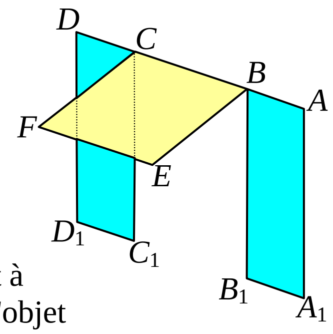
Problème 1

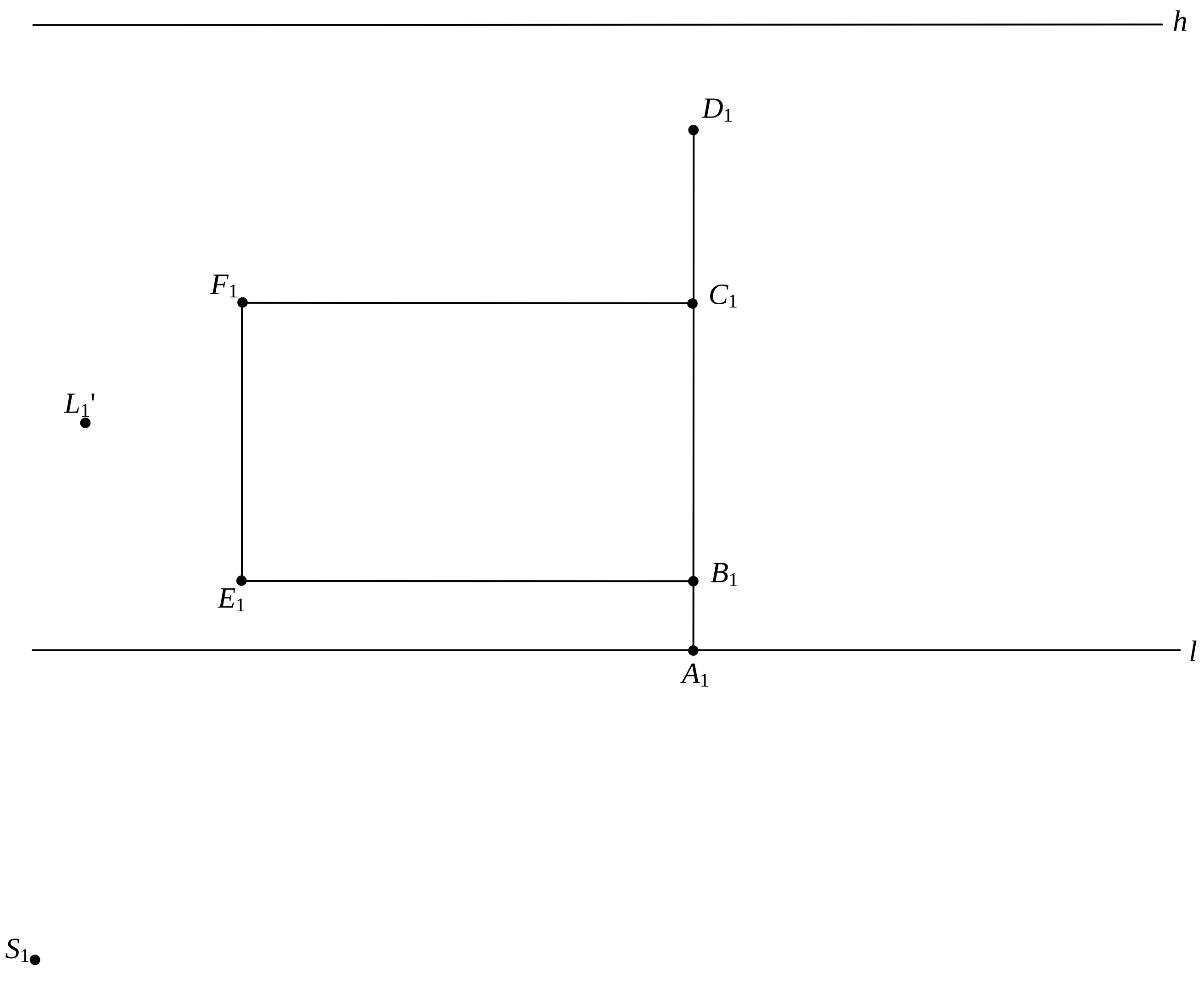


On considère l'objet ci-contre. La cote des points A, B, C et D est 7.5 cm et celle de E et F est 7 cm. Les points A_1, B_1, C_1 et D_1 sont les projections verticales dans le sol des points A, B, C et D.

L'

a) Construire sur l'écran donné par l et à partir du point S la perspective de l'objet ci-contre. La ligne d'horizon h est donnée.

b) L'objet est éclairé par une source lumineuse ponctuelle placée en L. La perspective de L est donnée ainsi que celle de sa projection sur le sol. Dessiner l'ombre de l'objet sur le sol et sur lui-même.

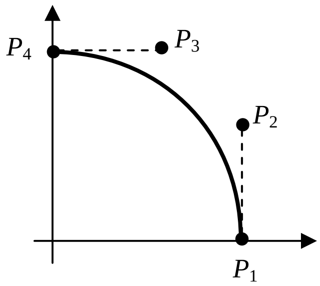


Problème 2

On rappelle qu'un arc de Bézier contrôlé par quatre points P_1, P_2, P_3, P_4 est formé des points P donnés par l'égalité

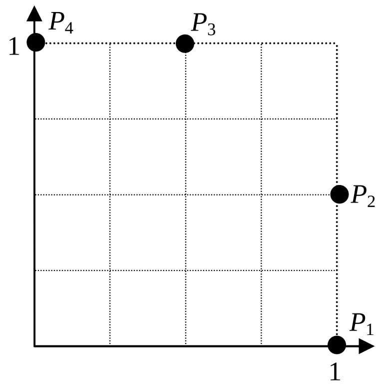
$\overrightarrow{OP} = (1-t)^3\overrightarrow{OP_1} + 3t(1-t)^2\overrightarrow{OP_2} + 3t^2(1-t)\overrightarrow{OP_3} + t^3\overrightarrow{OP_4}$, t variant de 0 à 1.

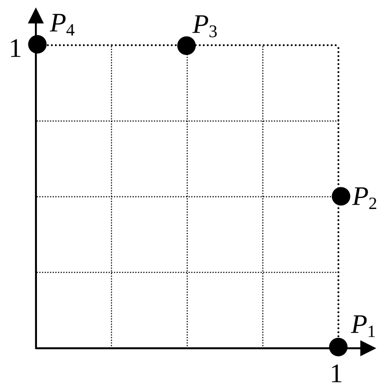
On souhaite approcher le quart de cercle de rayon 1 centré à l'origine par un arc de Bézier dont les points de contrôle sont P_1, P_2, P_3 et P_4 avec $P_1(1;0)$ et $P_4(0;1)$. Pour que l'arc de Bézier ressemble à un arc de cercle, on choisit $P_2(1;k)$ et $P_3(k;1)$.



Il s'agit de trouver une valeur de k de sorte que l'arc de Bézier ressemble le plus possible au quart de cercle.

a) On pose $k = ½$.
   Dessiner, par construction géométrique précise,
   le point de l'arc de Bézier pour $t = ½$ et le point de l'arc de Bézier pour $t = ¼$.

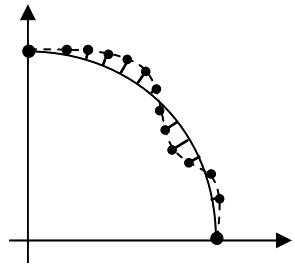




b) On pose $k = ½$.
   Calculer le point de l'arc de Bézier pour $t = ½$.
   Calculer la distance entre ce point et l'arc de cercle.

c) Trouver la valeur de k pour laquelle l'arc de Bézier, défini par les points $P_1(1;0)$, $P_2(1;k)$, $P_3(k;1)$ et $P_4(0;1)$, passe par le point $M\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ en $t = \frac{1}{2}$.

d) Pour trouver une bonne valeur de k, de sorte que l'arc de Bézier, défini par les points $P_1(1;0)$, $P_2(1;k)$, $P_3(k;1)$ et $P_4(0;1)$, ressemble le plus possible à un arc de cercle de rayon 1, on applique une méthode des *moindres carrés*.



   1) Dire pourquoi la distance entre un point $P(x;y)$ et l'arc de cercle est donnée par $d = \left|\sqrt{x^2 + y^2} - 1\right|$.

   2) On prend 101 points ($t = 0$, $t = 1/100$, $t = 2/100$, … , $t = 1$) de l'arc de Bézier défini par $P_1(1;0)$, $P_2(1;k)$, $P_3(k;1)$ et $P_4(0;1)$ et on cherche la valeur de k pour laquelle la somme des carrés des distances entre ces 101 points et l'arc de cercle est minimale.
   Écrire un programme qui calcule ces sommes, pour k variant entre 0,4 et 0,6, et qui affiche la valeur de k, au millième près, correspondant à la plus petite de ces sommes.

Problème 3

On donne l'équation différentielle du premier ordre $y' = x^2 + y$ et une condition initiale $y(0) = -1$, autrement dit $y = -1$ lorsque $x = 0$. On note $y = y(x)$ la solution de l'équation qui respecte la condition initiale.

a) Par la méthode d'Euler, estimer $y(3)$ en trois pas.
Dans un repère orthonormé, représenter graphiquement les résultats obtenus en reportant et reliant les points calculés.

D'après les résultats ci-dessus, le graphe de la fonction y passe par un minimum *M* dont l'abscisse est dans l'intervalle $[0;3]$.

b) Programmer la recherche de l'abscisse de *M* en employant la méthode de Runge.

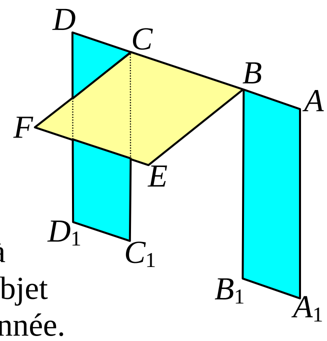
c) Vérifier que la solution de l'équation différentielle dont le graphe passe par le point $(0;-1)$ est la fonction $y = e^x - x^2 - 2x - 2$.

d) En appliquant la méthode de bissection (Bolzano) à la dérivée de *y*, trouver un intervalle de longueur 1/4 contenant l'abscisse du minimum *M*. Vérifier au préalable que $[0;2]$ est un bon intervalle pour amorcer la recherche.

La fonction $y = e^x - x^2 - 2x - 2$ est également la solution de l'équation différentielle du deuxième ordre $y'' = y' + 2x$ avec les conditions initiales $y(0) = -1$ et $y'(0) = -1$.

e) Écrire un programme qui estime les coordonnées de M en résolvant cette nouvelle équation différentielle par la méthode d'Euler avec un pas de 1/1024.

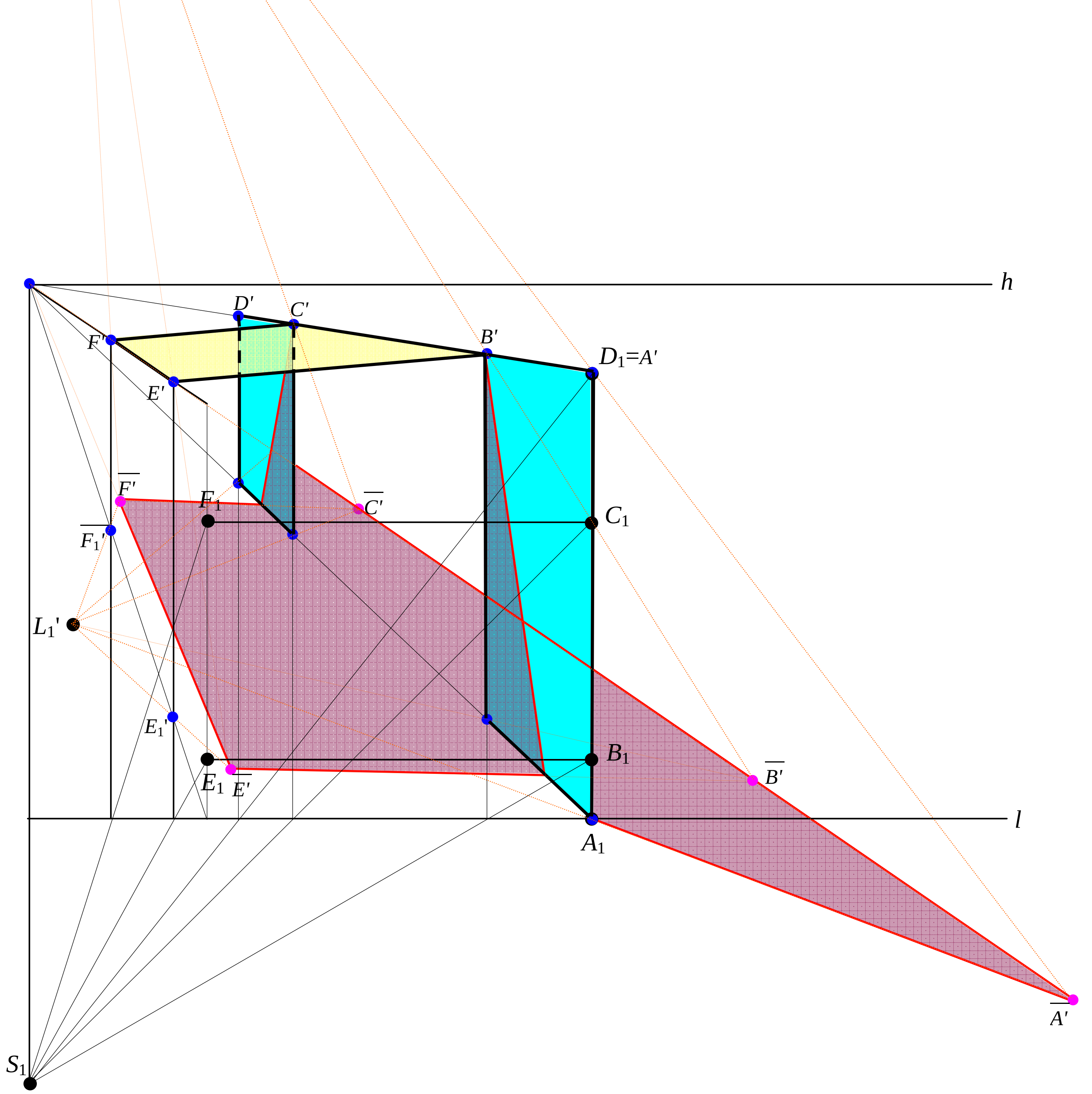
Problème 1 (perspective)



On considère l'objet ci-contre. La cote des points A, B, C et D est 7.5 cm et celle de E et F est 7 cm. Les points A_1, B_1, C_1 et D_1 sont les projections des points A, B, C et D sur le sol.

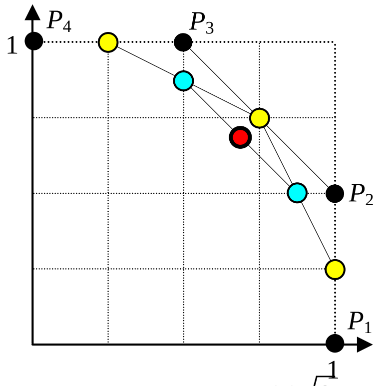
a) Construire sur l'écran donné par l et à partir du point S la perspective de l'objet ci-contre. La ligne d'horizon h est donnée.

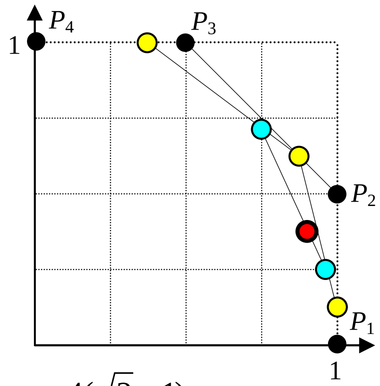
b) L'objet est éclairé par une source lumineuse ponctuelle placée en L. La perspective de L est donnée ainsi que celle de sa projection sur le sol. Dessiner l'ombre de l'objet sur le sol et sur lui-même



Problème 2

a)





b) $M\left(\frac{11}{16};\frac{11}{16}\right)$, $\text{dist} = 1-\frac{11\sqrt{2}}{16} \cong 0{,}0277$

c) $k = \frac{4(\sqrt{2}-1)}{3} \cong 0{,}552$

d)
```
Private Sub Command1_Click()
   Let sdmin = 100
   For k = 0.4 To 0.6 Step 1 / 1000
     Let sd = 0
     For t = 0 To 1 Step 1 / 100
       Let x = (1 - t) ^ 3 + 3 * (1 - t) ^ 2 * t + 3 * (1 - t) * t ^ 2 * k
       Let y = 3 * (1 - t) ^ 2 * t * k + 3 * (1 - t) * t ^ 2 + t ^ 3
       Let d = Abs(1 - Sqr(x ^ 2 + y^2))
       Let sd = sd + d ^ 2
     Next t
     If sd < sdmin Then
       Let sdmin = sd
       Let kmin = k
     End If
   Next k
   Let Label1.Caption = kmin
  End Sub
```

Problème 3

a) $y(1) = -2$, $y(2) = -3$ et $y(3) = -2$.

b)
```
Private Sub Command2_Click()
  Let x0 = 0
  Let y0 = -1
  Let h = 1 / 1024
  Do
    Let xm = x0 + h/2
    Let ym = y0 + h/2 * (x0^2 + y0)
    Let X0 = x0 + h
    Let Y0 = y0 + h * (xm^2 + ym)
  Loop Until x0 ^ 2 + y0 >0
  Let Label4.Caption = x0 - h / 2
End Sub
```

e)
```
Private Sub Command2_Click()
  Let x0 = 0
  Let y0 = -1
  Let yp0 = -1
  Let h = 1 / 1024
  Do
    Let yp0 = yp0 + h * (yp0 + 2*x0)
    Let x0 = x0 + h
    Let y0 = y0 + h * yp0
  Loop Until yp0 > 0
  Let Label4.Caption = x0 & "  " & y0
```
(peut être amélioré !)
```
End Sub
```

c) $y = e^x - x^2 - 2x - 2$, $y' = e^x - 2x - 2$, donc $y' = x^2 + y$

d)

x	0	2	1	1.5	1.75
y'	-1.00	1.39	-1.28	-0.52	0.25

L'intervalle est donc $[1.5;1.75]$