La suite de Tribonacci

Christophe Bolle, Lycée Blaise-Cendrars (La Chaux-de-Fonds), christophe.bolle@rpn.ch

Il s'agit d'une traduction de l'article écrit par Hans Ulrich Keller (hukkeller@bluewin.ch), publié dans le numéro 145 (Janvier 2021) du bulletin de la SSPMP. Traduction effectuée avec l'aide de www.DeepL.com/Translator, version gratuite.

1 Définition

La suite de Tribonacci est familière à certains mathématiciens et commence par les nombres

$$0, 1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, 81, ...$$

La définition par récurrence de la suite de Tribonacci est :

$$\begin{cases} T(0) = 0, \quad T(1) = 1, \quad T(2) = 1, \\ T(n) = T(n-1) + T(n-2) + T(n-3) \end{cases}$$

Comme pour la suite de Fibonacci, il est possible d'étendre cette suite à des valeurs négatives de n :

n :	$\dots$	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	$\dots$
$T(n)$:	$\dots$	-3	2	0	-1	1	0	0	1	1	2	4	7	13	24	$\dots$

On peut alors se demander s'il existe une définition explicite du n-ième terme de la suite de Tribonacci, c'est-à-dire une formule analogue à la formule de Binet $F(n) = \frac{\varphi^n - \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^n}{\sqrt{5}}$ pour la suite de Fibonacci $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, ...$

2 Formule de Binet

Pour établir une formule pour la suite de Tribonacci, il est utile d'examiner la manière dont on détermine la formule de Binet pour le n-ième nombre de la suite de Fibonacci. Rappelons la définition par récurrence de cette suite :

$$\begin{cases} F(0) = 0, \quad F(1) = 1, \\ F(n) = F(n-1) + F(n-2) \end{cases}$$

L'étape la plus importante est l'utilisation d'une fonction exponentielle : $F(n) = a^{n+2}$
En utilisant la relation de récurrence, on obtient $a^{n+2} = a^{n+1} + a^n$.
Puis, en divisant par a^n, on obtient l'équation $a^2 = a + 1$.

Cette équation caractéristique admet les deux solutions $a_0 = \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1{,}618$, qui est égale au nombre d'or, et $a_1 = -\frac{1}{\varphi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \cong -0{,}618$.

Ainsi, aussi bien la suite $\left(a_0^0, a_0^1, a_0^2, ...\right)$ que la suite $\left(a_1^0, a_1^1, a_1^2, ...\right)$ satisfont la relation de récurrence de la suite de Fibonacci. Et donc, toute combinaison linéaire telle que la suite

$$\left(\frac{a_0^0}{u} + \frac{a_1^0}{v}, \frac{a_0^1}{u} + \frac{a_1^1}{v}, \frac{a_0^2}{u} + \frac{a_1^2}{v}, ...\right) \qquad \text{avec } u, v \in \mathbb{R}^*$$

satisfait également la propriété que chaque terme de la suite est la somme de ses deux prédécesseurs.

La formule qui donne le terme général de la suite de Fibonacci doit donc être égale au terme $F(n) = \frac{a_0^n}{u} + \frac{a_1^n}{v}$. L'insertion des conditions initiales $F(0) = 0$ et $F(1) = 1$ conduit immédiatement à $u = \sqrt{5}$ et $v = -\sqrt{5}$, et donc exactement à la formule de Binet déjà mentionnée ci-dessus :

$$F(n) = \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}} + \frac{\left(-\frac{1}{\varphi}\right)^n}{-\sqrt{5}} = \frac{\varphi^n - \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

Il convient de noter que la limite $\lim_{n\to\infty} \frac{F(n+1)}{F(n)}$ est égale au nombre d'or φ, et que les nombres de Fibonacci peuvent également être trouvés en utilisant la fonction génératrice suivante :

$$\frac{x}{1-x-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} F(n) \cdot x^n \qquad \left(\text{avec } |x| < r = \frac{1}{\varphi}\right)$$

3 Extension à la suite de Tribonacci

Utilisons la même approche pour la suite de Tribonacci, et posons $T(n) = a^{n+3}$.
En utilisant la relation de récurrence pour $T(n)$, on obtient :

$$a^{n+3} = a^{n+2} + a^{n+1} + a^n \quad \text{, ou après division par } a^n : \quad a^3 = a^2 + a + 1$$

Cette équation caractéristique est ici cubique et possède une seule solution réelle $a_0 \cong 1{,}8393$, également appelée constante de Tribonacci (et parfois nombre d'argent). Les deux autres solutions sont $a_1 \cong -0{,}4196 + 0{,}6063i$ et $a_2 \cong -0{,}4196 - 0{,}6063i$, qui sont des nombres complexes conjugués.

Ainsi, aussi bien la suite $\left(a_0^0, a_0^1, a_0^2, ...\right)$ que les suites $\left(a_1^0, a_1^1, a_1^2, ...\right)$ et $\left(a_2^0, a_2^1, a_2^2, ...\right)$ satisfont la relation de récurrence des nombres de Tribonacci. Et donc, également toute combinaison linéaire telle que la suite

$$\left(\frac{a_0^0}{u} + \frac{a_1^0}{v} + \frac{a_2^0}{w}, \frac{a_0^1}{u} + \frac{a_1^1}{v} + \frac{a_2^1}{w}, \frac{a_0^2}{u} + \frac{a_1^2}{v} + \frac{a_2^2}{w}, ...\right) \qquad \text{avec } u, v, w \in \mathbb{C}^*$$

satisfait la propriété que chaque terme de la suite est la somme de ses trois prédécesseurs.

Par conséquent, on peut écrire le terme $T(n) = \frac{a_0^n}{u} + \frac{a_1^n}{v} + \frac{a_2^n}{w}$.
À partir des conditions initiales $T(0) = 0$, $T(1) = 1$ et $T(2) = 1$, on obtient les constantes u, v et w :

$$u = -a_0^2 + 4a_0 - 1 \cong 2{,}9742$$

$$v = -a_1^2 + 4a_1 - 1 \cong -2{,}4871 - 2{,}9340i$$

$$w = -a_2^2 + 4a_2 - 1 \cong -2{,}4871 + 2{,}9340i$$

Et à partir de là, la formule exacte de Tribonacci :

$$T(n) = \frac{a_0^n}{-a_0^2 + 4a_0 - 1} + \frac{a_1^n}{-a_1^2 + 4a_1 - 1} + \frac{a_2^n}{-a_2^2 + 4a_2 - 1}$$

avec les trois solutions exactes ou approximatives de l'équation caractéristique $a^3 = a^2 + a + 1$:

$$a_0 = \frac{1}{3}\left(1 + \left(19 - 3\sqrt{33}\right)^{1/3} + \left(19 + 3\sqrt{33}\right)^{1/3}\right) \cong 1{,}8393$$

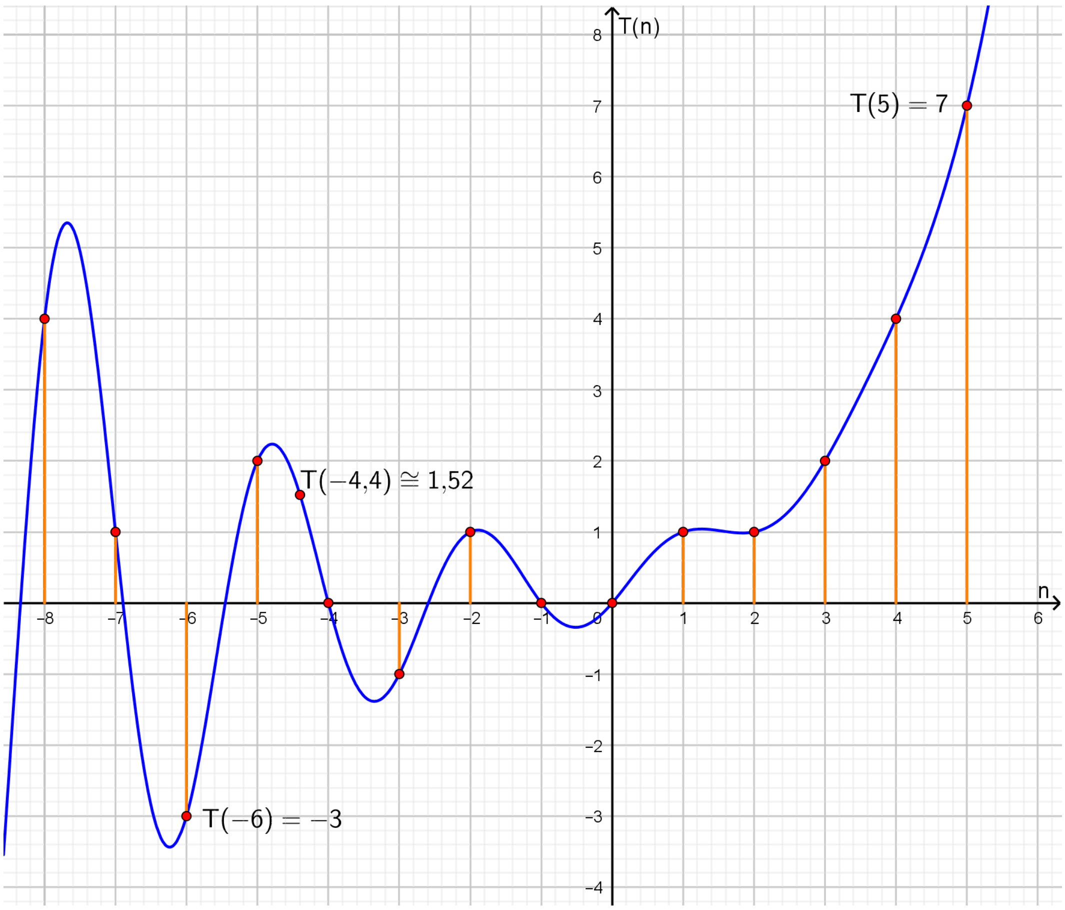
$$a_1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{6}\left(1 + \mathrm{i}\sqrt{3}\right)\left(19 - 3\sqrt{33}\right)^{1/3} - \frac{1}{6}\left(1 - \mathrm{i}\sqrt{3}\right)\left(19 + 3\sqrt{33}\right)^{1/3} \cong -0{,}4196 + 0{,}6063i$$

$$a_2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{6}\left(1 - \mathrm{i}\sqrt{3}\right)\left(19 - 3\sqrt{33}\right)^{1/3} - \frac{1}{6}\left(1 + \mathrm{i}\sqrt{3}\right)\left(19 + 3\sqrt{33}\right)^{1/3} \cong -0{,}4196 - 0{,}6063i$$

Le premier terme de la formule de Tribonacci ci-dessus est réel pour tout $n \in \mathbb{R}$, car a_0 et u sont des réels positifs.
Le deuxième terme est égal au complexe conjugué du troisième terme pour tout $n \in \mathbb{R}$, car $a_2 = \overline{a_1}$ et $w = \overline{v}$.

Par conséquent, $T(n)$ est un nombre réel pour tout $n \in \mathbb{R}$. Il s'agit d'une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

Voici ci-dessous le graphe de cette fonction $T(n)$, qui peut être utilisé pour vérifier approximativement que, par exemple, $T(-4{,}4) \cong 1{,}52$.



Comme pour les nombres de Fibonacci, la limite $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{T(n+1)}{T(n)}$ est égale à la constante de Tribonacci $a_0 \cong 1{,}8393$.

En outre, les nombres de Tribonacci peuvent également être trouvés à l'aide d'une fonction génératrice :

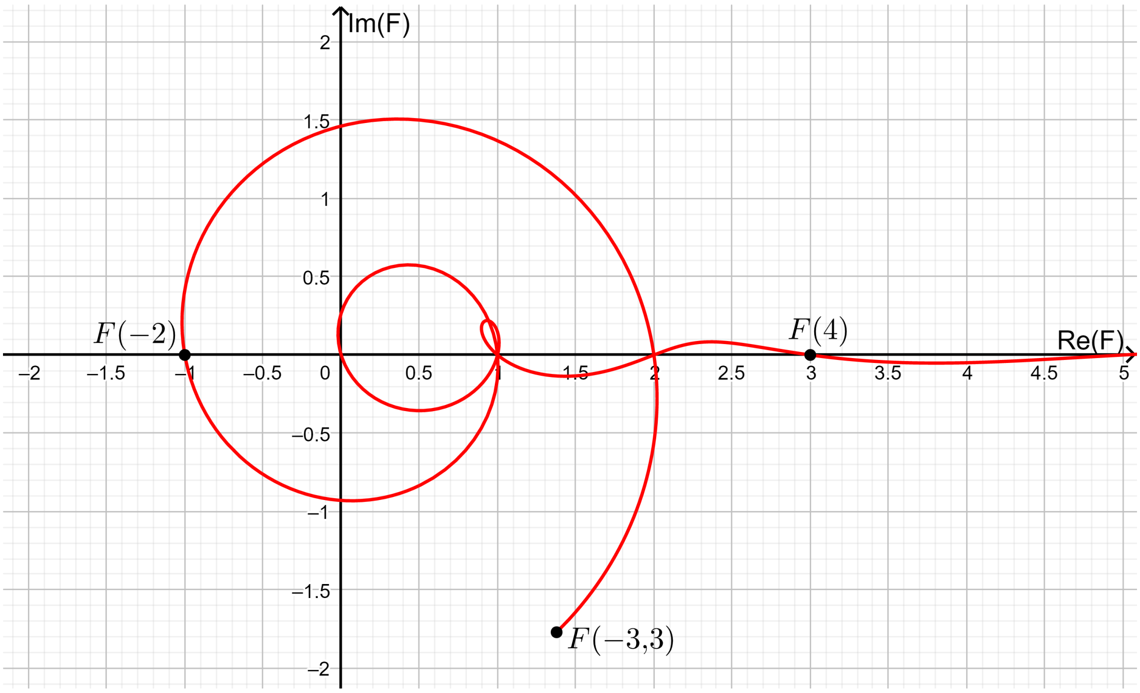
$$\frac{x}{1 - x - x^2 - x^3} = \sum_{n=0}^{\infty} T(n) \cdot x^n \qquad \left(\text{avec } |x| < r = \frac{1}{a_0}\right)$$

Avec d'autres valeurs initiales, on obtient d'autres suites connexes $T'(n)$, qui satisfont également la relation de récurrence $T'(n) = T'(n-1) + T'(n-2) + T'(n-3)$. Les équations des fonctions associées pour $T'(n)$ changent bien sûr aussi au cours du processus, mais elles donnent toujours des valeurs réelles quel que soit l'exposant n.

4 La vie secrète des nombres de Fibonacci

Il est étonnant que la formule de Tribonacci pour $T(n)$ trouvée ci-dessus donne toujours une valeur réelle quel que soit n, car c'est tout à fait différent avec la formule de Binet : elle donne des valeurs non réelles pour $F(n)$ pour des valeurs réelles rationnelles de n !
Ainsi, selon la formule de Binet, on a par exemple les «nombres rationnels de Fibonacci» $F(4{,}5) \cong 3{,}8991 - 0{,}0513i$, et $F(-3{,}3) \cong 1{,}3778 - 1{,}7706i$.

Dans la figure ci-dessous se trouve l'étonnant graphique de la relation $\{\mathfrak{Re}\,(F(n))\,;\mathfrak{Im}\,(F(n))\}$ pour $-3{,}3 \leqslant n \leqslant 5{,}1$.
Avec des valeurs croissantes de n supérieures à 2, cette courbe s'enroule de plus en plus autour de la partie positive de l'axe réel.
Avec des valeurs décroissantes de n inférieures à 0, elle s'enroule autour de l'origine avec un rayon toujours croissant (en une sorte de spirale).
Il ressort immédiatement du graphique que l'équation $F(n) = 1$ a exactement trois solutions, et que $F(n) = 2$ a exactement deux solutions différentes.



On peut observer que pour les suites de Lucas, comme par exemple $L(n) = F(n-1) + F(n+1)$, on obtient des représentations assez similaires.

5 La suite de Tétranacci

De la même manière que pour les nombres de Fibonacci $F(n)$ et de Tribonacci $T(n)$, on peut trouver une définition explicite pour le n-ième nombre de Tétranacci $Q(n)$ (Q comme dans Quattro). La définition récursive de la suite associée est :

$$\begin{cases} Q(0) = 0, \quad Q(1) = 1, \quad Q(2) = 1, \quad Q(3) = 2, \\ Q(n) = Q(n-1) + Q(n-2) + Q(n-3) + Q(n-4) \end{cases}$$

Avec les conditions initiales données ci-dessus, on obtient le tableau de valeurs suivant, qui a déjà été étendu à n négatif :

$$\begin{array}{lcccccccccccccccc} n: & \ldots & -5 & -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \ldots \\ Q(n): & \ldots & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 4 & 8 & 15 & 29 & 56 & \ldots \end{array}$$

De l'approche $Q(n) = a^{n+4}$ découle ici, par analogie avec la procédure pour la suite de Tribonacci, le terme $Q(n) = u_0 \cdot a_0^n + u_1 \cdot a_1^n + u_2 \cdot a_2^n + u_3 \cdot a_3^n$ pour la formule de Tétranacci, où a_0, a_1, a_2, a_3 sont les quatre solutions de l'équation caractéristique $a^4 = a^3 + a^2 + a + 1$. Cette équation peut être résolue avec précision, mais ses solutions sont toutes des « monstres » avec plusieurs racines ! Ici, à titre d'illustration, la constante de Tétranacci (selon l'article Wikipedia sur la généralisation des nombre de Fibonacci) :

$$a_0 = \left(p_1 + \frac{1}{4}\right) + \sqrt{\left(p_1 + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{2\lambda_1}{p_1}\left(p_1 + \frac{1}{4}\right) + \frac{7}{24p_1} + \frac{1}{6}}$$

$$\text{où } p_1 = \sqrt{\lambda_1 + \frac{11}{48}}, \text{ et } \lambda_1 = \frac{\sqrt[3]{3\sqrt{1689} - 65} - \sqrt[3]{3\sqrt{1689} + 65}}{12\sqrt[3]{2}}$$

Par souci de simplicité, il est donc logique ici de continuer à calculer avec des valeurs approximatives. Les quatre constantes u_0, u_1, u_2, u_3 résultent à nouveau des conditions initiales données ci-dessus.
Il en résulte la définition explicite (approximative) suivante du n-ième nombre de Tétranacci $Q(n)$:

$$\begin{aligned} Q(n) \cong\ & 0{,}2938 \cdot 1{,}9276^n - 0{,}1929 \cdot (-0{,}7748)^n \\ & - (0{,}0505 - 0{,}1697i) \cdot (-0{,}0764 - 0{,}8147i)^n \\ & - (0{,}0505 + 0{,}1697i) \cdot (-0{,}0764 + 0{,}8147i)^n \end{aligned}$$

Comme on pouvait s'y attendre, le quotient $\frac{Q(n+1)}{Q(n)}$ permet de retrouver la constante de Tétranacci :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Q(n+1)}{Q(n)} = a_0 \cong 1{,}9276$$

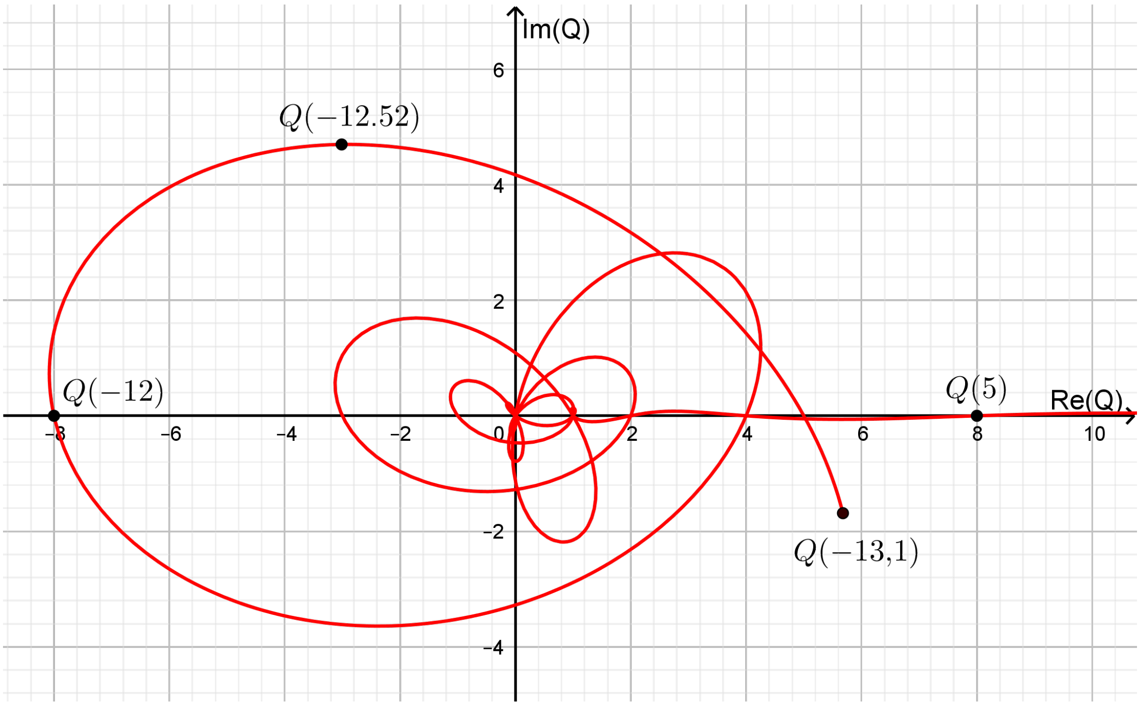
Les nombres de Tétranacci $Q(n)$ peuvent également être trouvés à l'aide d'une fonction génératrice :

$$\frac{x}{1 - x - x^2 - x^3 - x^4} = \sum_{n=0}^{\infty} Q(n) \cdot x^n \qquad \left(\text{avec } |x| < r = \frac{1}{a_0} \cong \frac{1}{1{,}9276}\right)$$

Pour les valeurs réelles rationnelles de n, les nombres de Tétranacci $Q(n)$, comme les nombres de Fibonacci, prennent des valeurs non réelles, contrairement aux valeurs correspondantes des nombres de Tribonacci. Dans le graphique ci-dessous, qui est assez intéressant, on indique la relation

$$\left\{\mathfrak{Re}\left(Q(n)\right); \mathfrak{Im}\left(Q(n)\right)\right\} \qquad \text{pour } -13{,}1 \leqslant n \leqslant 5{,}5.$$

Par exemple, $Q(-13{,}1) \cong 5{,}6781 - 1{,}6863i$, $Q(-12{,}52) \cong -3{,}0246 + 4{,}6970i$, $Q(-12) = -8$, et $Q(5) = 8$.



6 Conclusion

Cette méthode peut également être utilisée pour trouver des définitions explicites pour des suites qui utilisent plus de quatre prédécesseurs dans leur définition récursive du n-ième terme. Pour une suite de Pentanacci, c'est-à-dire pour une suite dans laquelle chaque terme est la somme des cinq termes précédents, il faudrait tout d'abord résoudre l'équation caractéristique $a^5 = a^4 + a^3 + a^2 + a + 1$. C'est une équation de degré 5 redoutable qui, selon Galois, ne peut pas être résolue par radicaux ! Mais les différentes solutions de cette équation, ou même d'équations plus compliquées, peuvent en principe toutes être trouvées numériquement avec une précision arbitraire. Ainsi, la voie est libre pour trouver des définitions explicites pour de telles suites, ou même pour des suites plus exotiques.

P.S.

Toutes les suites mentionnées ci-dessus, ainsi que la suite de Pentanacci

$$\{..., 0, 1, 1, 2, 4, 8, 16, 31, 61, 120, 236, 464, 912, 1793, 3525, 6930, ...\},$$

peuvent être trouvées dans l'**oeis** (= On-line Encyclopedia of Integer Sequences), www.oeis.org :

Fibonacci : A000045, Tribonacci : A000073, Tétranacci : A000078 et Pentanacci : A001591.