

MATHÉMATIQUES

- temps à disposition : 4 heures
 - note maximale (6) pour 4 problèmes justes
 - extrait des "Formulaires et Tables" à disposition
 - machine à calculer (non graphique et non programmable) autorisée
-

Problème 1

Soient les points $A(4; -1; 3)$, $B(15; 9; 5)$ et $D(14; -11; -2)$.

1. Montrer que le triangle ABD est rectangle et isocèle en A .
2. Calculer les coordonnées du point C tel que $ABCD$ soit un carré.
3. Établir une équation cartésienne du plan (ABD) .
4. Écrire une représentation paramétrique de la droite n perpendiculaire au plan (ABD) et passant par le centre du carré $ABCD$.
5. Soit $S(\frac{33}{2}; -6; \frac{31}{2})$. Calculer la distance de S au plan (ABD) .
6. Calculer le volume de la pyramide $SABCD$.
7. Calculer l'angle que font l'arête SA et le plan (ABD) .
8. Calculer l'aire de la face SAB .

Problème 2

Les diverses parties de ce problème sont indépendantes les unes des autres.

1. Montrer que les courbes représentatives des fonctions

$$f(x) = (1+x)e^x \quad \text{et} \quad g(x) = 1 + \sin(2x)$$

sont tangentes au point d'abscisse $x = 0$.

2. (a) Pour quelle valeur de n a-t-on $\int_0^1 x^{2n} dx = \frac{1}{9}$?
(b) Calculer $\int (1+x) \ln(x) dx$.
3. Vérifier que les courbes d'équations $y = e^{-x+2}$ et $y = \frac{1}{2}x$ se coupent au point d'abscisse $x = 2$, puis calculer l'aire bornée délimitée par ces deux courbes et l'axe Oy .
4. Soit la parabole d'équation $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x$.

On appelle P un point quelconque d'ordonnée positive de la parabole et C sa projection orthogonale sur l'axe Ox . On considère aussi les points d'intersection A et B de la parabole avec l'axe des x tels que A est à gauche de B .

Quelles sont les coordonnées du point P pour lesquelles l'aire du triangle PAC est maximale ?

(suite au verso)

Problème 3

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{2x^4}{x^3 - 1}$.

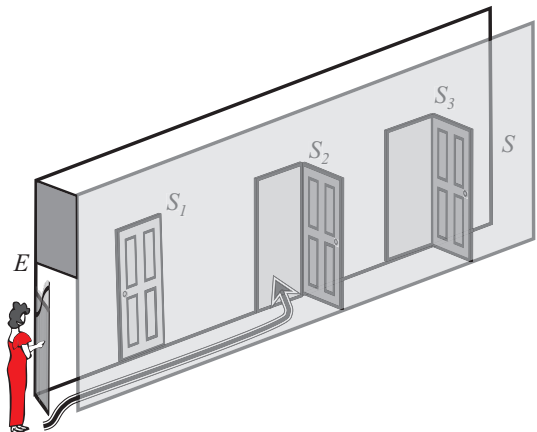
1. Étudier la fonction f . Durant l'étude, vous montrerez que la dérivée seconde est la suivante :

$$f''(x) = \frac{12x^2(x^3 + 2)}{(x^3 - 1)^3}$$

2. Déterminer la pente de la tangente au point d'inflexion.
3. Représenter graphiquement la fonction f (unité : 2 carrés ou 1 cm sur feuille millimétrée).

Problème 4

Pour sortir d'une maison hantée, Maria doit passer par un étrange couloir le long duquel se trouvent trois portes fermées, notées S_1 , S_2 et S_3 . On accède à ce couloir par le portail E . Au moment où on ouvre ce portail, chacune des trois portes a une chance sur deux de s'ouvrir par enchantement. L'étroitesse du couloir oblige Maria à sortir du couloir par la première porte ouverte qu'elle rencontre ; si les trois portes sont fermées, elle doit sortir du couloir par l'issue notée S . Quand Maria a quitté le couloir, le portail et toutes les portes ouvertes se referment.



1. Maria ouvre le portail.
 - (a) Calculer la probabilité que Maria soit confrontée à la configuration :
$$S_1 \text{ est fermée} \quad S_2 \text{ est fermée} \quad S_3 \text{ est ouverte}$$
 - (b) Calculer la probabilité qu'exactement deux des trois portes soient ouvertes.
 - (c) On note p_i la probabilité de sortir du couloir par la porte S_i . Calculer p_1 , p_2 et p_3 .
 - (d) Sachant que S_2 est ouverte, calculer la probabilité que Maria sorte du couloir par la porte S_3 .
2. Lorsque Maria passe par les portes S_1 ou S_3 , son chemin la ramène au portail E . En revanche, si elle passe par S_2 ou par S , elle sort définitivement de la maison hantée.
 - (e) Quelle est la probabilité que Maria sorte de la maison en ne passant qu'une seule fois dans le couloir ?
 - (f) Quelle est la probabilité que Maria passe au plus trois fois dans le couloir avant de sortir de la maison ?
 - (g) Sachant qu'au deuxième passage Maria a franchi la porte S_1 , calculer la probabilité qu'elle sorte de la maison au quatrième passage.
3. Cette fois, 8 personnes franchissent successivement le portail E .

Quelle est la probabilité qu'exactement 6 de ces personnes passent par S_2 à leur premier passage ?
4. On suppose maintenant que n personnes franchissent **une seule fois** chacune le portail E .

Calculer la plus petite valeur de n telle que la probabilité qu'au moins une de ces personnes sorte de la maison hantée soit supérieure à 95% ?

Problème 1

1. Il est rectangle en A car $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AD} = 0$. et il est isocèle en A car $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AD}\|$.
2. On trouve $C(25; -1; 0)$.
3. On trouve $(ABD) : 2x - 5y + 14z = 55$.
4. la description paramétrique de la droite est $n : \begin{cases} x = 14.5 + 2\lambda \\ y = -1 - 5\lambda \\ z = 1.5 + 14\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$
5. La distance vaut 15.
6. Le volume vaut 1125.
7. L'angle cherché est $\cong 54.736^\circ$.
8. L'aire du triangle SAB vaut $\cong 125.779$.

Problème 2

1. Il suffit de vérifier que $f(0) = g(0)$ et que $f'(0) = g'(0)$. Avec un poil plus de calculs, on a l'équation de cette tangente : $y = 1 + 2x$.
2. (a) $n = 4$ (en résolvant une équation et non par tâtonnement !)
(b) On intègre par parties : $\int (1+x) \ln(x) dx = (x + \frac{1}{2}x^2) \ln(x) - (x + \frac{1}{4}x^2) + C$
3. Notons $f(x) = e^{-x+2}$ et $g(x) = \frac{1}{2}x$.
D'abord, on doit vérifier que $f(2) = g(2)$. Puis à l'aide d'une esquisse de f et de g , on s'aperçoit qu'à gauche du point d'intersection, l'exponentielle est au-dessus de la droite. L'aire cherchée est ainsi $\int_0^2 (e^{-x+2} - \frac{1}{2}x) dx \cong 5.389$.
4. L'aire est donnée par $A(x) = \frac{1}{4}(6x^2 - x^3)$; le domaine d'intérêt est $D = [0, 6]$.
Les coordonnées du point P où se trouve le triangle d'aire maximale sont $P(4; 4)$.

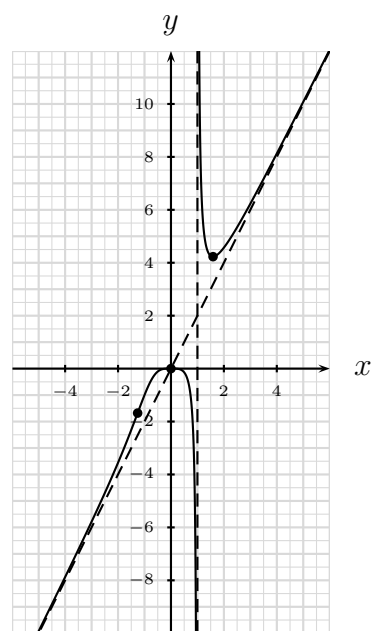
Problème 3

1. On a $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. La fonction n'est donc ni paire, ni impaire.
Le bord de D est $\partial D = \{1, \pm\infty\}$.
Comportement local : asymptote verticale en $x = 1$.
Comportement en $\pm\infty$: asymptote oblique $y = 2x$.

$$f'(x) = \frac{2x^3(x^3 - 4)}{(x^3 - 1)^2} \quad f''(x) = \frac{12x^2(x^3 + 2)}{(x^3 - 1)^3}$$

On a un zéro et un maximum local en $(0; 0)$, un minimum local en $\cong (1.59; 4.23)$ et un point d'inflexion en $\cong (-1.26; -1.68)$.

2. La pente au point d'inflexion est $\frac{8}{3} \cong 2.67$.
3. Le graphe de f se trouve ci-contre.

**Problème 4**

1. a) 0.125 b) 0.375 c) $p_1 = 0.5, p_2 = 0.25, p_3 = 0.125$ d) 0
2. e) 0.375 f) $\frac{387}{512}$ g) $\frac{15}{64}$ 3. $\cong 0.003845$ 4. Au minimum 7 personnes.