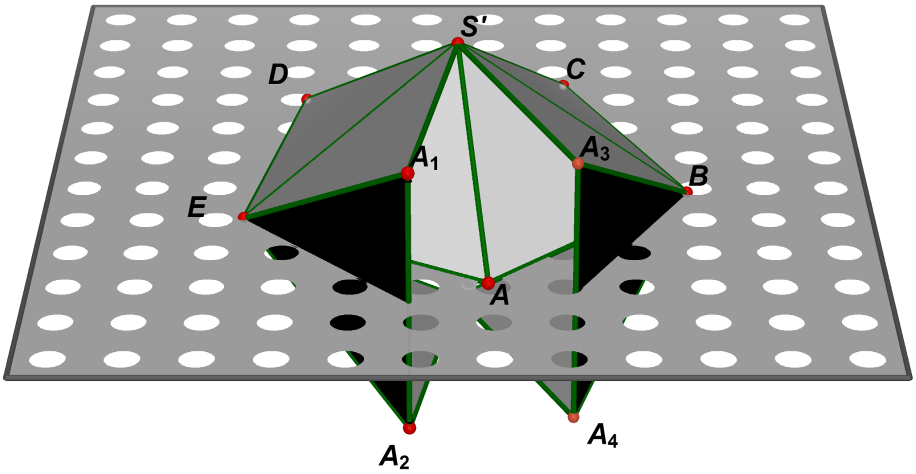
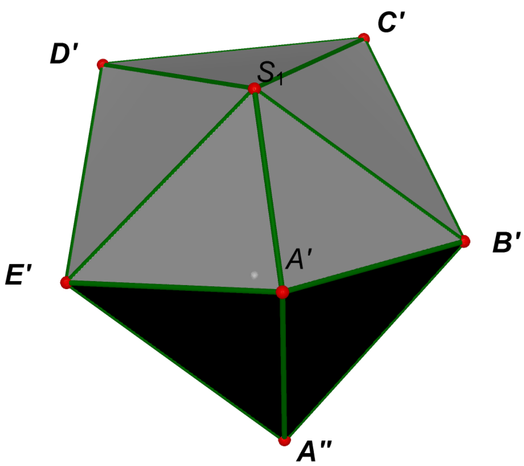
Le deltaèdre convexe à 12 faces

Jean Piquerez

Dans une parution du Collège Rousseau (Dispositif de recherche : polyèdres, Volume 1, par Pierre Bolli et Madeline Humbert), un exercice est consacré à répertorier et à décrire, grâce à la formule d'Euler, les deltaèdres convexes sachant qu'ils sont au nombre de huit. Rappelons qu'un deltaèdre est un polyèdre formé exclusivement de triangles équilatéraux. Sept d'entre eux sont cités et décrits dans la réponse de l'ouvrage, alors que le 8$^{\text{ème}}$, à 12 faces, n'est que suggéré sous la forme d'une phrase quelque peu sibylline, à savoir : « On obtient un tel polyèdre à partir d'une bipyramide pentagonale que l'on fait « bailler » (voir figures ci-dessous) en un sommet des bases communes pour y insérer 2 triangles équilatéraux. C'est désormais ce polyèdre qui retiendra l'attention dans cet article. Il peut se construire comme suit :



On construit la bipyramide $S' - ABCDE - S''$, puis on relève suffisamment par rotation autour d'une arête les 4 triangles $S'AE, S'AB, S''AE$ et $S''AB$ (en gris) pour y insérer (en noir) les deux triangles EA_1A_2 et BA_3A_4 et, enfin, on joint A_1 à A_3 et A_2 à A_4 afin d'obtenir la figure ci-dessous. Remarquons que C', D', A' et A'' sont des sommets d'ordre 4 et B', E', S_1 et S_2 sont, quant à eux, d'ordre 5.



Remarque : Il est fortement conseillé de faire un modèle en carton.

Je n'ai pas trouvé de construction géométrique simple pour déterminer les sommets. On peut bien entendu imaginer un système de tiges articulées de longueur 2, les points A_1, A_3 d'une part, et A_2, A_4 d'autre part, étant assujettis à se mouvoir dans des plans parallèles à $(BCDE)$ et à une distance 1 de ce dernier de sorte que A_1 et A_3 (respectivement A_2 et A_4) se rejoignent en A' (respectivement en A'') en tirant S' et S'' le long d'un cercle, intersection d'une sphère de rayon 2 et de centre D avec le plan médiateur de $[CD]$ jusqu'à ce que S' vienne en S_1 et S'' en S_2.

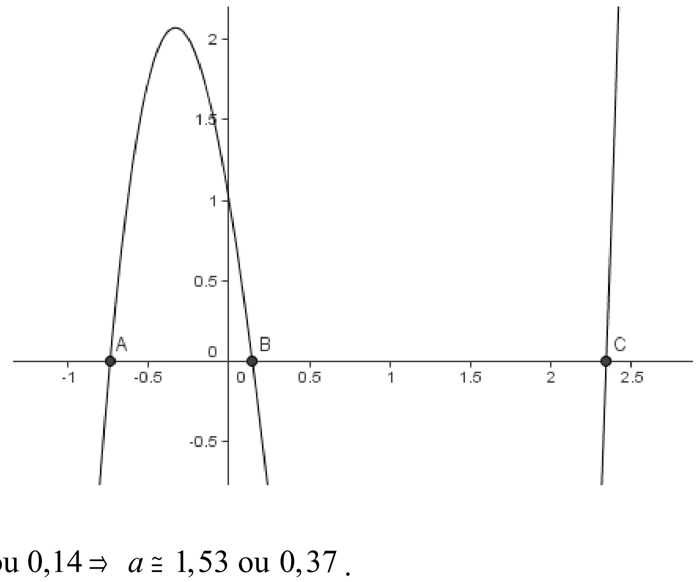
J'ai alors essayé de déterminer les coordonnées de ses huit sommets, en observant qu'il y avait, d'une part, deux plans de symétrie $(B'C'D'E')$ et $(S_1S_2A'A'')$ et que, d'autre part, un quart de tour, dans un sens ou dans l'autre, autour de la droite joignant le milieu M du segment $[C'D']$ avec le milieu N du segment $[A'A'']$, perpendiculaire commune aux droites $(C'D')$ et $(A'A'')$,suivie d'un demi tour selon une perpendiculaire au plan $(B'C'D'E')$ passant par le milieu de $[MN]$ semblait laisser en place ce polyèdre. Tenant compte de ces considérations, posons :

$D'(-a;-1;0), C'(-a;1;0), E'(b;-c;0), B'(b;c;0), A'(a;0;1), A''(a;0;-1), S_1(-b;0;c)$ et $S_2(-b;0;-c)$ et supposons que chaque arête soit de longueur 2 par commodité.

Comme $E'D' = E'S_1 = E'A' = 2$, il vient :

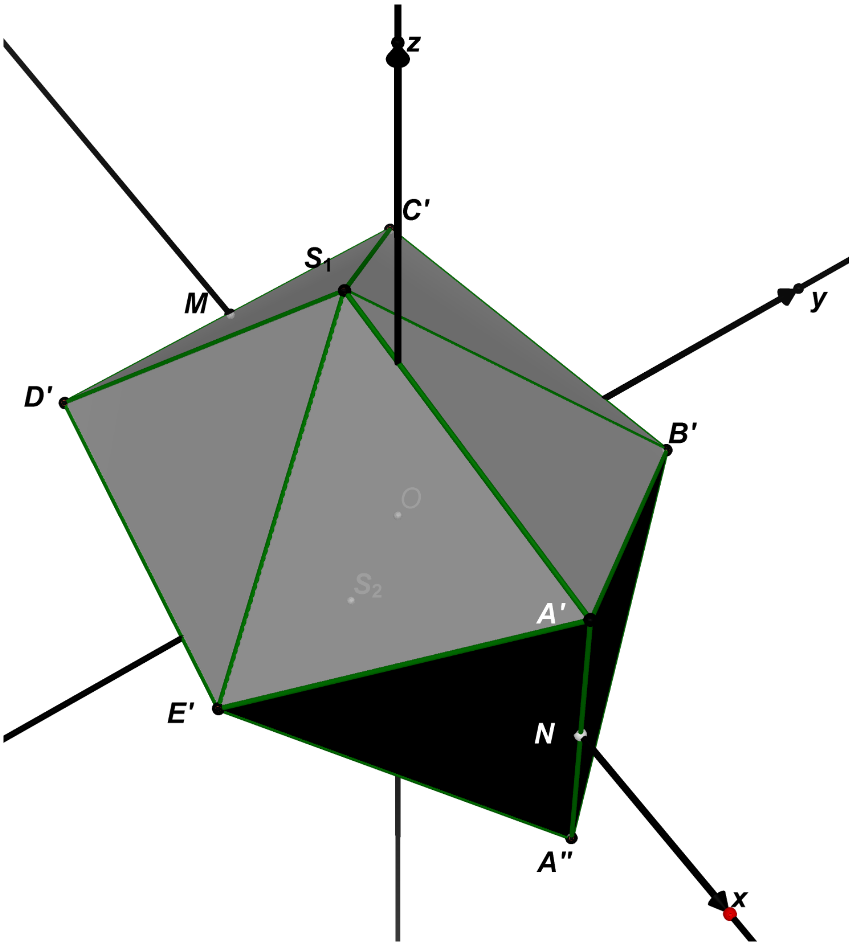
$$\left.\begin{array}{r}(b+a)^2+(c-1)^2=4\\(b-a)^2+c^2+1=4\\2b^2+2c^2=4\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{r}a^2+b^2+c^2+2ab-2c=3\quad(1)\\a^2+b^2+c^2-2ab=3\quad(2)\\b^2+c^2=2\quad(3)\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}c=2ab\quad(4)=(1)-(2)\\b=\dfrac{a^2-1}{2a}\quad(5)=(2)-(3)\end{array}\right\}\Rightarrow c=a^2-1$$

$$(a^2-1)^2\left(1+\frac{1}{4a^2}\right)=2\Rightarrow 4\alpha^3-7\alpha^2-6\alpha+1=0 \text{ avec } \alpha=a^2$$



$\alpha \cong 2{,}345$ ou $0{,}14 \Rightarrow a \cong 1{,}53$ ou $0{,}37$.

Il est manifeste que seule la 1ère valeur de a convient (on peut d'ailleurs montrer sans difficulté que $\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \alpha \leq \frac{3}{2} + \sqrt{3}$ en raisonnant dans le quadrilatère $MD'E'N$ sachant que $MD' = 1$, $D'E' = 2$, $E'N = \sqrt{3}$ et $S\ NMD' = 90^\circ$). Alors on trouve : $c \cong 1{,}34$ et $b \cong 0{,}44$, d'où :
$A_1(-1{,}53;-1;0), A_2(-1{,}53;1;0), A_3(0{,}44;-1{,}34;0), A_4(0{,}44;1{,}34;0)$ et
$B_1(1{,}53;0;1), B_2(1{,}53;0;-1), B_3(-0{,}44;0;1{,}34), B_4(-0{,}44;0;-1{,}34)$.
On peut alors facilement vérifier par le calcul la convexité de ce polyèdre.



Ce polyèdre possède deux symétries planaires S_p et S_q de plans $p = (Oxy)$ et $q = (Oxz)$ dont la composition est un demi-tour R_1 d'axe Ox. Matriciellement, on a :

$$M(S_p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, M(S_q) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } M(S_p \circ S_q) = M(S_q \circ S_p) = M(R_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Les composées d'un quart de tour d'axe (Ox) suivi d'un demi tour d'axe (Oz) conservent le polyèdre et sont des demi-tours R_{d_1} (respectivement R_{d_2}) d'axe d_1 (respectivement d_2) d'équations $x = 0$ et $y = z$ (respectivement $x = 0$ et $y = -z$) . Matriciellement, on a :

$$M(R_{d_1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M(R_{d_2}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarque : il n'est pas facile de voir que R_{d_1} et R_{d_2} *conservent le deltaèdre.*

La composition de ces nouvelles rotations avec S_p et S_q donne :

$$M(R_{d_1} \circ S_p) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = M(R_{d_2} \circ S_q) = M(f)$$

$$M(R_{d_2} \circ S_p) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = M(R_{d_1} \circ S_q) = M(g)$$

où f et g sont des involutions de déterminant -1 qui ne sont pas des symétries planaires.

Le groupe des symétries de ce deltaèdre a la table suivante :

	I	R_{d_1}	R_{d_2}	R_1	S_p	S_q	f	g
I	I	R_{d_1}	R_{d_2}	R_1	S_p	S_q	f	g
R_{d_1}	R_{d_1}	I	R_1	R_{d_2}	f	g	S_p	S_q
R_{d_2}	R_{d_2}	R_1	I	R_{d_1}	g	f	S_q	S_p
R_1	R_1	R_{d_2}	R_{d_1}	I	S_q	S_p	g	f
S_p	S_p	f	g	S_q	I	R_1	R_{d_1}	R_{d_2}
S_q	S_q	g	f	S_p	R_1	I	R_{d_2}	R_{d_1}
f	f	S_p	S_q	g	R_{d_1}	R_{d_2}	I	R_1
g	g	S_q	S_p	f	R_{d_2}	R_{d_1}	R_1	I

Il est isomorphe à $D_2 \times C_2 \cong C_2 \times C_2 \times C_2$.