Lycée cantonal
Porrentruy

Maturité académique 2008
OS Biologie - Chimie

MATHÉMATIQUES

Temps à disposition : 4 heures
Note maximale (6) pour 5 problèmes justes
Fascicule "Extrait des formulaires et tables" à disposition
Machine à calculer non graphique et non programmable autorisée

Problème 1

Étudier, puis représenter (unité : 1 cm) la courbe d'équations paramétriques

$$x(t) = \frac{t^2}{t+1} \qquad \text{et} \qquad y(t) = \frac{t^3}{t+1}.$$

Problème 2

On considère le triangle de sommets $A(21; 4; 18)$, $B(5; 12; 2)$ et $C(1; 20; 10)$.

2.1 Prouver que le triangle ABC est rectangle en B.

La rotation de ce triangle autour de l'axe (AB) engendre un cône γ.

2.2 Écrire l'équation cartésienne du plan π contenant la base du cône γ.

2.3 Calculer l'angle que forme la génératrice (AC) avec le plan π.

2.4 Calculer le volume du cône γ.

2.5 Écrire une représentation paramétrique de la droite t contenue dans le plan π et tangente au cône γ au point C.

2.6 Écrire l'équation cartésienne de la sphère circonscrite au cône γ.

Problème 3

a) Soit h un endomorphisme de $\mathbf{R^2}$ qui correspond géométriquement à une symétrie orthogonale d'axe la droite d'équation $y = ax$. Dans la base canonique (e_1, e_2), on donne les vecteurs $v_1 = (1; a)$ et $v_2 = (a; -1)$.

1) Les vecteurs v_1 et v_2 sont deux vecteurs propres de h. Justifier.
2) Écrire la matrice H' de h dans la base (v_1, v_2).
3) Pour $a = 2$, déterminer la matrice H de h dans la base canonique.

b) Soit la fonction complexe

$$f(z) = \frac{iz+2}{z-i}.$$

1) Déterminer les points fixes de la fonction f.
2) Déterminer $f(x + yi)$ sous forme cartésienne.
3) Déterminer l'ensemble des points z dont l'image $f(z)$ est purement réelle.

Suite au verso

Problème 4

Un billard comporte six trous permettant de gagner respectivement $100, 75, 75, 75, 50$ et 50 points.
Une partie consiste à lancer successivement trois boules. Chaque boule lancée se place dans un trou et il ne peut pas y avoir plus d'une boule par trou. On suppose que, pour chaque boule, il y a équiprobabilité de se placer dans l'un des trous encore vides.
Chaque boule rapporte le nombre de points correspondant au trou qu'elle occupe.

a) Une personne joue une partie. Calculer la probabilité des événements suivants :

A : les trois boules rapportent chacune 75 points

B : la somme des points obtenus vaut 225

C : une des boules rapporte 100 points sachant que la somme des points obtenus vaut 200.

b) Calculer la moyenne de la somme des points obtenus lors d'une partie.

c) Dix personnes jouent chacune une partie. Calculer la probabilité des événements suivants :

D : quatre personnes obtiennent un total de 250 points

E : au moins une personne obtient un total de 250 points

F : cinq personnes obtiennent un total de 225 points et deux personnes un total de 250 points.

d) Une personne joue 1000 parties. Calculer une valeur approximative de la probabilité que le nombre de parties donnant un total de 250 points soit compris entre 140 et 165 (bornes incluses).

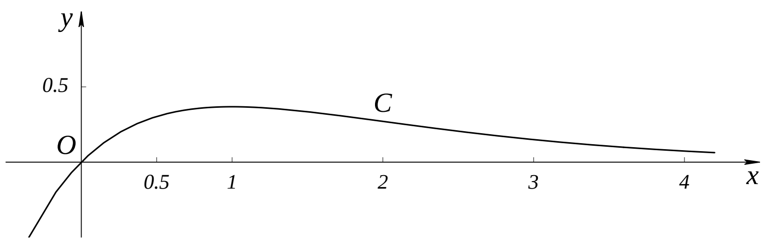
Problème 5

a) Soit l'équation différentielle suivante :

$$xy' - 2y = x^3 e^{-x}$$

1) Déterminer la solution générale de cette équation.
2) Déterminer la solution particulière de cette équation qui possède un point à tangente horizontale d'abscisse $x = 1$.

b) Soit la fonction $f(x) = xe^{-x}$ (qui n'est pas la solution de l'équation différentielle ci-dessus). Soit C le graphe de f représenté ci-dessous.



1) Soit D le domaine délimité par l'axe Ox, la courbe C et la verticale $x = t$, $t > 0$.
   – Calculer l'aire $S(t)$ du domaine D.
   – Calculer la limite de $S(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$.
2) Soit le point P d'abscisse $x > 0$ qui appartient à la courbe C, et P' la projection orthogonale de P sur l'axe Ox. Pour quelle valeur de x l'aire du triangle OPP' est-elle maximale ?

P1. 1. Domaine : $\mathcal{D}_x = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $\mathcal{D}_y = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

2. Variation : $x'(t) = \dfrac{t(t+2)}{(t+1)^2}$, $y'(t) = \dfrac{t^2(2t+3)}{(t+1)^2}$

3. Points particuliers : - point singulier : $t=0$, $S(0 ; 0) = H_1$
- points à tangente horizontale : $t=0$, $H_1(0 ; 0)$; $t = -1{,}5$, $H_2(-4{,}5 ; 6{,}75)$
- point à tangente verticale : $t=-2$, $V(-4 ; 8)$

4. Asymptotes : A.V. : néant ; A.H. : néant ; A.O. : $y = -x+1$ (quand $t \to -1$)

5. Points d'intersection : a) avec l'axe des x : $O(0 ; 0)$ b) avec l'axe des y : $O(0 ; 0)$

6. Graphique …

P2. 1. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$

2. Plan π: $2x - y + 2z - 2 = 0$

3. Angle : 63,43°

4. Volume : $1152\pi = 3619{,}11$

5. Droite t : $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 20 + 2t \\ z = 10 - t \end{cases}$

6. Sphère : centre $\Omega(11 ; 9 ; 8)$ et rayon 15 , équation $(x-11)^2 + (y-9)^2 + (z-8)^2 = 225$

P3. a) 1) v_1 = vecteur directeur de la droite, donc $h(v_1) = 1 \cdot v_1$, valeur propre $\lambda_1 = 1$
v_2 = vecteur orthogonal à la droite, donc $h(v_2) = -1 \cdot v_2$, valeur propre $\lambda_2 = -1$

2) $H' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ 3) $H = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$

b) 1) Points fixes de f : $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = -1 + i$

2) $f(x+yi) = \dfrac{x}{x^2+(y-1)^2} + \dfrac{x^2+y^2-3y+2}{x^2+(y-1)^2}$

3) $f(z)$ est réel si z appartient au cercle de centre $(0 ; 1{,}5)$ et rayon 0.5, sans le point i

P4. a) $P(A) = \dfrac{1}{20}$, $P(B) = \dfrac{7}{20}$, $P(C) = \dfrac{1}{7}$

b) Moyenne : 212,5 points

c) $P(D) = 0{,}0401$, $P(E) = 0{,}803$, $P(F) = 0{,}0372$

d) Approximation : $P(140 \le X \le 165) \cong \phi(1{,}37) - \phi(-0{,}93) \cong 0{,}738$

P5. a) 1) Solution générale : $y = -x^2 e^{-x} + cx^2$ 2) Solution particulière : $y = -x^2 e^{-x} + \dfrac{1}{2e} x^2$

b) 1) Aire $S(t) = \dfrac{-t}{e^t} - \dfrac{1}{e^t} + 1$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} S(t) = 0 - 0 + 1 = 1$.

2) Aire du triangle = $0{,}5\, x^2 e^{-x}$ L'aire est maximale pour $x = 2$