A propos des équations différentielles linéaires d'ordre 2

Paul Jolissaint

24 mai 2004

1 Introduction

Considérons une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants

$$y'' + py' + qy = 0,$$

où p et q sont des nombres réels. Dans la plupart des ouvrages d'analyse utilisés dans les lycées, on présente les solutions d'une telle équation en parachutant deux solutions linéairement indépendantes de la forme $e^{r_1 x}$ et $e^{r_2 x}$ si le discriminant du polynôme caractéristique $x^2+px+q = (x-r_1)(x-r_2)$ est positif, et – ce qui me dérange le plus – de la forme e^{rx} et xe^{rx} si le discriminant est nul. En effet, dans le second cas, on lit la plupart du temps l'argument que voici concernant la solution xe^{rx} : "on vérifie que $y(x) = cxe^{rx}$ est également solution de l'équation." C'est bien sûr vrai, mais c'est frustrant car on trouve régulièrement un ou plusieurs élèves pour demander comment on arrive à une telle solution. Il est délicat d'invoquer les transformations en systèmes d'équations d'ordre 1, par exemple, qui font intervenir des bizarreries comme le wronskien ou des expressions du genre e^{xA} où A désigne la matrice du système. Le "parachutage" de ces solutions est d'autant plus dérangeant que, dans le cas des équations linéaires d'ordre 1, les solutions s'obtiennent par quadrature, c'est-à-dire en intégrant, puisque l'on se ramène à une équation à variables séparables.

Or, j'ai trouvé dernièrement, en préparant mon cours sur les équations différentielles, un moyen de déterminer la solution générale de $y'' + py' + qy = 0$ en me ramenant à des équations d'ordre 1, sans parler de systèmes d'équations différentielles. Et surtout, comme nous le verrons, la solution xe^{rx} apparaît de façon très naturelle lorsque le discriminant du polynôme caractéristique vaut zéro.

Mon propos est de présenter cette méthode sans prétendre à l'originalité, bien que je ne l'aie trouvée nulle part dans les cours élémentaires sur le sujet.

2 Une méthode de résolution de $y'' + py' + qy = 0$

Soit l'équation linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants (et réels)

$$y'' + py' + qy = 0.$$

On commence par observer qu'une telle expression rappelle l'équation de degré 2 :

$$x^2 + px + q = 0.$$

Les formules de Viète permettent d'exprimer ses coefficients p et q à l'aide des racines r_1 et r_2 ainsi : $p = -(r_1 + r_2)$ et $q = r_1 r_2$.

Pour l'instant, r_1 et r_2 peuvent être distincts ou égaux, cela n'a aucune importance,et, même si les considérations ci-dessous ont un sens lorsque r_1 et r_2 sont complexes, on peut supposer, dans un premier temps, qu'ils sont réels.

Récrivons donc l'équation différentielle en utilisant les relations de Viète :

$$y'' - (r_1 + r_2)y' + r_1 r_2 y = 0$$

ou encore

$$(y' - r_1 y)' - r_2(y' - r_1 y) = 0.$$

En posant $z = y' - r_1 y$, la nouvelle fonction inconnue z satisfait l'équation linéaire d'ordre 1 à coefficients constants

$$z' - r_2 z = 0$$

qui admet la solution générale

$$z(x) = \beta' e^{r_2 x}$$

où β' est une constante d'intégration. A son tour, y satisfait l'équation linéaire d'ordre 1 :

$$y' - r_1 y = \beta' e^{r_2 x}$$

dont la solution générale est de la forme

$$y(x) = \alpha e^{r_1 x} + y_1(x)$$

où α est une constante et $y_1(x)$ peut être choisie de la forme $y_1(x) = C(x)e^{r_1 x}$, en utilisant la méthode de variation des constantes. Or, il est bien connu que $C(x)$ satisfait : $C'(x) = \beta' e^{(r_2 - r_1)x}$. Pour intégrer $C'(x)$, nous devons maintenant distinguer deux cas selon que r_1 et r_2 sont distincts ou égaux :

Premier cas : $r_1 \neq r_2$. On obtient sans difficulté $C(x) = \beta e^{(r_2 - r_1)x}$ avec $\beta = \dfrac{\beta'}{r_2 - r_1}$, donc $y_1(x) = \beta e^{r_2 x}$. La solution générale de l'équation de départ est finalement

$$y(x) = \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}.$$

Deuxième cas : Si $r_1 = r_2 := r$, alors $C'(x) = \beta'$ est une constante, donc $C(x) = \beta' x$ et on obtient $y_1(x) = \beta x e^{rx}$ qui donne en fin de compte

$$y(x) = (\alpha + \beta x)e^{rx},$$

où l'on a posé $\beta = \beta'$.

Remarques.
(1) Si le discriminant du polynôme caractéristique $x^2 + px + q$ est négatif, le premier cas s'applique également comme on l'a observé ci-dessus. Ici, $r_1 = r + is$ et $r_2 = r - is$ avec $r,s \in \mathbb{R}$, et, en utilisant la formule de Moivre, on a

$$e^{(r \pm is)x} = e^{rx}(\cos(sx) \pm i \sin(sx))$$

qui permet d'exprimer $y(x)$ sous la forme :

$$y(x) = \alpha e^{rx} \cos(sx) + \beta e^{rx} \sin(sx).$$

(2) Même si l'on n'en rencontre pas souvent dans les lycées, la méthode s'applique également aux équations d'ordre supérieur. En effet, par exemple si $y''' + py'' + qy' + ry = 0$ est une équation linéaire homogène d'ordre 3, notons r_1, r_2 et r_3 les racines de son polynôme caractéristique, et supposons, pour fixer les idées, qu'elles sont distinctes. L'équation s'écrit :

$$y''' - (r_1 + r_2 + r_3)y'' + (r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3)y' - r_1r_2r_3y = 0,$$

que l'on arrange ainsi :

$$(y' - r_1y)'' - (r_2 + r_3)(y' - r_1y)' + r_2r_3(y' - r_1y) = 0.$$

En procédant comme ci-dessus, on obtient facilement :

$$y(x) = \alpha e^{r_1x} + \beta e^{r_2x} + \gamma e^{r_3x}$$

où α, β et γ sont des constantes.

Lycée cantonal de Porrentruy,
Place Blarer-de-Wartensee 2,
CH-2900 Porrentruy,
paul.jolissaint@jura.ch