Philippe Drompt et Patrick Hochuli

Option spécifique
Physique et application des mathématiques

Classes 1D et 1E

3 heures

Si un résultat vous semble manquer pour poursuivre la résolution d'un problème, prenez une valeur raisonnable pour la suite des calculs en indiquant votre choix. Vous devez décrire les étapes qui vous conduisent à la solution. Les problèmes 4 et 5 sont à résoudre sur une feuille séparée (??).

Le matériel autorisé pour cet examen est le suivant :
- Une machine à calculer non programmable, sans écran graphique.
- Le « Formulaires et Tables »

Problème 1 ***13 points***

Un cylindre homogène de masse $m = 500$ g et de rayon $r = 3$ cm est mis en rotation sur lui-même. Sa vitesse de rotation est de $\omega_0 = 100\,\frac{\text{tours}}{\text{s}}$. Il est déposé sur la piste horizontale (à gauche sur le schéma) et se met à rouler en glissant. Il accélère ainsi un certain temps, jusqu'à ce qu'il cesse de glisser et roule alors à vitesse constante (à droite sur le schéma).
Le coefficient de glissement cinétique du cylindre sur le sol est $\mu_c = 0{,}7$. Il n'y a pas de frottement dû à l'air.

1.1 Poser les équations de translation qui décrivent le cylindre pendant son accélération.

1.2 Poser les équations de rotation du cylindre pendant le même temps.

1.3 Calculer la grandeur de l'accélération angulaire pendant la phase de glissement.

1.4 Calculer le temps que met ce cylindre pour accélérer et atteindre sa vitesse constante.

1.5 Calculer l'énergie cinétique initiale du cylindre.

1.6 Calculer l'énergie cinétique du cylindre lorsqu'il roule à vitesse constante.

1.7 Interpréter cette différence d'énergie cinétique.

Problème 2 ***9 points***

On place un glaçon de masse $m_1 = 200$ g à une température de $T_1 = -10$ °C dans un récipient de masse négligeable contenant $m_2 = 800$ g d'eau à $T_2 = 15$ °C. On admet, dans ce problème, qu'il n'y a pas de perte de chaleur.

2.1 Calculer la température et l'état final du système en précisant bien ce que l'on a dans le récipient.

On chauffe le tout à l'aide d'un système électrique d'une puissance de 500 W pendant deux minutes.

2.2 Calculer alors la température et l'état final du système après chauffage.

Problème 3 ***9 points***

Dans ce problème, on s'intéresse à une réaction du noyau de l'atome. On considère ainsi un atome ionisé, les électrons périphériques sont absents.

Un noyau radioactif de calcium ${}^{45}_{20}\mathrm{Ca}$ se désintègre spontanément en un atome de scandium ${}^{45}_{21}\mathrm{Sc}$ et une particule β^- (un électron). Juste après la transformation, le noyau de scandium et l'électron produits sont distants de $3\cdot 10^{-15}$ m. L'électron est éjecté à très grande vitesse et, lorsqu'il est infiniment loin du noyau, sa vitesse mesurée est de $3\cdot 10^{8}\ \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ (ce qu'on admet comme non relativiste).

3.1 Calculer la force électrique entre le noyau de scandium et l'électron juste après la transformation.

3.2 Calculer l'accélération de l'électron à cet endroit.

3.3 Calculer l'énergie potentielle de l'électron au même endroit.

3.4 Calculer l'énergie cinétique de l'électron au même endroit.

3.5 Calculer l'intensité du champ électrique dû au noyau de scandium, au niveau de l'électron produit.

Problème 4 ***10 points***

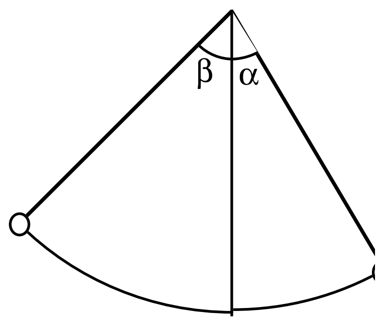
4.1 On se propose d'évaluer, à l'aide de la méthode des trapèzes, l'intégrale $\int_0^1 e^{\frac{1}{2}x^2}\,dx$.

a) Trouver le nombre d'intervalles n minimum pour que l'erreur soit inférieure à 0,001.
b) Calculer avec $n = 5$ la valeur de cette intégrale.

4.2 Résoudre $y'' - 6y' + 13y = 26x$.

Problème 5 ***9 points***

Un pendule est formé d'un fil de masse négligeable au bout duquel on attache un objet de 200 g. On l'incline de β = 45° par rapport à la verticale et on le lâche. On suppose qu'il existe un frottement constant de 0,4 N. On prendra 10 m/s^2 pour g.
Le but de l'exercice est de trouver l'angle α maximal atteint par le pendule de l'autre côté. On va décomposer cet exercice en deux selon les questions ci-dessous :



5.1 Montrer que l'angle α cherché est la solution de l'équation :

$$5\cos(\alpha)-\alpha=\frac{5\sqrt{2}}{2}+\frac{\pi}{4}$$

5.2 Résoudre l'équation donnée ci-dessus par la méthode de Newton en faisant trois itérations.