]$ ou $H_A\,[0; b\cos\gamma; c\cos\beta]$.

La droite h_A passant par $A[1;0;0]$ et $H_A\,[0; b\cos\gamma; c\cos\beta]$ admet l'équation $b\cos(\gamma)z = c\cos(\beta)y$. Par permutation circulaire, on trouve les équations $c\cos(\alpha)x = a\cos(\gamma)z$ pour h_B et $a\cos(\beta)y = b\cos(\alpha)x$ pour h_C. Ces trois hauteurs se coupent en $H[a\cos(\beta)\cos(\gamma);\; b\cos(\alpha)\cos(\gamma);\; c\cos(\alpha)\cos(\beta)]$.

4 Bissectrices et centre du cercle inscrit

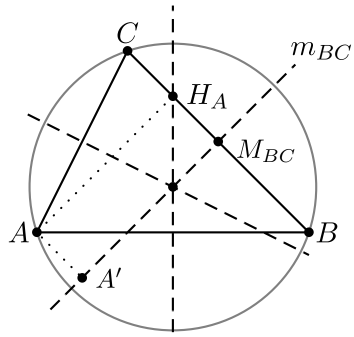
La bissectrice intérieure b_A au sommet $A[1;0;0]$ passe également par le point A' défini par la relation $\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{c}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{b}\overrightarrow{AC}$, donc $A'\Big[1 - \frac{1}{b} - \frac{1}{c}; \frac{1}{c}; \frac{1}{b}\Big]$. Son équation barycentrique est $\frac{z}{c} = \frac{y}{b}$ et par permutation circulaire, on trouve les équations $\frac{x}{a} = \frac{z}{c}$ pour b_B et $\frac{y}{b} = \frac{x}{a}$ pour b_C. Ces trois bissectrices se coupent en $I[a;b;c]$.



5 Médiatrices et centre du cercle circonscrit

La médiatrice m_{BC} du segment BC passe par $M_{BC}[0;1;1]$ et le point A' défini par la relation vectorielle

$$\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OM_{BC}} + \overrightarrow{H_AA} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} - \frac{1}{a}\begin{bmatrix}0\\ b\cos\gamma\\ c\cos\beta\end{bmatrix},$$



donc $A'\Big[1; \dfrac{1}{2} - \dfrac{b\cos\gamma}{a}; \dfrac{1}{2} - \dfrac{c\cos\beta}{a}\Big]$.

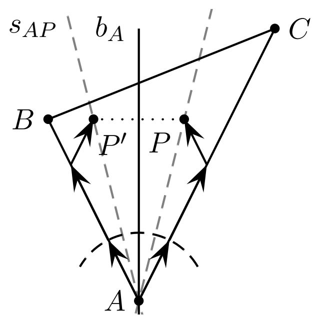
On trouve alors pour m_{BC} l'équation barycentrique $a(y - z) = x(c\cos\beta - b\cos\gamma)$, donc

$$\begin{aligned}a\cos\alpha(y - z) &= x(c\cos\alpha\cos\beta - b\cos\alpha\cos\gamma) \\ &= x((b - a\cos\gamma)\cos\beta - (c - a\cos\beta)\cos\gamma) \\ &= x(b\cos\beta - c\cos\gamma)\end{aligned}$$

et la médiatrice m_{BC} contient $\Omega[a\cos(\alpha); b\cos(\beta); c\cos(\gamma)]$. Ce point se trouve également sur les deux autres médiatrices dont les équations sont obtenues par permutation circulaire. Remarquons que l'on peut aussi écrire $\Omega[\sin(\alpha)\cos(\alpha); \sin(\beta)\cos(\beta); \sin(\gamma)\cos(\gamma)]$ ou $\Omega[\sin(2\alpha); \sin(2\beta); \sin(2\gamma)]$.

6 Conjugué isogonal

Etant donné un triangle ABC et un point P, on peut construire le symétrique de la droite AP par rapport à la bissectrice intérieure du triangle issue du sommet A. On note s_{AP} la droite obtenue et on construit de manière analogue les droites s_{BP} et s_{CP}. Si P ne se trouve pas sur le cercle circonscrit du triangle ABC, alors ces trois droites se coupent en un point $\overline{P}$ appelé *conjugué isogonal de P*.



Preuve. Considérons $P[x_0; y_0; z_0]$ avec $x_0 + y_0 + z_0 = s$. On a alors

$$\overrightarrow{AP} = \frac{y_0}{s}\overrightarrow{AB} + \frac{z_0}{s}\overrightarrow{AC} = \frac{c \cdot y_0}{s}\frac{\overrightarrow{AB}}{c} + \frac{b \cdot z_0}{s}\frac{\overrightarrow{AC}}{b}$$

et le point P' symétrique de P par rapport à la bissectrice b_A vérifie

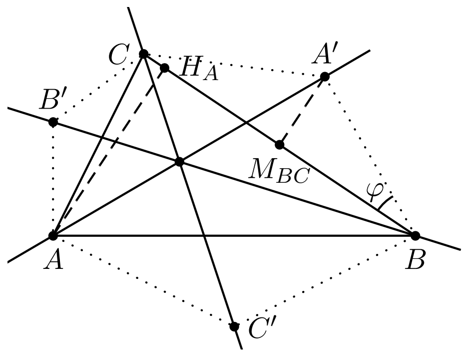
$$\overrightarrow{AP'} = \frac{b \cdot z_0}{s}\frac{\overrightarrow{AB}}{c} + \frac{c \cdot y_0}{s}\frac{\overrightarrow{AC}}{b} = \frac{b \cdot z_0}{c \cdot s}\overrightarrow{AB} + \frac{c \cdot y_0}{b \cdot s}\overrightarrow{AC},$$

donc $P'[\ldots; \frac{bz_0}{cs}; \frac{cy_0}{bs}]$ ou $P'[\ldots; b^2z_0; c^2y_0]$. La droite s_{AP} passant par $A[1;0;0]$ et P' admet l'équation barycentrique $b^2z_0z = c^2y_0y$. Par permutation circulaire, on trouve les équations $c^2x_0x = a^2z_0z$ et $a^2y_0y = b^2y_0y$ pour s_{BP} et s_{CP}. Ces trois droites se coupent en $\overline{P}[a^2y_0z_0; b^2x_0z_0; c^2x_0y_0]$. Un problème survient lorsque la somme des composantes barycentriques de $\overline{P}$ est nulle, c'est-à-dire lorsque le point P se trouve sur le cercle circonscrit (dont l'équation barycentrique est admise). $\square$

Exemples

- Le conjugué isogonal du centre de gravité $G[1;1;1]$ est $\overline{G}[a^2; b^2; c^2]$, appelé *point de Lemoine*. C'est l'intersection des "symédianes", droites symétriques des médianes par rapport aux bissectrices intérieures. On peut aussi écrire $\overline{G}[a\sin(\alpha); b\sin(\beta); c\sin(\gamma)]$ ou $\overline{G}[(\sin\alpha)^2; (\sin\beta)^2; (\sin\gamma)^2]$.
- Le centre du cercle inscrit est son propre conjugué isogonal.
- L'orthocentre et le centre du cercle circonscrit sont conjugués isogonaux réciproques.
- La conjuguaison isogonale est une involution : $\overline{\overline{P}} = P$ si P n'est ni sur le cercle circonscrit ni aligné avec deux sommets du triangle.

7 Hyperbole de Kiepert



On construit trois triangles isocèles externes (ou internes) semblables sur les côtés d'un triangle ABC et on note A' (resp. B' et C') le nouveau sommet du triangle isocèle de base BC (resp. CA et AB). Nous allons montrer que les droites AA', BB' et CC' sont concourantes.

Preuve. On pose $\lambda = \tan(\varphi)$ et on considère le point M_{BC}, milieu du côté BC, ainsi que le point H_A, pied de la hauteur issue du sommet A. Les vecteurs $\overrightarrow{M_{BC}A'}$ et $\overrightarrow{AH_A}$ sont colinéaires, de normes respectives $\dfrac{\lambda a}{2}$ et $b\sin(\gamma)$. On en déduit que

$$\overrightarrow{OA'} \;=\; \overrightarrow{OM_{BC}} + \frac{\lambda a}{2b\sin\gamma}\overrightarrow{AH_A} \;=\; \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} + \frac{\lambda a}{2b\sin\gamma}(\overrightarrow{OH_A} - \overrightarrow{OA}),$$

donc en passant aux composantes :

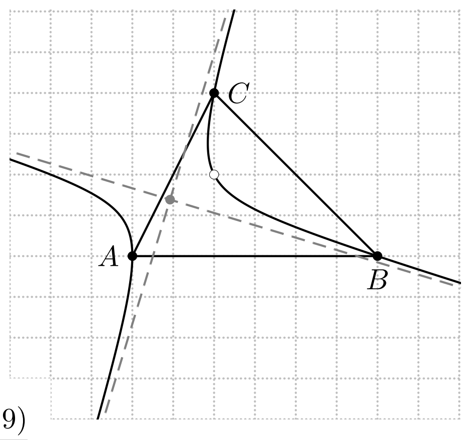
$$\overrightarrow{OA'} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} + \frac{\lambda a}{2b\sin\gamma}\left(\frac{1}{a}\begin{bmatrix}0\\ b\cos\gamma\\ c\cos\beta\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right) \;=\; \frac{1}{2b\sin\gamma}\begin{bmatrix}-\lambda a\\ b(\sin\gamma+\lambda\cos\gamma)\\ b\sin\gamma+\lambda c\cos\beta\end{bmatrix}.$$

Comme $b\sin\gamma = c\sin\beta$ selon le théorème du sinus, on trouve finalement $\overrightarrow{OA'} \;=\; \dfrac{1}{2b\sin\gamma}\begin{bmatrix}-\lambda a\\ b\,\mathrm{m}_\lambda(\gamma)\\ c\,\mathrm{m}_\lambda(\beta)\end{bmatrix}$ avec la notation $\mathrm{m}_\lambda(x) = \sin(x) + \lambda\cos(x)$. La droite AA' admet alors l'équation barycentrique $c\,\mathrm{m}_\lambda(\beta)y = b\,\mathrm{m}_\lambda(\gamma)z$. Par permutation circulaire, on obtient l'équation $a\,\mathrm{m}_\lambda(\gamma)z = c\,\mathrm{m}_\lambda(\alpha)y$ pour la droite (BB') et $b\,\mathrm{m}_\lambda(\alpha)x = a\,\mathrm{m}_\lambda(\beta)z$ pour la droite (CC'). On vérifie facilement que ces trois droites se coupent en $P_\lambda\big[a\,\mathrm{m}_\lambda(\beta)\,\mathrm{m}_\lambda(\gamma);\; b\,\mathrm{m}_\lambda(\alpha)\,\mathrm{m}_\lambda(\gamma);\; c\,\mathrm{m}_\lambda(\alpha)\,\mathrm{m}_\lambda(\beta)\big]$. $\square$

Remarques

- Si le triangle ABC est équilatéral, tous les points P_λ coïncident avec le centre de gravité.
- Si le triangle est isocèle non équilatéral, les points P_λ constituent l'axe de symétrie du triangle privé de son orthocentre.
- Si le triangle est scalène, l'ensemble des points P_λ contient les sommets A, B et C (considérer $\varphi \in \{-\alpha, -\beta, -\gamma\}$), le centre de gravité G ($\varphi = 0°$), les points de Vecten ($\varphi = \pm 45°$) et de Fermat ($\varphi = \pm 60°$). L'orthocentre est obtenu comme cas limite lorsque $\lambda \to \pm\infty$.
- Le conjugué isogonal de P_λ est $Q_\lambda[a\,\mathrm{m}_\lambda(\alpha); b\,\mathrm{m}_\lambda(\beta); c\,\mathrm{m}_\lambda(\gamma)]$, il est aligné avec le point de Lemoine $L[a\sin\alpha; b\sin\beta; c\sin\gamma]$ et le centre du cercle circonscrit $\Omega[a\cos\alpha; b\cos\beta; c\cos\gamma]$ (ces points sont différents si le triangle n'est pas équilatéral). La droite $(L\Omega)$, appelée *axe de Brocard*, a l'équation $bc\sin(\beta-\gamma)x + ca\sin(\gamma-\alpha)y + ab\sin(\alpha-\beta)z = 0$. Comme $Q_\lambda[a^2yz; b^2xz; c^2xy]$ la vérifie, $P_\lambda[x;y;z]$ vérifie $a\sin(\beta-\gamma)yz + b\sin(\gamma-\alpha)zx + c\sin(\alpha-\beta)yx = 0$. Cette équation est celle d'une hyperbole équilatère (si le triangle n'est pas isocèle) découverte par Ludwig Kiepert en 1869.

Exemple



Dans l'illustration ci-contre, on a les sommets $A(0;0)$, $B(6;0)$ et $C(2;4)$. On peut calculer la longueur des côtés ($a = 4\sqrt{2}$, $b = 2\sqrt{5}$ et $c = 6$), ainsi que le sinus et le cosinus de chaque angle. Pour résumer, on trouve

$$m_\lambda(\alpha) = \frac{2+\lambda}{\sqrt{5}}, \quad m_\lambda(\beta) = \frac{1+\lambda}{\sqrt{2}}, \quad m_\lambda(\gamma) = \frac{3+\lambda}{\sqrt{10}}.$$

On peut ensuite établir

$$am_\lambda(\beta)m_\lambda(\gamma) + bm_\lambda(\alpha)m_\lambda(\gamma) + cm_\lambda(\alpha)m_\lambda(\beta) = \frac{4(3\lambda^2+11\lambda+9)}{\sqrt{10}}$$

et les équations paramétriques de l'hyperbole de Kiepert : $x = \dfrac{6(2+\lambda)^2}{3\lambda^2+11\lambda+9}$, $y = \dfrac{6(2+\lambda)(1+\lambda)}{3\lambda^2+11\lambda+9}$.

En considérant la limite lorsque $\lambda \to \pm\infty$, on trouve l'orthocentre $H(2;2)$. Les asymptotes ont des équations cartésiennes $y = mx+h$ avec $m = \lim(y(\lambda)/x(\lambda))$ et $h = \lim(y(\lambda)-mx(\lambda))$, les limites étant prises lorsque λ tend vers une solution de l'équation $3\lambda^2 + 11\lambda + 9 = 0$. On trouve $y = \frac{3+\sqrt{13}}{2}x - \frac{6\sqrt{13}}{13}$ et $y = \frac{3-\sqrt{13}}{2}x + \frac{6\sqrt{13}}{13}$. Ces asymptotes se coupent au point $S\left(\frac{12}{13}; \frac{18}{13}\right)$.

En translatant le point $(x(\lambda); y(\lambda))$ selon le vecteur $\overrightarrow{SO}$ et en le faisant tourner autour de l'origine selon l'angle $\varphi = -\arctan\left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right)$, on obtient un point $(\tilde{x}(\lambda); \tilde{y}(\lambda))$ tel que $\tilde{x} \cdot \tilde{y} = \frac{36}{13\sqrt{13}}$. Ceci montre que les points $(\tilde{x}(\lambda); \tilde{y}(\lambda))$, et donc $(x(\lambda); y(\lambda))$, se trouvent bien sur une hyperbole équilatère.

Mathematica

Les calculs étant assez fastidieux, on peut traiter tout autre exemple avec le code Mathematica suivant.

Sommets A, B et C du triangle

```
{sA, sB, sC} = {{0, 0}, {2, 4}, {6, 0}};
```

Longueurs des côtés du triangle ABC

```
{a, b, c} = Simplify[Map[Norm, {sB - sC, sC - sA, sA - sB}]]
```

Sinus et cosinus de chaque angle x, synthétisés par $mx = \sin(x) + t\cos(x)$

```
cosa = (b^2 + c^2 - a^2) / (2 * b * c);
cosb = (c^2 + a^2 - b^2) / (2 * c * a);
cosc = (a^2 + b^2 - c^2) / (2 * a * b);
{sina, sinb, sinc} = Sqrt[1 - {cosa, cosb, cosc}^2];
{ma, mb, mc} = Simplify[{sina, sinb, sinc} + t {cosa, cosb, cosc}]
```

Equation et dessin de l'hyperbole

```
somme = Simplify[a * mb * mc + b * ma * mc + c * ma * mb];
{x[t_], y[t_]} = Simplify[(a*mb*mc*sA + b*ma*mc*sB + c*ma*mb*sC) / somme]
ParametricPlot[{x[t], y[t]}, {t, -10, 10}, PlotRange -> {-5, 5}]
```

Asymptotes (d'équations cartésiennes $y = m_1x + h_1$ et $y = m_2x + h_2$)

```
{t1, t2} = Simplify[Flatten[t /. Solve[somme == 0, t]]];
{m1, m2} = Limit[y[t]/x[t], {t -> t1, t -> t2}];
h1 = Limit[y[t] - m1 * x[t], t -> t1];
h2 = Limit[y[t] - m2 * x[t], t -> t2];
FullSimplify[{m1 * x + h1, m2 * x + h2}]
```

Centre de symétrie $(x_s; y_s)$

```
{xs, ys} = Simplify[{h2 - h1, m1 * h2 - m2 * h1} / (m1 - m2)]
```

Hyperbole rectifiée (recentrée et tournée pour ramener la deuxième asymptote sur l'axe Ox)

```
angle = -ArcTan[m2];
xn[t_] = Simplify[Cos[angle](x[t] - xs) - Sin[angle](y[t] - ys)]
yn[t_] = Simplify[Sin[angle](x[t] - xs) + Cos[angle](y[t] - ys)]
```

Preuve que la courbe (rectifiée) est bien sur une hyperbole (si le résultat est une constante)

```
FullSimplify[xn[t] * yn[t]]
```