Le problème des huit dames

Alexandre Junod, Lycée Denis-de-Rougemont (Neuchâtel), alexandre.junod@rpn.ch

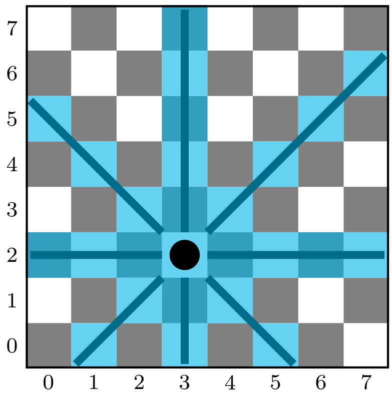
Enseignant retraité du Lycée Denis-de-Rougemont à Neuchâtel et ancien membre de la CRM, Frédy Gertsch nous a quittés le 2 avril 2023, dans sa 80ème année. Les personnes qui l'ont connu se souviendront de sa jovialité constante, de son flegme quasi britannique, de son sens de l'humour et de ses réflexions avisées. À côté des mathématiques, de la politique locale et de la chanson française, Frédy avait également une grande passion pour les échecs et cet article a été écrit pour lui rendre hommage.

1 Introduction

Histoire. Max Bezzel[1] proposa en 1848 le problème suivant dans une revue allemande d'échecs : *de combien de manières peut-on disposer huit dames sur un échiquier sans qu'aucune d'elles ne menace une autre ?* Le sujet intéressa Gauss[2] qui trouva 72 solutions, mais c'est en 1850 que Franz Nauck donna la résolution complète avec 92 configurations. Dans ses échanges épistolaires, Gauss fournit à l'un de ses amis une méthode pour vérifier les résultats, en concluant que «par ces tâtonnements méthodiques, il ne devrait pas être difficile de trouver les solutions à ce problème si on est prêt à y passer une ou deux heures.»

Notations. On numérote les cases de l'échiquier de 0 à 63 à partir du coin inférieur gauche, et on rappelle qu'une dame contrôle toutes les cases situées sur sa ligne, sa colonne et ses diagonales.

56	57	58	59	60	61	62	63
48	49	50	51	52	53	54	55
40	41	42	43	44	45	46	47
32	33	34	35	36	37	38	39
24	25	26	27	28	29	30	31
16	17	18	19	20	21	22	23
8	9	10	11	12	13	14	15
0	1	2	3	4	5	6	7



La case numéro n peut être représentée par le point $(x;y)$ avec $x = (n \bmod 8)$ (numéro de colonne) et $y = \lfloor n/8 \rfloor$ (numéro de ligne), et on a $n = x + 8y$. Dans l'illustration à droite ci-dessus, la dame se trouve dans la colonne numéro $x = 3$ et la ligne numéro $y = 2$, ce qui correspond à la case de numéro $n = 3 + 8 \cdot 2 = 19$. On peut remarquer qu'une case de l'échiquier est blanche si et seulement si la somme des coordonnées du point $(x;y)$ associé est impaire. Cependant, la couleur des cases n'a aucune importance dans cet article. Le centre de l'échiquier, situé au milieu des lignes (et des colonnes) de numéros 3 et 4, est le point $C(3.5;3.5)$.

1. Max Friedrich Wilhelm Bezzel (1824 – 1871), avocat et grand maître d'échecs bavarois.
2. Johann Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855), mathématicien, astronome et physicien allemand.

Combinatoire. Si les dames ne contrôlaient que leurs cases, on devrait simplement choisir huit cases sur l'échiquier et il y aurait $\binom{64}{8} = 4'426'165'368$ possibilités. Comme chaque dame contrôle sa ligne et qu'il y a autant de dames que de lignes, on en déduit qu'il y a exactement une dame par ligne et le nombre de configurations descend à $8^8 = 16'777'216$. Comme, de plus, chaque dame contrôle sa colonne, le nombre de possibilités devient $8! = 40'320$. Ce serait la réponse au problème si on remplaçait les dames par des tours. La contrainte supplémentaire que chaque dame contrôle ses diagonales rend le problème non trivial.

2 Programme principal

Nous allons résoudre le problème des huit dames à l'aide d'un programme écrit en Python. Les dames seront posées une par une, une ligne après l'autre. Il n'y aura ainsi aucune confrontation de dames dans une ligne mais il faudra vérifier que la nouvelle dame posée ne se trouve pas dans la même colonne ou dans une même diagonale qu'une dame posée précédemment.

1) Il est clair que, sur l'échiquier, des cases de numéros n et n' se trouvent dans la même colonne si et seulement si $n - n'$ est divisible par 8, c'est-à-dire $((n - n') \bmod 8) = 0$.
2) Deux points $(x; y)$ et $(x'; y')$ se trouvent dans la même diagonale ascendante (de pente 1) si et seulement si $y = x + h$ et $y' = x' + h$, c'est-à-dire $y - x = y' - x'$ ou encore $y - y' = x - x'$.
3) Deux points $(x; y)$ et $(x'; y')$ se trouvent dans la même diagonale descendante (de pente -1) si et seulement si $y = -x + h$ et $y' = -x' + h$, c'est-à-dire $x + y = x' + y'$ ou encore $y - y' = -(x - x')$.
4) Selon 2) et 3), des points $(x; y)$ et $(x'; y')$ se trouvent dans la même diagonale (ascendante ou descendante) si et seulement si $|y - y'| = |x - x'|$. Au niveau de l'échiquier, cela signifie que des cases de numéros n et n' se trouvent dans une même diagonale (ascendante ou descendante) si et seulement si $\big|\lfloor n/8\rfloor - \lfloor n'/8\rfloor\big| = \big|(n \bmod 8) - (n' \bmod 8)\big|$.

Notre programme utilise une fonction récursive `fct(liste,n)`, dans laquelle on teste la compatibilité de la position `n` d'une nouvelle dame avec celles des dames déjà placées et recensées dans `liste`. Si les tests sont valides, on place officiellement la nouvelle dame. Si huit dames ont été placées, on a trouvé une solution. Sinon, on applique la fonction avec chacune des cases de la ligne suivante.

```
sol = []
def fct(liste,n) :
    for k in liste :
        if (n-k)%8 == 0 : return
        if abs(n//8-k//8) == \
            abs(n%8-k%8) : return
    liste2 = liste + [n]
    if len(liste2) == 8 :
        sol.append(liste2)
        return
    debut = n-(n%8)+8
    for m in range(debut,debut+8) :
        fct(liste2,m)
for k in range(8) : fct([],k)
print(len(sol))
```

`sol` est la liste des configurations possibles.

`liste` recense les positions des dames déjà placées et `n` est la position d'une nouvelle dame.

On vérifie la compatibilité entre la position de la nouvelle dame et celles des dames déjà placées avec les tests 1) et 4).

Si les tests sont valides, on ajoute la nouvelle dame dans `liste`

Si huit dames ont pu être posées, on ajoute la configuration dans la liste des solutions.

Sinon, on détermine le début de la ligne suivante et on applique la même fonction en plaçant une nouvelle dame sur chaque case de cette ligne.

Au début, on applique la fonction avec chaque case de la ligne numéro 0.

On veut connaître le nombre de solutions.

Le programme indique, après 0.02 secondes de calculs, qu'il y a exactement 92 solutions.

3 Solutions équivalentes

Chaque configuration en engendre d'autres (en faisant abstraction de la couleur des cases) si on fait tourner l'échiquier de 90°, 180° ou 270°, ou si on effectue une symétrie par rapport à un axe horizontal, vertical ou diagonal. Nous pouvons ainsi partitionner l'ensembles des 92 configurations trouvées en classes d'équivalences. Par symétrie verticale, on peut supposer que la dame de la première ligne se trouve dans la case numéro 0, 1, 2 ou 3. On peut donc remplacer l'avant-dernière ligne du code précédent par «`for k in range(4) : fct([],k)`» et on aura sans surprise 46 solutions.

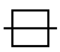
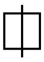
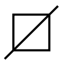
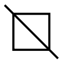
Chacune des transformations envisagées admet pour point fixe le centre de l'échiquier, $C(3.5;3.5)$. On peut translater la situation pour ramener ce point fixe sur l'origine, effectuer la transformation en utilisant une matrice $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$, puis appliquer la translation inverse pour mettre les choses à leur place. L'image d'un point $(x;y)$ est donc le point $(x';y')$ défini par

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-3.5 \\ y-3.5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3.5 \\ 3.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax-3.5a+by-3.5b+3.5 \\ cx-3.5c+dy-3.5d+3.5 \end{pmatrix}.$$

Si $(x;y)$ est associé à la case numéro n, alors $(x';y')$ est associé à la case numéro

$$\begin{aligned} n' &= x'+8y' = \underbrace{(a+8c)}_{\alpha}\,x + \underbrace{(b+8d)}_{\beta}\,y - 3.5a - 3.5b + 3.5 + 8(-3.5c - 3.5d + 3.5) \\ &= \alpha x + \beta y - 3.5(a+b+8c+8d-9) = \alpha(n \bmod 8) + \beta\lfloor n/8 \rfloor \overbrace{-3.5(\alpha+\beta-9)}^{\gamma}. \end{aligned}$$

Pour résumer, les transformations géométriques considérées peuvent être décrites par des fonctions $n \mapsto n' = \alpha(n \bmod 8) + \beta\lfloor n/8 \rfloor + \gamma$ avec les nombres α, β et γ suivants.

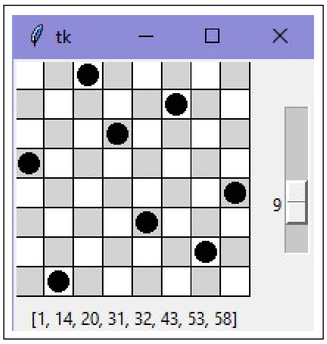
Transformation	$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$	a	b	c	d	α	β	γ
Identité	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	1	0	0	1	1	8	0
Symétrie 	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	1	0	0	-1	1	-8	56
Symétrie 	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	-1	0	0	1	-1	8	7
Symétrie 	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	0	1	1	0	8	1	0
Symétrie 	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	0	-1	-1	0	-8	-1	63
Rotation de 90°	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	0	-1	1	0	8	-1	7
Rotation de 180°	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	-1	0	0	-1	-1	-8	63
Rotation de 270°	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	0	1	-1	0	-8	1	56

On peut remarquer que le nombre γ est le numéro du coin de l'échiquier correspondant à l'image de la case numéro 0. Dans le code Python ci-dessous (à écrire à la suite du précédent), on considère tous les couples $(\alpha;\beta)$ possibles, sauf ceux associés à l'identité (qui n'a aucun effet géométrique visible) et à la symétrie d'axe vertical (puisque l'algorithme principal place les dames ligne après ligne), pour autant qu'on ait bien remplacé "8" par "4" dans l'avant-dernière ligne du programme principal.

```
for config1 in sol :
    for (a,b) in [(8,-1),(8,1),(1,-8),(-1,-8),(-8,1),(-8,-1)] :
        config2 = [a*(k%8)+b*(k//8)-7*(a+b-9)/2 for k in config1]
        config2.sort()
        if config2 != config1 and (config2 in sol) :
            sol.remove(config2)
```

La ligne supplémentaire «`print(len(sol))`» indiquerait qu'il y a douze solutions. Notons que si on remplaçait les dames par des tours (en enlevant les lignes 5-6 du programme principal), on verrait que les $8! = 40'320$ configurations possibles seraient représentées par $5'282$ familles (classes d'équivalence).

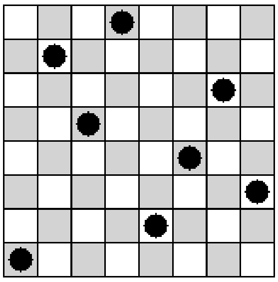
4 Représentation des solutions

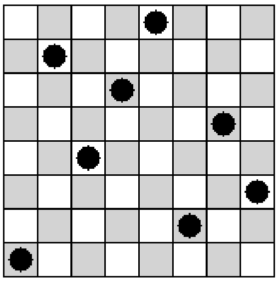


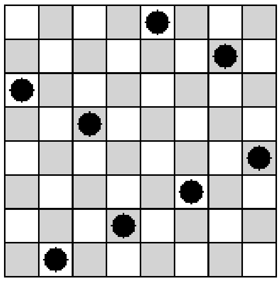
On donne ici un code Python qui permet de représenter une solution en dessinant un échiquier et en y plaçant les huit dames. Notre interface nécessite le package `tkinter`. On crée une zone graphique `c1` pour le dessin, une étiquette `l1` pour indiquer la solution et une barre de défilement verticale `s1` pour choisir une des douze solutions retenues. Voici le code à écrire à la suite du précédent.

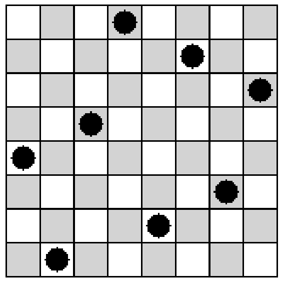
```
from tkinter import *
fenetre = Tk()
c1 = Canvas(width=161, height=161)
l1 = Label(width=20)
s1 = Scale(from_=1, to=len(sol))
c1.grid(row=0,column=0)
l1.grid(row=1,column=0)
s1.grid(row=0,column=1)

def dessin(liste) :
    for k in range(64) :
        x, y = 20*(k%8), 20*(k//8)
        coul = "lightgray"
        if (x+y)%40 == 0 : coul = "white"
        c1.create_rectangle(x, y, x+20, y+20, fill=coul)
    for k in liste :
        xc, yc = 10+20*(k%8), 150-20*(k//8)
        c1.create_oval(xc-7, yc-7, xc+7, yc+7, fill="black")
    l1["text"] = str(liste)

def s1_scroll(event=None):
    dessin(sol[s1.get()-1])
s1["command"] = s1_scroll
s1_scroll()
fenetre.mainloop()
```

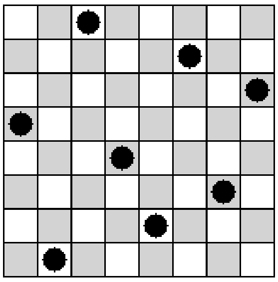
L'ensemble des 92 solutions au problème des huit dames peut être partitionné en douze classes d'équivalence qui admettent les représentants suivants.

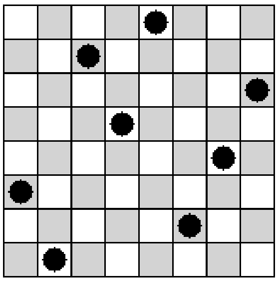

[0,12,23,29,34,46,49,59]

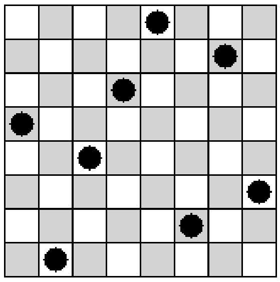

[0,13,23,26,38,43,49,60]

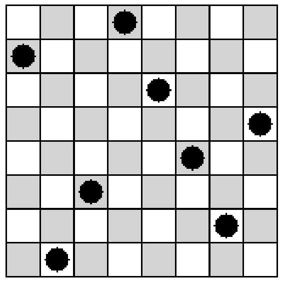

[1,11,21,31,34,40,54,60]

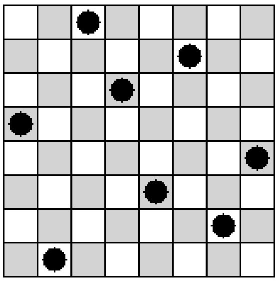

[1,12,22,24,34,47,53,59]

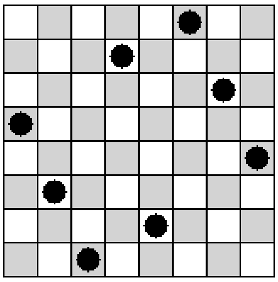

[1,12,22,27,32,47,53,58]

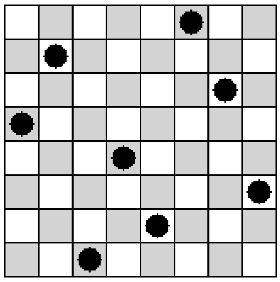

[1,13,16,30,35,47,50,60]

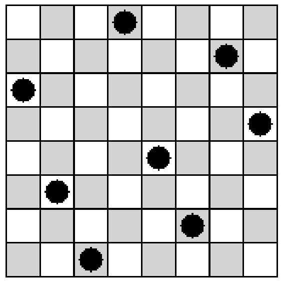

[1,13,23,26,32,43,54,60]


[1,14,18,29,39,44,48,59]


[1,14,20,31,32,43,53,58]


[2,12,17,31,32,46,51,61]*


[2,12,23,27,32,46,49,61]


[2,13,17,28,39,40,54,59]

La configuration marquée d'un astérisque est symétrique par rapport au centre de l'échiquier. Ainsi, une rotation de 180° n'a aucun effet, et le même effet est obtenu avec les rotations de 90° et de 270°, avec les deux symétries diagonales, ainsi qu'avec les symétries verticale et horizontale. Cette configuration engendre donc une famille de quatre solutions et comme les 88 solutions restantes se répartissent entre les onze autres configurations représentées, chacune d'elles génère une famille de huit solutions grâce aux huit transformations répertoriées.

Pour conclure, expliquons comment on peut déduire l'existence de douze familles de solutions à partir des 92 solutions existantes. Les huit transformations répertoriées forment un groupe (appelé «groupe diédral d'ordre 8») qui agit sur l'ensemble des 92 solutions du problème des dames. Selon le «lemme de Burnside [3]», si on multiplie le nombre x de classes d'équivalence par le nombre de transformations (8 dans notre cas), on trouve la somme des nombres de configurations invariantes pour chaque transformation. Il est clair que l'identité admet 92 configurations invariantes et que les symétries axiales n'en ont aucune. En procédant à des essais systématiques avec un échiquier, on peut vérifier que la rotation de 90°, et donc celle de 270°, n'a aucune configuration invariante, alors que la rotation de 180° en admet quatre. On a ainsi $8x = 92 + 4 = 96$, donc $x = 12$.

3. William Burnside (1852 – 1927), algébriste anglais. Son lemme, qu'il a attribué à Georg Frobenius (1849 – 1917), avait déjà été découvert par Augustin Louis Cauchy (1789 – 1857).