Sommes de puissances et nombres de Bernoulli

Alexandre Junod, Lycée Denis-de-Rougemont (Neuchâtel), alexandre.junod@rpn.ch

Problématique

Les sommes $S_k(n) = 1^k + 2^k + \cdots + n^k$ sont souvent abordées au lycée pour de petits exposants $k \in \mathbb{N}$ afin d'exercer les preuves par induction ou d'intégrer la fonction $f_k : x \mapsto x^k$ avec une somme de Riemann. Nous rappelons les formules pour $k \in \{1, 2, 3\}$ puis traitons le cas général en établissant la formule de Faulhaber qui relie ces sommes aux nombres de Bernoulli. Nous démontrons finalement le théorème de Clausen - von Staudt qui donne des informations sur les dénominateurs de ces nombres.

1 Exposant $\mathbf{k = 1}$

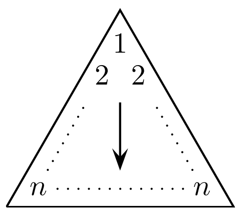
La légende raconte qu'avant ses dix ans, Gauss[1] aurait calculé très rapidement la somme des nombres entiers de 1 à 100, à la grande surprise du professeur qui l'a puni. Il a su regrouper les termes de manière judicieuse en utilisant le fait qu'une somme ne change pas si on la lit de droite à gauche :

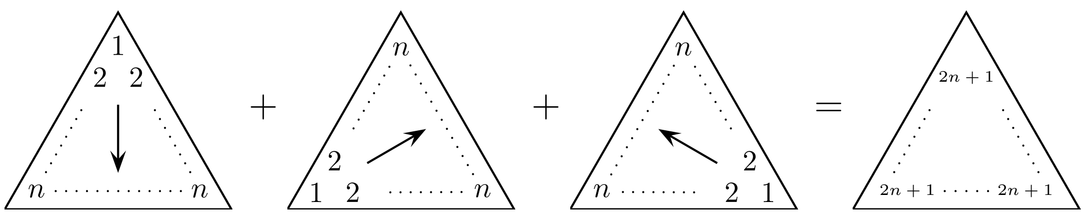
$$\begin{array}{rrcccccccccc}
 & S_1(n) & = & 1 & + & 2 & + & \cdots & + & n & & \\
+ & S_1(n) & = & n & + & (n-1) & + & \cdots & + & 1 & & \\
\hline
 & 2S_1(n) & = & \multicolumn{7}{c}{\underbrace{(n+1) \;+\; (n+1) \;+\; \cdots \;+\; (n+1)}_{n \text{ termes}}} & = & n(n+1)
\end{array}$$

Ainsi, la somme $S_1(n) = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$ vaut $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

2 Exposant $\mathbf{k = 2}$

Dans un triangle équilatéral, on écrit une fois le nombre 1, deux fois le nombre 2, trois fois le nombre 3, …, n fois le nombre n. La somme de tous les nombres est alors $S_2(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$. Cette somme ne change pas si on tourne le triangle pour écrire le "1" à l'un des deux autres sommets. Superposons alors les trois triangles possibles et additionnons les nombres, position par position.





1. Carl Friedrich Gauss (1777–1855), considéré comme l'un des plus grands mathématiciens de tous les temps.

On peut se convaincre que le triangle résultant ne contient que les nombres $2n+1$. C'est le cas pour les trois sommets, c'est facile à voir sur les côtés et la somme des trois vecteurs "gradients" est nulle. Le nombre d'éléments du triangle vaut $1+2+3+\cdots+n = S_1(n) = \dfrac{n(n+1)}{2}$ et il s'ensuit que $3S_2(n) = \dfrac{n(n+1)}{2}\cdot(2n+1)$, donc $S_2(n) = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3 Exposant $\mathbf{k} = 3$

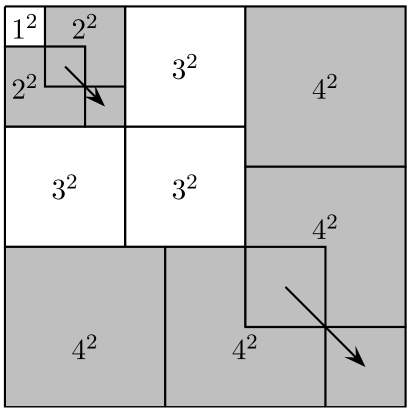
Si on a un carré de côté 1, deux carrés de côté 2, trois carrés de côté 3, ..., n carrés de côté n, l'aire totale de tous les carrés vaut $S_3(n) = 1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$. En découpant un exemplaire de chaque lot de carrés de côté pair, on peut alors créer la disposition suivante (illustration pour $n=4$ mais nous donnons l'argument général qui garantit la bonne disposition à l'étape $n+1$).

$1^3 = 1\cdot 1^2 \longrightarrow$

$2^3 = 2\cdot 2^2 \longrightarrow$

$3^3 = 3\cdot 3^2 \longrightarrow$

$4^3 = 4\cdot 4^2 \longrightarrow$



$$\begin{aligned}
&(1+2+\cdots+n)^2+(n+1)^3\\
&\quad= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2+(n+1)^3\\
&\quad= \frac{(n+1)^2}{4}(n^2+4(n+1))\\
&\quad= \frac{(n+1)^2}{4}(n+2)^2\\
&\quad= \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2\\
&\quad= (1+2+\cdots+n+(n+1))^2
\end{aligned}$$

La somme $S_3(n) = 1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$ vaut $S_1(n)^2 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

4 Cas général

Introduction. Nous nous basons ici sur un article de Ronald Skurnick et Christopher Roethel[2] en essayant d'en rendre le propos plus naturel. Supposons que $1^k+2^k+\cdots+n^k$ soit la valeur en $x=n$ d'un polynôme $S_k(x)$ (cela a été établi précédemment pour $k\in\{1,2,3\}$ et nous procédons par induction). Alors $S_k(x+1)-S_k(x) = (x+1)^k$ car le polynôme obtenu par la différence des deux membres de l'égalité est nul (puisqu'il s'annule pour tout entier $x=n>0$). Il s'ensuit que

$$\int_0^\ell (S_k(x+1)-S_k(x))dx = \int_0^\ell (x+1)^k dx = \frac{(\ell+1)^{k+1}-1}{k+1},$$

donc $(\ell+1)^{k+1} = 1+(k+1)\displaystyle\int_0^\ell (S_k(x+1)-S_k(x))dx$. L'intégrale peut être écrite sous la forme

$$\int_0^\ell S_k(x+1)dx - \int_0^\ell S_k(x)dx = \int_1^{\ell+1} S_k(x)dx - \int_0^\ell S_k(x)dx = \int_\ell^{\ell+1} S_k(x)dx - \int_0^1 S_k(x)dx.$$

On a ainsi $(\ell+1)^{k+1} = 1+(k+1)\left(\displaystyle\int_\ell^{\ell+1} S_k(x)dx - \int_0^1 S_k(x)dx\right)$ et en considérant la somme sur $\ell\in\{0,1,\ldots,n-1\}$, on obtient

$$1^{k+1}+2^{k+1}+\cdots+n^{k+1} = n+(k+1)\left(\int_0^n S_k(x)dx - n\int_0^1 S_k(x)dx\right).$$

2. "*A recursive algorithm for sums of powers using integration*", IJNRPCM, Vol. 7, Issue 1, pages 1-4, 2020

Le membre de droite est la valeur en $x = n$ d'un polynôme $S_{k+1}(x)$ de degré $1 + \deg(S_k(x))$. Comme $S_0(x) = x$ est de degré 1, on en déduit que $S_k(x)$ est de degré $k+1$.

Écrivons $S_k(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_{k+1}x^{k+1}$. Défini par ses valeurs sur les entiers positifs, le polynôme $S_{k+1}(x)$ est unique et on a

$$S_{k+1}(x) = x + (k+1)\Big(c_0 x + \frac{c_1}{2}x^2 + \cdots + \frac{c_{k+1}}{k+2}x^{k+2} - x\Big(c_0 + \frac{c_1}{2} + \cdots + \frac{c_{k+1}}{k+2}\Big)\Big),$$

autrement dit $S_{k+1}(x) = c'_0 + c'_1 x + c'_2 x^2 + \cdots + c'_{k+2}x^{k+2}$ avec

$$c'_0 = 0, \qquad c'_1 = 1 - (k+1)\Big(\frac{c_1}{2} + \cdots + \frac{c_{k+1}}{k+2}\Big), \qquad c'_\ell = \binom{k+1}{\ell} c_{\ell-1} \text{ pour } \ell \geqslant 2.$$

Exemples. Il est commode de calculer d'abord c'_ℓ pour $\ell \geqslant 2$ puis $c'_1 = 1 - (c'_2 + c'_3 + \cdots + c'_{k+2})$. On peut ainsi déterminer les coefficients des polynômes $S_k(x)$ pour $k \in \{0, 1, \ldots, 10\}$:

	c_0	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	c_8	c_9	c_{10}	c_{11}	$\sum c_k$
$S_0(x)$	0	1											1
$S_1(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$										1
$S_2(x)$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$									1
$S_3(x)$	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$								1
$S_4(x)$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$							1
$S_5(x)$	0	0	$-\frac{1}{12}$	0	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$						1
$S_6(x)$	0	$\frac{1}{42}$	0	$-\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{7}$					1
$S_7(x)$	0	0	$\frac{1}{12}$	0	$-\frac{7}{24}$	0	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$				1
$S_8(x)$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{2}{9}$	0	$-\frac{7}{15}$	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{9}$			1
$S_9(x)$	0	0	$-\frac{3}{20}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{7}{10}$	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$		1
$S_{10}(x)$	0	$\frac{5}{66}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	0	-1	0	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{11}$	1

Les nombres de Faulhaber. Raffinons maintenant la notation en écrivant $\left\langle {k \atop \ell} \right\rangle$ le coefficient de x^ℓ dans l'expression du polynôme $S_k(x)$. Pour $\ell \geqslant 2$, la relation entre c'_ℓ et $c_{\ell-1}$ établie ci-dessus se réécrit

$$\begin{aligned} \left\langle {k \atop \ell} \right\rangle &= \frac{k}{\ell}\left\langle {k-1 \atop \ell-1} \right\rangle = \frac{k}{\ell}\cdot\frac{k-1}{\ell-1}\left\langle {k-2 \atop \ell-2} \right\rangle = \ldots = \frac{k}{\ell}\cdot\frac{k-1}{\ell-1}\cdots\frac{k+2-\ell}{2}\left\langle {k+1-\ell \atop 1} \right\rangle \\ &= \frac{(k+1)!}{(k+1)\ell!(k+1-\ell)!}\left\langle {k+1-\ell \atop 1} \right\rangle = \frac{1}{k+1}\binom{k+1}{\ell}\left\langle {k+1-\ell \atop 1} \right\rangle. \end{aligned}$$

Les coefficients $\left\langle {k \atop \ell} \right\rangle$ peuvent donc être directement calculés à partir des coefficients $\left\langle {k \atop 1} \right\rangle = F_k$ de la colonne "c_1" du tableau. Nous les appelerons les *nombres de Faulhaber*[3] :

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F_k	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{42}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{5}{66}$

3. Johann Faulhaber (1580–1635), mathématicien allemand qui s'est beaucoup intéressé aux sommes $S_k(n)$.

On a vu que la somme des coefficients du polynôme $S_k(x)$ est

$$\left\langle {k \atop 0} \right\rangle + \left\langle {k \atop 1} \right\rangle + \cdots + \left\langle {k \atop k} \right\rangle + \left\langle {k \atop k+1} \right\rangle = 1.$$

Grâce à la «symétrie des coefficients binomiaux», cela se traduit par la relation

$$\binom{k+1}{0}F_0 + \binom{k+1}{1}F_1 + \cdots + \binom{k+1}{k}F_k = k+1 \qquad (*)$$

qui permet de déterminer un nombre de Faulhaber à partir des précédents[4].

Série génératrice. La série génératrice exponentielle des nombres de Faulhaber est définie par

$$F(x) \;=\; \sum_{k\geqslant 0} F_k \frac{x^k}{k!} \;=\; F_0 + F_1 x + F_2 \frac{x^2}{2!} + F_3 \frac{x^3}{3!} + F_4 \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

En la multipliant par la série de Mac-Laurin de la fonction exponentielle, on obtient

$$e^x F(x) \;=\; \left(\sum_{k\geqslant 0} \frac{x^k}{k!}\right)\left(\sum_{\ell\geqslant 0} F_\ell \frac{x^\ell}{\ell!}\right) \;=\; \sum_{k,\ell\geqslant 0} F_\ell \frac{x^{k+\ell}}{k!\ell!}.$$

L'exposant $k+\ell$ peut prendre n'importe quelle valeur $n \geqslant 0$. Alors que $\ell \in \{0, 1, \ldots, n\}$, on a $k = n-\ell$ et on peut écrire

$$e^x F(x) \;=\; \sum_{\substack{n\geqslant 0\\ 0\leqslant \ell\leqslant n}} F_\ell \frac{x^n}{(n-\ell)!\ell!} \;=\; \sum_{n\geqslant 0}\sum_{\ell=0}^{n} F_\ell \frac{x^n}{(n-\ell)!\ell!} \;=\; \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n!}\left(\sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} F_\ell\right) x^n.$$

Avec la relation $(*)$, on obtient

$$e^x F(x) \;=\; \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n!}(F_n + n)x^n \;=\; \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n!} F_n x^n + \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{(n-1)!} x^n \;=\; F(x) + \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n!} x^{n+1}.$$

On a ainsi montré que $e^x F(x) = F(x) + xe^x$, donc $(e^x - 1)F(x) = xe^x$ et $F(x) = \dfrac{xe^x}{e^x - 1}$.

On vérifie aisément que la partie impaire de $F(x)$ est $\dfrac{F(x) - F(-x)}{2} = \dfrac{1}{2}x$. Ceci montre que les coefficients F_k sont nuls pour tout nombre impair $k \geqslant 3$ alors que $F_1 = \dfrac{1}{2}$.

Les nombres de Bernoulli. On peut encore remarquer que $F(x) = \dfrac{x(e^x - 1) + x}{e^x - 1} = x + \dfrac{x}{e^x - 1}$.

Ce dernier quotient correspond à la série génératrice exponentielle des *nombres de Bernoulli*[5] B_k. On a donc $B_k = F_k$ pour tout $k \neq 1$ et $B_1 = F_1 - 1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$. En adaptant les coefficients $\left\langle {k \atop \ell} \right\rangle$ pour $\ell \geqslant 2$, on obtient la formule de Faulhaber : on a $1^k + 2^k + \cdots + n^k = S_k(n)$ avec

$$S_k(x) \;=\; \sum_{\ell=1}^{k+1} \left\langle {k \atop \ell} \right\rangle x^\ell \;=\; \frac{1}{k+1}\left(\sum_{\ell=1}^{k-1} \binom{k+1}{\ell} B_{k+1-\ell} x^\ell\right) + \frac{1}{2}x^k + \frac{1}{k+1}x^{k+1}.$$

La somme entre parenthèses ne contient que des monômes x^ℓ où ℓ a la parité opposée à celle de k. Le recours aux nombres de Faulhaber permettrait de tout englober sous le même symbole de sommation (pour $\ell = 1, 2, \ldots, k+1$) sans isoler les deux derniers termes[6].

---

4. On a la formulation $\Phi\big((x+1)^{k+1} - x^{k+1}\big) = k+1$, où $\Phi : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$ est l'opérateur linéaire défini par $\Phi(x^n) = F_n$.
5. Jakob Bernoulli (1654–1705), mathématicien et physicien suisse.
6. Avec l'opérateur linéaire Φ défini ci-dessus, on a simplement $S_k(n) = \frac{1}{k+1}\Phi\big((x+n)^{k+1} - x^{k+1}\big)$.

5 Le théorème de Clausen - von Staudt

Un entier $k > 1$ ainsi qu'un nombre premier p sont fixés et on veut étudier la somme $S_k(p)$ modulo p. Si on choisit un nombre u premier avec p, l'ensemble $\{1 \cdot u, 2 \cdot u, \dots, p \cdot u\}$ contient p éléments distincts modulo p qui coïncident donc globalement avec ceux de $\{1, 2, \dots, p\}$. On peut ainsi écrire

$$S_k(p) = 1^k + 2^k + \cdots + p^k \equiv (1 \cdot u)^k + (2 \cdot u)^k + \cdots + (p \cdot u)^k = u^k(1^k + 2^k + \cdots + p^k) = u^k S_k(p),$$

donc $(1 - u^k)S_k(p) \equiv 0 \pmod p$. Deux cas peuvent être envisagés :

1) $S_k(p) \equiv 0 \pmod p$
2) $u^k \equiv 1 \pmod p$, et ceci pour tout entier u premier avec p.
   On a alors $S_k(p) = 1^k + 2^k + \cdots + (p-1)^k + p^k \equiv \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{p-1 \text{ termes}} + 0 = p - 1 \equiv -1 \pmod p$.

Posons $k' = k - \left\lfloor \dfrac{k}{p-1} \right\rfloor (p-1)$. Si le cas 2) était vérifié pour k, il le serait aussi pour k' (car il l'est pour $k = p-1$ grâce au petit théorème de Fermat). Autrement dit, le polynôme $P(x) = x^{k'} - 1$ admet $p-1$ zéros distincts modulo p mais comme $k' \in \{0, 1, \dots, p-2\}$, il s'ensuit que $k' = 0$ et donc que k est un multiple de $p - 1$. On peut alors préciser les deux cas envisagés :

1) $S_k(p) \equiv 0 \pmod p$ si $p - 1$ ne divise pas k,
2) $S_k(p) \equiv -1 \pmod p$ si $p - 1$ divise k.

Exprimons maintenant $S_k(p)$ en utilisant les nombres de Faulhaber et la relation $\binom{k+1}{\ell} = \frac{k+1}{\ell}\binom{k}{\ell-1}$:

$$S_k(p) = \sum_{\ell=1}^{k+1} \binom{k+1}{\ell} \frac{F_{k+1-\ell}}{k+1} p^\ell = \sum_{\ell=1}^{k+1} \binom{k}{\ell-1} \frac{F_{k+1-\ell}}{\ell} p^\ell = pF_k + p \sum_{\ell=2}^{k+1} \binom{k}{\ell-1} pF_{k+1-\ell} \frac{p^{\ell-2}}{\ell}$$

(la dernière somme a un sens puisque $k > 1$). On se convainc que $\dfrac{p^{\ell-2}}{\ell}$ est un p-entier[7] pour tout $\ell \geqslant 2$ et tout nombre premier p, sauf lorsque $p = \ell = 2$, auquel cas $\dbinom{k}{\ell-1} \dfrac{p^{\ell-2}}{\ell} = \dfrac{k}{2}$ est un entier si k est pair. Grâce à la relation ci-dessus, on montre par induction sur k que les pF_k sont tous p-entiers (car $S_k(p)$ est entier et $p\binom{k}{\ell-1}\frac{p^{\ell-2}}{\ell}$ est p-entier dans tous les cas). On en déduit aussi que $F_k - \dfrac{S_k(p)}{p}$ (opposé de la somme de droite) est p-entier lorsque k est pair. Selon les deux cas envisagés, on a donc

1) F_k est p-entier si $p - 1$ ne divise pas k
2) $F_k + \dfrac{1}{p}$ est p-entier si $p - 1$ divise k

pour k pair $\geqslant 2$. Il s'ensuit que $F_k + \sum \frac{1}{q}$, où la somme porte sur tous les nombres premiers q tels que $q - 1$ divise k, est un p-entier. Comme ceci est valable pour tout nombre premier p, il s'agit en réalité d'un entier. Comme F_k coïncide avec B_k lorsque $k \neq 1$, on peut aussi dire que

$$B_k + \sum_{(p-1)|k} \frac{1}{p} \quad \text{est un nombre entier pour tout } k \text{ pair } \geqslant 2.$$

Ce résultat a été trouvé de manière indépendante par Clausen[8] et von Staudt[9]. Il implique que le dénominateur de B_{2n} est le produit des nombres premiers p tels que $p - 1$ divise $2n$.

7. Un nombre rationnel est appelé "*p-entier*" si le dénominateur de sa fraction réduite n'est pas divisible par p.
8. Thomas Clausen (1801–1885), astronome et mathématicien danois.
9. Karl Georg Christian von Staudt (1798–1867), mathématicien allemand.