Le coefficient binomial central et ses applications

Alexandre Junod, Lycée Denis-de-Rougemont (Neuchâtel), alexandre.junod@rpn.ch

Nous présentons quelques encadrements du coefficient binomial $\binom{2n}{n}$, établissons la formule de Wallis qui permet d'exprimer π par un produit infini, et démontrons le postulat de Bertrand qui garantit l'existence d'un nombre premier compris entre un entier positif donné et son double.

1 Un premier encadrement

Pour un entier $n \geqslant 1$, le n-ième coefficient binomial central est $\binom{2n}{n}$. On peut déjà remarquer que

$$\binom{2n}{n} = \frac{2n}{n}\binom{2n-1}{n-1} = 2\binom{2n-1}{n} = 2 \cdot \frac{2n-1}{n}\binom{2(n-1)}{n-1} \qquad (*)$$

L'égalité $(*)$ entre les deux extrémités peut être expliquée par un argument de combinatoire. Si on veut répartir $2n$ individus en deux groupes de même effectif ayant chacun un chef, on peut procéder de deux façons : former les groupes et choisir un chef dans chacun d'eux (il y a $\binom{2n}{n}n^2$ possibilités) ou choisir deux chefs avant de leur attribuer leurs groupes (il y a $2n(2n-1)\binom{2n-2}{n-1}$ possibilités). On en déduit que $\binom{2n}{n}n^2 = 2n(2n-1)\binom{2n-2}{n-1}$, donc $\binom{2n}{n} = \frac{2(2n-1)}{n}\binom{2(n-1)}{n-1}$.

Minoration. L'inégalité évidente $(2n-1)^2 > 4n(n-1)$ implique $2n-1 > 2\sqrt{n}\sqrt{n-1}$. Avec la relation $(*)$, on obtient $\displaystyle\binom{2n}{n} > \frac{4\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}}\binom{2(n-1)}{n-1}$ et pour $n \geqslant 2$, on a le produit télescopique

$$\binom{2n}{n} \;>\; \frac{4\cancel{\sqrt{n-1}}}{\sqrt{n}} \cdot \frac{4\cancel{\sqrt{n-2}}}{\cancel{\sqrt{n-1}}} \cdot \ldots \cdot \frac{4\sqrt{1}}{\cancel{\sqrt{2}}} \cdot \binom{2}{1} \;=\; \frac{4^{n-1}}{\sqrt{n}} \cdot 2 \;=\; \frac{4^n}{2\sqrt{n}}.$$

Majoration. L'inégalité évidente $(2n-1)(2n+1) < 4n^2$ montre que $\displaystyle(2n-1)^2 < \frac{4n^2(2n-1)}{(2n+1)}$, donc $\displaystyle 2n-1 < \frac{2n\sqrt{2n-1}}{\sqrt{2n+1}}$. Avec $(*)$, on obtient $\displaystyle\binom{2n}{n} < \frac{4\sqrt{2n-1}}{\sqrt{2n+1}}\binom{2(n-1)}{n-1}$ et, si $n > 5$, on a

$$\binom{2n}{n} \;<\; \frac{4\cancel{\sqrt{2n-1}}}{\sqrt{2n+1}} \cdot \frac{4\cancel{\sqrt{2n-3}}}{\cancel{\sqrt{2n-1}}} \cdot \ldots \cdot \frac{4\sqrt{11}}{\cancel{\sqrt{13}}} \cdot \binom{10}{5} \;=\; \frac{4^{n-5}}{\sqrt{2n+1}} \cdot 252\sqrt{11} \;=\; \frac{252\sqrt{11}}{1024}\frac{4^n}{\sqrt{2n+1}}.$$

Comme $\displaystyle\frac{252\sqrt{11}}{1024} < \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3/2}}$, on a alors $\displaystyle\binom{2n}{n} < \frac{4^n}{\sqrt{3n+3/2}} < \frac{4^n}{\sqrt{3n}}$, ce dernier majorant étant également valable pour $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Au final, on a démontré l'encadrement $\displaystyle\frac{4^n}{2\sqrt{n}} < \binom{2n}{n} < \frac{4^n}{\sqrt{3n}}$ pour $n \geqslant 2$.

2 L'encadrement classique

Un meilleur encadrement de $\binom{2n}{n}$ peut être établi grâce aux *intégrales de Wallis*

$$W_n = \int_0^{\pi/2} (\cos x)^n dx.$$

Lorsque $n \geqslant 2$, une intégration par parties donne

$$W_n = \int_0^{\pi/2} (\cos x)^{n-1} \cos(x) dx = \underbrace{\Big[\sin(x)(\cos x)^{n-1}\Big]_0^{\pi/2}}_{=0} + (n-1) \int_0^{\pi/2} (\cos x)^{n-2} (\sin x)^2 dx.$$

En remplaçant $(\sin x)^2$ par $1 - (\cos x)^2$ dans la dernière intégrale, on obtient

$$W_n = (n-1) \int_0^{\pi/2} \big((\cos x)^{n-2} - (\cos x)^n\big) dx = (n-1)(W_{n-2} - W_n).$$

En ajoutant $(n-1)W_n$ à chaque extrémité, on trouve $nW_n = (n-1)W_{n-2}$, donc $W_n = \frac{n-1}{n} W_{n-2}$.

On peut réitérer cette relation de récurrence jusqu'à $W_0 = \frac{\pi}{2}$ ou $W_1 = 1$ selon la parité de l'indice :

$$\left.\begin{aligned} W_{2n} &= \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \cdots \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \\ W_{2n+1} &= \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \cdots \cdot \frac{2}{3} \end{aligned}\right\} (**)$$

En amplifiant chaque produit de fractions par $2 \cdot 4 \cdots (2n) = 2^n n!$, on trouve

$$\begin{aligned} W_{2n} &= \frac{(2n)(2n-1)(2n-2)\cdots 1}{(2^n n!)^2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2 \cdot 4^n} \binom{2n}{n} \\ W_{2n+1} &= \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)(2n)(2n-1)\cdots 1} = \left(\frac{4^n}{2n+1}\right) \Big/ \binom{2n}{n}. \end{aligned}$$

Pour tout nombre $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, on a $\cos(x) \in]0;1[$, donc $(\cos x)^{2n+1} < (\cos x)^{2n} < (\cos x)^{2n-1}$ et $W_{2n+1} < W_{2n} < W_{2n-1} = \frac{2n+1}{2n} W_{2n+1}$, ce qui se réécrit

$$\left(\frac{4^n}{2n+1}\right) \Big/ \binom{2n}{n} < \frac{\pi}{2 \cdot 4^n} \binom{2n}{n} < \left(\frac{4^n}{2n}\right) \Big/ \binom{2n}{n}.$$

En multipliant tout par $\frac{2 \cdot 4^n}{\pi} \binom{2n}{n}$, on obtient $\frac{(4^n)^2}{(n+1/2)\pi} < \binom{2n}{n}^2 < \frac{(4^n)^2}{n\pi}$ et donc

$$\frac{4^n}{\sqrt{(n+1/2)\pi}} < \binom{2n}{n} < \frac{4^n}{\sqrt{n\pi}}.$$

Avec le théorème des gendarmes, cet encadrement démontre que $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{4^n} \binom{2n}{n} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$.

3 La formule de Wallis

Comme $(\cos x)^{2n} > (\cos x)^{2n+1} > (\cos x)^{2n+2}$ lorsque $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, on a $W_{2n} > W_{2n+1} > \overbrace{\frac{2n+1}{2n+2}W_{2n}}^{W_{2n+2}}$. Par le théorème des gendarmes, il s'ensuit que W_{2n+1}/W_{2n} tend vers 1 lorsque n augmente. Avec les égalités $(**)$, ceci se traduit par la formule de John Wallis $(1616 - 1703)$:

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1}\right).$$

En regroupant les facteurs deux par deux puis en passant à l'inverse, on obtient les formulations équivalentes

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{16}{15} \cdot \frac{36}{35} \cdots \frac{4n^2}{4n^2-1}\right) = \prod_{n\geqslant 1} \left(\frac{4n^2}{4n^2-1}\right)$$

$$\frac{2}{\pi} = \prod_{n\geqslant 1} \left(1 - \frac{1}{(2n)^2}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{4^2}\right)\left(1 - \frac{1}{6^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{(2n)^2}\right)\right)$$

4 Un meilleur encadrement

On peut trouver sur un forum internet [1] un meilleur encadrement du coefficient binomial central :

$$\frac{4^n}{\sqrt{(n+1/3)\pi}} < \binom{2n}{n} < \frac{4^n}{\sqrt{(n+1/4)\pi}} \qquad \text{pour } n \geqslant 2.$$

Preuve. En remarquant que $(2n-1)^2(4n+1) = 16n^3 - 12n^2 + 1 > 16n^3 - 12n^2 = 4n^2(4n-3)$ et que $(2n-1)^2(3n+1) = 12n^3 - 8n^2 - n + 1 < 12n^3 - 8n^2 = 4n^2(3n-2)$ pour $n \geqslant 2$, on peut écrire

$$\frac{4(4n-3)}{4n+1} < \left(\frac{2n-1}{n}\right)^2 < \frac{4(3n-2)}{3n+1} \quad \text{donc} \quad \frac{2\sqrt{4n-3}}{\sqrt{4n+1}} < \frac{2n-1}{n} < \frac{2\sqrt{3n-2}}{\sqrt{3n+1}}.$$

Avec la relation $(*)$ du premier paragraphe, on en déduit que

$$\frac{4\sqrt{4n-3}}{\sqrt{4n+1}}\binom{2(n-1)}{n-1} < \binom{2n}{n} < \frac{4\sqrt{3n-2}}{\sqrt{3n+1}}\binom{2(n-1)}{n-1}.$$

En divisant chaque inéquation par 4^n et en la multipliant par le dénominateur de la fraction, on obtient

$$\frac{\sqrt{4n-3}}{4^{n-1}}\binom{2(n-1)}{n-1} < \frac{\sqrt{4n+1}}{4^n}\binom{2n}{n} \quad \text{et} \quad \frac{\sqrt{3n+1}}{4^n}\binom{2n}{n} < \frac{\sqrt{3n-2}}{4^{n-1}}\binom{2(n-1)}{n-1}.$$

Il s'ensuit que les nombres $a_n = \dfrac{\sqrt{n+1/4}}{4^n}\dbinom{2n}{n}$ forment une suite strictement croissante $(a_{n-1} < a_n)$ et que les nombres $b_n = \dfrac{\sqrt{n+1/3}}{4^n}\dbinom{2n}{n}$ forment une suite strictement décroissante $(b_n < b_{n-1})$.

Grâce à la limite établie à la fin du deuxième paragraphe, on a

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1/4}}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{n}}{4^n}\binom{2n}{n} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

et la suite $(b_n)_{n\geqslant 1}$ a clairement la même limite.

1. https ://mathoverflow.net/questions/133732 (*Upper limit on the central binomial coefficient*)

Par croissance de $(a_n)_{n\geqslant 1}$ et décroissance de $(b_n)_{n\geqslant 1}$ vers leur limite commune, on peut écrire

$$\frac{\sqrt{n+1/4}}{4^n}\binom{2n}{n} < \frac{1}{\sqrt{\pi}} < \frac{\sqrt{n+1/3}}{4^n}\binom{2n}{n}.$$

En passant à l'inverse puis en multipliant par $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\dbinom{2n}{n}$, on obtient le résultat annoncé. $\square$

Par exemple, avec $n=100$, on trouve (avec les logarithmes) $9{,}0511\cdot 10^{58} < \dbinom{200}{100} < 9{,}0549\cdot 10^{58}$.

5 Le postulat de Bertrand

Joseph Bertrand (1822 – 1900) a conjecturé que pour tout entier $n \geqslant 2$, il existe un nombre premier strictement compris entre n et $2n$. On doit la première preuve à Pafnouti Tchebychev (1821 – 1894) mais nous présentons celle de Paul Erdős (1913 – 1996) qui se base sur un encadrement de $\binom{2n}{n}$.

On considère un nombre entier $n \geqslant 5$ et on note v_p la multiplicité d'un nombre premier p dans la factorisation de $\binom{2n}{n}$ (par exemple, pour $n=6$, on a $\binom{12}{6} = 924 = 2^2\cdot 3\cdot 7\cdot 11$, donc $v_2 = 2$, $v_3 = v_7 = v_{11} = 1$ et $v_p = 0$ pour tout nombre premier p qui ne divise pas 924). On peut alors écrire

$$\binom{2n}{n} = \prod_{p\leqslant 2n} p^{v_p} = \Bigg(\prod_{p\leqslant\sqrt{2n}} p^{v_p}\Bigg)\Bigg(\prod_{\sqrt{2n}<p\leqslant 2n/3} p^{v_p}\Bigg)\Bigg(\prod_{2n/3<p\leqslant n} p^{v_p}\Bigg)\Bigg(\prod_{n<p\leqslant 2n} p^{v_p}\Bigg).$$

Fixons un nombre premier $p < 2n$ et considérons l'entier $r = \lfloor \log_p(2n)\rfloor$ tel que $p^r \leqslant 2n < p^{r+1}$. Le produit $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdots n$ contient $\lfloor n/p\rfloor$ multiples de p, $\lfloor n/p^2\rfloor$ multiples de p^2, … , $\lfloor n/p^r\rfloor$ multiples de p^r. Il ne contient aucune puissance supérieure de p car $n/p^{r+1} < \frac{1}{2}$. Il s'ensuit que la plus grande puissance de p qui le divise est $v_p(n!) = \lfloor n/p\rfloor + \lfloor n/p^2\rfloor + \cdots + \lfloor n/p^r\rfloor$. Le même raisonnement montre que $v_p((2n)!) = \lfloor 2n/p\rfloor + \lfloor 2n/p^2\rfloor + \cdots + \lfloor 2n/p^r\rfloor$. On en déduit alors que

$$v_p = v_p((2n)!) - 2v_p(n!) = \sum_{k=1}^{r}\left\lfloor\frac{2n}{p^k}\right\rfloor - 2\sum_{k=1}^{r}\left\lfloor\frac{n}{p^k}\right\rfloor = \sum_{k=1}^{r}\left(\left\lfloor\frac{2n}{p^k}\right\rfloor - 2\left\lfloor\frac{n}{p^k}\right\rfloor\right).$$

Comme $\lfloor 2x\rfloor - 2\lfloor x\rfloor \in \{0;1\}$ pour tout nombre x (il suffit de traiter les cas $x\in\left[0;\frac{1}{2}\right[$ et $x\in\left[\frac{1}{2};1\right[$ pour s'en convaincre), on a $v_p\leqslant r$, donc $p^{v_p}\leqslant p^r\leqslant 2n$.

En particulier, si $p>\sqrt{2n}$, alors $\log_p(2n) < \log_p(p^2) = 2$ et donc $v_p \leqslant r = \lfloor\log_p(2n)\rfloor \leqslant 1$.

On peut encore remarquer que si $\frac{2}{3}n \leqslant p \leqslant n$, alors les inégalités $p\leqslant n\leqslant \frac{3}{2}p < 2p \leqslant 2n < 3p$ montrent que la plus grande puissance de p qui divise $(2n)!$ est p^2 alors que $n!$ est divisible par p. On a donc $v_p = 0$ dans ce cas. Avec toutes ces considérations, on obtient

$$\binom{2n}{n} \leqslant \Bigg(\prod_{p\leqslant\sqrt{2n}}(2n)\Bigg)\Bigg(\prod_{\sqrt{2n}<p\leqslant 2n/3} p\Bigg)\Bigg(\prod_{n<p\leqslant 2n} p\Bigg).$$

Grossièrement, il y a au plus $\lfloor\sqrt{2n}\rfloor - 1$ nombres premiers inférieurs à $\sqrt{2n}$. Le premier produit est donc inférieur à $(2n)^{\sqrt{2n}-1}$ et on peut écrire

$$\binom{2n}{n} \leqslant (2n)^{\sqrt{2n}-1}\cdot\Pi(1;\lfloor 2n/3\rfloor)\cdot\Pi(n;2n)$$

où $\Pi(x;y)$ désigne le produit des nombres premiers p tels que $x<p\leqslant y$.

Un résultat intermédiaire

Pour pouvoir majorer $\Pi(1; \lfloor 2n/3 \rfloor)$, on montre par induction forte sur $n \geqslant 2$ que $\Pi(1; n) < 4^{n-1}$. Cette assertion est vérifiée pour $n \in \{2, 3\}$ et on suppose qu'elle le soit pour tout entier $m < n$.

- Si n est pair, alors n n'est pas premier donc $\Pi(1; n) = \Pi(1; n-1) < 4^{n-2} < 4^{n-1}$.

- Si n est impair, disons $n = 2m + 1$, alors $\Pi(1; n) = \Pi(1; m + 1)\Pi(m + 1; 2m + 1)$, ce qui est majoré par $4^m\Pi(m + 1; 2m + 1)$ par hypothèse d'induction. De plus, $\Pi(m + 1; 2m + 1)$ divise $\binom{2m+1}{m+1}$ car il divise $(2m + 1)!$ tout en étant premier avec $m!(m + 1)!$. On a ainsi

$$\Pi(m + 1; 2m + 1) < \binom{2m+1}{m+1} < \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2m+1} \binom{2m+1}{k} = \frac{(1 + 1)^{2m+1}}{2} = 2^{2m} = 4^m,$$

donc $\Pi(1; n) < 4^{2m} = 4^{n-1}$. $\square$

Retour à la preuve principale

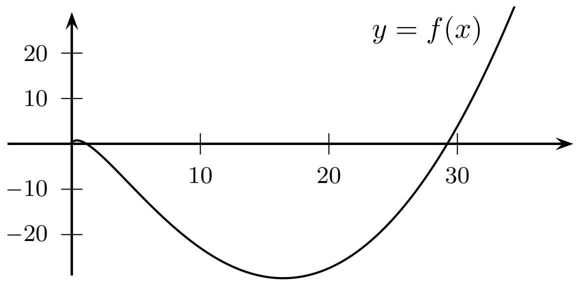
La majoration en bas de la page précédente peut encore être majorée avec le résultat ci-dessus :

$$\binom{2n}{n} \leqslant (2n)^{\sqrt{2n}-1} \cdot 4^{2n/3} \cdot \Pi(n; 2n).$$

D'autre part, la minoration du premier paragraphe implique $\displaystyle\binom{2n}{n} > \frac{4^n}{2\sqrt{n}} > \frac{4^n}{2n}$ pour $n \geqslant 2$.

On a ainsi $\displaystyle\frac{4^n}{2n} < \binom{2n}{n} \leqslant (2n)^{\sqrt{2n}-1} 4^{2n/3}\Pi(n; 2n)$, et donc $\displaystyle\Pi(n; 2n) > \frac{4^{n-2n/3}}{(2n)^{\sqrt{2n}}} = \frac{2^{2n/3}}{(2n)^{\sqrt{2n}}}$.

En posant $x = \sqrt{2n}$, le logarithme du membre de droite est $\displaystyle f(x) = \frac{\ln(2)}{3}x^2 - 2x \ln(x)$.



Si $x \geqslant 9$, on a $\displaystyle\left[\frac{f(x)}{x}\right]' = \left[\frac{\ln(2)}{3}x - 2\ln(x)\right]' = \frac{\ln(2)}{3} - \frac{2}{x} > 0$, donc l'expression $\displaystyle\frac{f(x)}{x}$ définit une fonction strictement croissante. Pour $x \geqslant 29.22$, on a donc $\displaystyle\frac{f(x)}{x} \geqslant \frac{f(29.22)}{29.22} > 0$ et par conséquent $f(x) > 0$ également. Il s'ensuit que $\Pi(n; 2n) \geqslant e^{f(\sqrt{2n})} > e^0 = 1$ pour $n \geqslant 427$.

Il reste à vérifier le postulat de Bertrand pour $n \in \{2, 3, \ldots, 426\}$. Pour cela, on considère la liste $\{2, 3, 5, 7, 13, 23, 43, 83, 163, 317, 631\}$ dans laquelle chaque terme (sauf le premier) est le plus grand nombre premier inférieur au double du terme précédent. Tout entier $n \in \{2, 3, \ldots, 426\}$ est compris entre deux éléments successifs de cette liste, disons entre p_1 et p_2, et on a $p_1 \leqslant n < p_2 < 2p_1 \leqslant 2n$ donc p_2, qui est un nombre premier, est compris entre n et $2n$. $\square$