Quelques résultats historiques sur le produit vectoriel

Christian Aebi, Collège Calvin, christian.aebi@edu.ge.ch

Le but de cette note est d'exposer quelques propriétés et applications du produit vectoriel qui jalonnent l'histoire de la géométrie vectorielle, et qui permettent d'établir un résultat clé de Jacobi.

Si historiquement on associe généralement l'apparition du produit vectoriel avec celle de la naissance des quaternions, et donc à W. R. Hamilton (1843), il est à noter que ses premiers "balbutiements algébriques" figurent déjà chez J. L. Lagrange, plus d'un demi-siècle avant. En particulier, ce dernier relie dans une formule la norme, le produit vectoriel et le produit scalaire entre eux.

L'identité de Lagrange (1773)[1]. *Si $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont des vecteurs de $\mathbb{R}^3$, $\vec{a} \times \vec{b}$ leur produit vectoriel, $\vec{a} \cdot \vec{b}$ leur produit scalaire et $|\ldots|$ la norme, alors*

$$|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 = |\vec{a} \times \vec{b}|^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2.$$

Démonstration. Par un calcul direct, on a

$$\begin{aligned} |\vec{a} \times \vec{b}|^2 &= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \\ &= a_1^2b_2^2 + a_1^2b_3^2 + a_2^2b_1^2 + a_2b_3^2 + a_3^2b_1^2 + a_3^2b_2^2 - 2(a_1a_2b_1b_2 + a_1a_3b_1b_3 + a_2a_3b_2b_3) \\ &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2. \end{aligned}$$

□

En fait, cette identité est une sorte de généralisation de celle de Diophante (dénommée parfois aussi de Brahmagupta-Fibonacci)

$$(a_1^2 + a_2^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2) = (a_1b_1 - a_2b_2)^2 + (a_1b_2 + a_2b_1)^2,$$

qui est à mettre en relation avec les nombres complexes : *le produit des carrés des modules égale le module du produit au carré*,

$$|a_1 + ia_2|^2 \cdot |b_1 + ib_2|^2 = |(a_1 + ia_2)(b_1 + ib_2)|^2.$$

L'identité de Lagrange permet de démontrer un joli résultat relativement peu connu dû à Bretschneider.

La formule de Bretschneider (1842)[2]. *Si $ABCD$ est un quadrilatère convexe d'aire K dont les côtés consécutifs mesurent a, b, c, d et les diagonales p, q, alors*

$$16K^2 = 4p^2q^2 - (b^2 - a^2 + d^2 - c^2)^2.$$

Démonstration. Posons $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{CD} = \vec{c}$ et $\overrightarrow{DA} = \vec{d}$ et notons que $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$.

L'observation de la figure ci-dessous permet de déduire que $2K$ n'est autre que $|\vec{p} \times \vec{q}|$. D'où

$$\begin{aligned} 16K^2 = 4|\vec{p} \times \vec{q}|^2 = 4p^2q^2 - 4\left((\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{b} + \vec{c})\right)^2 &= 4p^2q^2 - 4\left(\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) + \vec{b} \cdot (\vec{b} + \vec{c})\right)^2 \\ = 4p^2q^2 - 4\left(\vec{a} \cdot (-\vec{a} - \vec{d}) + b^2 + \vec{b} \cdot \vec{c}\right)^2 &= 4p^2q^2 - 4(-a^2 + b^2 - \vec{a} \cdot \vec{d} + \vec{b} \cdot \vec{c})^2 \end{aligned}$$

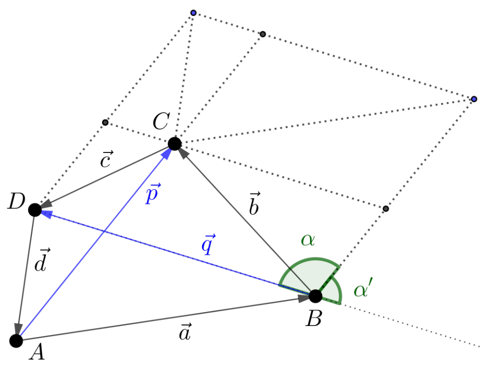

Figure 1 – Illustration de la formule de Bretschneider

Pour conclure, il suffit d'observer que

$$2(\vec{a}\cdot\vec{d}-\vec{b}\cdot\vec{c}) = (\vec{a}+\vec{d})\cdot(\vec{a}+\vec{d}) - (\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{b}+\vec{c}) - a^2 - d^2 + b^2 + c^2 = b^2 - a^2 - d^2 + c^2.$$

□

Remarque. Si on suppose en plus que le quadrilatère $ABCD$ est inscriptible dans un cercle alors en appliquant le théorème de Ptolémée, $pq = ac + bd$, on obtient la formule de Brahmagupta :

$$16K^2 = (a-b+c+d)(a+b+c-d)(-a+b+c+d)(a+b-c+d).$$

En effet, en substituant pq par $ac+bd$ on a

$$\begin{aligned}16K^2 &= 4(ac+bd)^2 - (b^2-a^2+d^2-c^2)^2\\ &= (2ac+2bd-b^2+a^2-d^2+c^2)(2ac+2bd+b^2-a^2+d^2-c^2)\\ &= ((a+c)^2-(b-d)^2)((b+d)^2-(a-c)^2)\\ &= (a-b+c+d)(a+b+c-d)(-a+b+c+d)(a+b-c+d).\end{aligned}$$

Une autre relation, attribuée aussi à Lagrange, relie un produit vectoriel de trois vecteurs à une différence de deux vecteurs pondérée par des produits scalaires.

Lemme. $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}$

Démonstration. Par un calcul direct, on obtient :

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = \begin{pmatrix}a_2b_3-a_3b_2\\ a_3b_1-a_1b_3\\ a_1b_2-a_2b_1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\\ c_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(a_3b_1-a_1b_3)c_3-(a_1b_2-a_2b_1)c_2\\ (a_1b_2-a_2b_1)c_1-(a_2b_3-a_3b_2)c_3\\ (a_2b_3-a_3b_2)c_2-(a_3b_1-a_1b_3)c_1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}b_1(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)-a_1(b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3)\\ b_2(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)-a_2(b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3)\\ b_3(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)-a_3(b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3)\end{pmatrix} = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}.$$

□

Comme corollaire, déduisons le résultat clé dû à C. G. J. Jacobi qui aujourd'hui encore s'illustre de plusieurs manières comme montré à la fin de l'article.

Identité de Jacobi (circa 1840). $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} + (\vec{b}\times\vec{c})\times\vec{a} + (\vec{c}\times\vec{a})\times\vec{b} = \vec{0}$.

Démonstration. Appliquons trois fois le lemme précédent

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} + (\vec{b}\times\vec{c})\times\vec{a} + (\vec{c}\times\vec{a})\times\vec{b} = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a} + (\vec{b}\cdot\vec{a})\vec{c} - (\vec{c}\cdot\vec{a})\vec{b} + (\vec{c}\cdot\vec{b})\vec{a} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c} = \vec{0}$$

□

Applications surprenantes et modernes de l'identité de Jacobi

Le résultat qui suit n'a pas été repéré dans la littérature classique.

Identité de Jacobi généralisée. *Si a, b, c, d sont quatre vecteurs quelconques de $\mathbb{R}^3$ alors*

$$\vec{a}\times((\vec{b}-\vec{c})\times(\vec{d}-\vec{c}))-\vec{b}\times((\vec{c}-\vec{d})\times(\vec{a}-\vec{d}))+\vec{c}\times((\vec{d}-\vec{a})\times(\vec{b}-\vec{a}))-\vec{d}\times((\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{c}-\vec{b}))=\vec{0} \tag{1}$$

Démonstration. En effet, en développant le produit de chaque terme, ligne par ligne on a

$$\begin{gathered}
\color{red}{\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{d})}-\color{green}{\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})}-\color{blue}{\vec{a}\times(\vec{c}\times\vec{d})}\\
-\color{green}{\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a})}+\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{d})+\color{red}{\vec{b}\times(\vec{d}\times\vec{a})}\\
+\vec{c}\times(\vec{d}\times\vec{b})-\color{blue}{\vec{c}\times(\vec{d}\times\vec{a})}-\color{green}{\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})}\\
-\color{blue}{\vec{d}\times(\vec{a}\times\vec{c})}+\color{red}{\vec{d}\times(\vec{a}\times\vec{b})}+\vec{d}\times(\vec{b}\times\vec{c}),
\end{gathered}$$

qui s'annule en appliquant l'identité de Jacobi sur les termes de même couleur. □

Comme conséquence, déduisons un autre résultat plus moderne [3]. Soit i, j, k la base naturelle de $\mathbb{R}^3$ d'origine O, $ABCD$ un quadrilatère appartenant au plan $O_{i,j}$, dont les vecteurs positions sont notés $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$. Posons Δ_X, l'aire du triangle opposé au sommet X. Par exemple, $\Delta_A = \text{aire}(BCD)$, comme illustré ci-dessous.

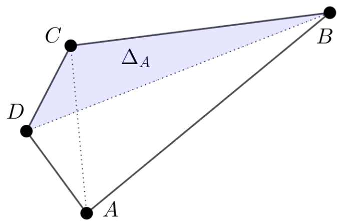

Figure 2 – Le quadrilatère $ABCD$ et l'illustration de Δ_A.

Corollaire. *Sous les hypothèses ci-dessus on a*

$$\Delta_A\,\vec{a}-\Delta_B\,\vec{b}+\Delta_C\,\vec{c}-\Delta_D\,\vec{d}=\vec{0}. \tag{2}$$

Démonstration. L'interprétation géométrique du produit vectoriel permet de voir que pour chaque terme respectif des sommes (1) et (2) on a par exemple,

$$\vec{a}\times((\vec{b}-\vec{c})\times(\vec{d}-\vec{c}))=R(H(\Delta_A\,\vec{a})),$$

où H est une homothétie de rapport 2 et R est une rotation d'angle $+\frac{\pi}{2}$ dans le plan $O_{i,j}$, les deux transformations étant centrées en O. □

Références

[1] J. L. Lagrange, *Solutions analytiques de quelques problèmes sur les pyramides triangulaires.* Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale de Berlin, 1773 ; Oeuvres de Lagrange, vol. 3, pp. 661-692, Gauthier-Villars, Paris, 1867.

[2] `https://mathworld.wolfram.com/BretschneidersFormula.html`

[3] C. Aebi et G. Cairns, A vector identity for quadrilaterals, to appear in *College Math. J., preprint available at* `https://arxiv.org/abs/2106.11860`.