

Problème 1 (poids 3)

- a) Résoudre l'équation différentielle $y' + \frac{1}{x}y = \frac{5}{x^2}$, x étant strictement positif.

On considère la fonction $f : x \mapsto y = \frac{5 \ln(x) + 1}{x}$

- b) En tenant compte du domaine de définition, du zéro, des asymptotes verticale et horizontale, du point à tangente horizontale et du point d'inflexion, tracer le graphe de la fonction f .

- c) Après analyse de la parité de la fonction g donnée par $g(x) = \frac{5 \ln(|x|) + 1}{x}$, tracer son graphe en tenant compte de celui de f .

- d) Par changement de variable, trouver une primitive de la fonction f , puis l'utiliser pour calculer l'intégrale $\int_1^e f(x) dx$.

- e) Déterminer un nombre a compris entre 0 et 1 tel que $\int_a^e f(x) dx = 0$.

- f) Déterminer des constantes A , B et C de sorte que la fonction

$$H(x) = \frac{A \ln^2(x) + B \ln(x) + C}{x} \text{ soit une primitive de la fonction}$$

$$h(x) = f^2(x) = \frac{25 \ln^2(x) + 10 \ln(x) + 1}{x^2}.$$

On considère la surface limitée par l'axe des x , le graphe de f et les droites verticales d'équation $x = 1$ et $x = b$, b étant un nombre supérieur à 1. Lorsqu'elle tourne autour de l'axe des x cette surface engendre un corps de révolution.

- g) Calculer le volume de ce corps dans le cas où $b = e$.

- h) Quelle est la valeur limite de ce volume lorsque b tend vers l'infini ?

Problème 2 (poids 3)

Dans l'espace, on donne deux vecteurs \vec{a} et \vec{b} par leurs composantes dans une base orthonormée standard $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$: $\vec{a} = \frac{3}{5}\vec{u}_2 + \frac{4}{5}\vec{u}_3$ et $\vec{b} = \vec{u}_1$.

- a) Trouver les composantes d'un vecteur \vec{c} tel que les vecteurs \vec{a} , \vec{b} et \vec{c} forment une base orthonormée.
- b) Exprimer les vecteurs \vec{u}_1 , \vec{u}_2 et \vec{u}_3 dans la base $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

Dans l'ensemble des vecteurs de l'espace, on appelle f la symétrie axiale dont l'axe est donné par le vecteur \vec{a} .

- c) Donner la matrice A' de f relativement à la base $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.
- d) Déterminer la matrice A de f relativement à la base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$.

Une transformation g des vecteurs de l'espace est donnée par sa matrice B relative à la base

$$(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) : B = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & k \\ 0 & k & 16 \end{pmatrix}.$$

- e) Pour quelle valeur du nombre k le vecteur \vec{a} est-il un vecteur propre de g ? Donner alors la valeur propre correspondante.

Pour la suite, on pose $k = 12$, donc $B = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 12 \\ 0 & 12 & 16 \end{pmatrix}$.

- f) Déterminer les valeurs et vecteurs propres de g . En déduire une interprétation géométrique de la transformation g .
- g) Sans calculer la matrice de $f \circ g$, donner les valeurs et vecteurs propres de cette dernière transformation.

Problème 3 (poids 2)

Partie 1

Comment faut-il choisir le nombre complexe a pour que $6i$ soit un point fixe de la fonction complexe $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(z) = az + 17 - a^2$?

Partie 2

On appelle g la fonction complexe qui associe à chaque nombre complexe z non nul un nombre complexe w donné par l'expression $w = g(z) = i - \frac{2}{z}$.

- On écrit z sous la forme $z = x + iy$, avec x et y réels. Exprimer alors les parties réelle u et imaginaire v de $w = g(z) = u + iv$ en fonction de x et y .
- Dans le plan de Gauss, quelle figure forment les nombres z dont l'image $g(z)$ est un nombre réel ? Dessiner cette figure.
- Démontrer que l'image par g d'un point quelconque de la droite d'équation $y = 1$ est un point du cercle de rayon 1 centré en $(0; 2)$.

Problème 4 (poids 2)

On constitue un jeu de 10 cartes en prenant 4 valets, 3 dames, 2 rois et 1 as.

On extrait successivement 4 cartes de ce jeu en remettant systématiquement la carte tirée et en brassant le tas avant chaque nouveau tirage.

- a) Quelle est la probabilité d'obtenir, dans l'ordre, valet, dame, roi, puis as ?
- b) Quelle est la probabilité d'obtenir 1 valet, 1 dame, 1 roi et 1 as sans tenir compte de l'ordre des tirages ?
- c) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un as ?
- d) Combien de fois faut-il tirer 4 cartes pour que la probabilité d'obtenir au moins un as soit supérieure à 98% ?

Pour faire 4 tirages avec remise, on doit payer 1 franc et l'on gagne un certain montant qui dépend du nombre d'as tirés.

Nombre d'as	4	3	2	1	0
Gain en francs	1000	50	5	1	0

- e) Quelle est la probabilité de gagner 1000 francs, celle de gagner 50 francs, celle de gagner 5 francs et celle de gagner 1 franc ?
- f) On a joué et obtenu un gain. Quelle est alors la probabilité d'avoir encaissé 1 franc ?
- g) Le jeu est-il financièrement intéressant pour le joueur ? Justifier la réponse donnée.

Problème 1

a) $y' + \frac{1}{x}y = \frac{5}{x^2}$

on pose $y = uv, y' = u'v + uv'$

et on obtient $u'v + uv' + \frac{1}{x}uv = \frac{5}{x^2}$

ou $u'v + u\left(v' + \frac{1}{x}v\right) = \frac{5}{x^2}$

On pose $v' + \frac{1}{x}v = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}$

qui admet $v = \frac{1}{x}$ comme solution particulière

en remplaçant dans l'équation, on obtient : $u' \frac{1}{x} = \frac{5}{x^2} \Rightarrow u' = \frac{5}{x} \Rightarrow u = 5 \ln(x) + c$

La solution de l'équation différentielle est ainsi : $y = \frac{1}{x}(5 \ln(x) + c) = \frac{5 \ln(x) + c}{x}$

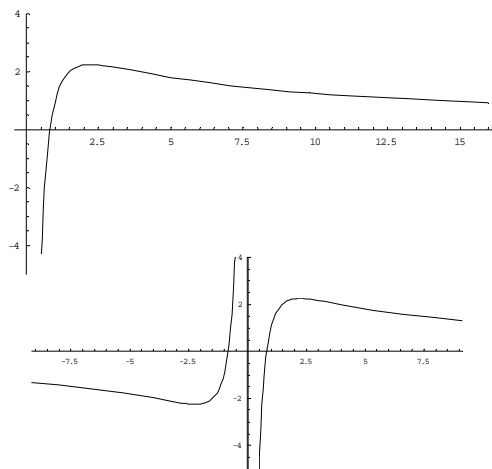
b) $f : x \mapsto y = \frac{5 \ln(x) + 1}{x}, D = \mathbb{R}_+^*, I(e^{-0,2}; 0),$

Ox est asymptote horizontale et

Oy asymptote verticale.

$f'(x) = \frac{4 - 5 \ln(x)}{x^2}, f''(x) = \frac{10 \ln(x) - 13}{x^3},$

$M(e^{0,8}; 5e^{-0,8}), I(e^{1,3}; 7,5e^{-1,3})$



c) $g(-x) = -g(x),$ donc g est impaire.

d) $\int_1^e \frac{5 \ln(x) + 1}{x} dx \stackrel{\substack{u = \ln(x) \\ du = \frac{1}{x} dx}}{=} \int_0^1 (5u + 1) du = \left[\frac{5}{2}u^2 + u \right]_0^1 = \frac{7}{2}$

e) $\int_a^e \frac{5 \ln(x) + 1}{x} dx \stackrel{\substack{u = \ln(x) \\ du = \frac{1}{x} dx}}{=} \int_{\ln(a)}^1 (5u + 1) du = \left[\frac{5}{2}u^2 + u \right]_{\ln(a)}^1 = \frac{7}{2} - \frac{5}{2} \ln^2(a) - \ln(a)$

$\int_a^e f(x) dx = 0 \Leftrightarrow 5 \ln^2(a) + 2 \ln(a) - 7 = 0 \Rightarrow \ln(a) = 1$ et $\ln(a) = -1,4 \Rightarrow a = e^{-1,4}$

f) $H(x) = \frac{A \ln^2(x) + B \ln(x) + C}{x}$

$H'(x) = \frac{(2A \ln(x) \frac{1}{x} + B \frac{1}{x})x - A \ln^2(x) - B \ln(x) - C}{x^2}$

$= \frac{-A \ln^2(x) + (2A - B) \ln(x) + (B - C)}{x^2} \Rightarrow A = -25, B = -60$ et $C = -61$

g) $\pi \int_1^e f^2(x) dx = \pi \left[\frac{-25 \ln^2(x) - 60 \ln(x) - 61}{x} \right]_1^e = \pi \left(\frac{-146}{e} + 61 \right) \cong 7,290\pi \cong 22,90$

h) $\lim_{b \rightarrow \infty} \pi \int_1^b f^2(x) dx = \pi \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{-25 \ln^2(b) - 60 \ln(b) - 61}{b} \right) + 61 = 61\pi$

Problème 2

$$a) \vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b} = \frac{4}{5}\vec{u}_2 - \frac{3}{5}\vec{u}_3.$$

$$b) \vec{u}_1 = \vec{b}, \vec{u}_2 = \frac{3}{5}\vec{a} + \frac{4}{5}\vec{c}, \vec{u}_3 = \frac{4}{5}\vec{a} - \frac{3}{5}\vec{c}.$$

$$c) A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$d) A = P \cdot A' \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & 0 & \frac{-3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{-3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & 0 & \frac{-3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{7}{25} & \frac{24}{25} \\ 0 & \frac{24}{25} & \frac{7}{25} \end{pmatrix}.$$

$$e) B = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & k \\ 0 & k & 16 \end{pmatrix}, \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & k \\ 0 & k & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{27}{125} + \frac{4k}{125} = \frac{3\lambda}{5} \\ \frac{64}{125} + \frac{3k}{125} = \frac{4\lambda}{5} \end{cases} \Rightarrow k=12 \text{ et } \lambda=1,$$

$$f) B = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 12 \\ 0 & 12 & 16 \end{pmatrix},$$

\vec{u}_1 et \vec{a} sont des vecteurs 1-propres et \vec{c} est un vecteur 0-propre.

g décrit une projection orthogonale sur le plan parallèle à \vec{u}_1 et \vec{a} .

g) Vecteurs 1-propres : \vec{a} ; vecteur -1-propres : \vec{u}_1 ; vecteur 0-propres : \vec{c} .

Problème 3**Partie 1**

$$a6i + 17 - a^2 = 6i \Rightarrow a^2 - 6ia + (-17 + 6i) = 0$$

$$\Delta = 32 - 24i, w = x + yi$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 32 & \Rightarrow x^2 - \frac{144}{x^2} = 32 \Rightarrow x^4 - 32x - 144 = 0 \Rightarrow x = \pm 6, y = \mp 2 \\ 2xy = -24 & \Rightarrow y = \frac{-12}{x} \end{cases}$$

$$z_1 = \frac{6i + (6 - 2i)}{2} = 3 + 2i, z_2 = \frac{6i - (6 - 2i)}{2} = -3 + 4i$$

Partie 2

$$a) w = i - \frac{2}{z}, u + vi = i - \frac{2}{x + yi} = \frac{(x^2 + y^2)i - 2(x - yi)}{x^2 + y^2} = \frac{-2x}{x^2 + y^2} + \frac{x^2 + y^2 + 2y}{x^2 + y^2}i.$$

$$b) v = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2y = 0 \Rightarrow x^2 + (y+1)^2 - 1 = 0,$$

cercle de centre i et de rayon 1 sauf l'origine.

$$c) u + vi = \frac{-2x}{x^2 + 1^2} + \frac{x^2 + 1^2 + 2}{x^2 + 1^2}i \Rightarrow u = \frac{-2x}{x^2 + 1} \text{ et } v = \frac{x^2 + 3}{x^2 + 1}$$

$$\begin{aligned} u^2 + (v-2)^2 &= \left(\frac{-2x}{x^2+1}\right)^2 + \left(\frac{x^2+3}{x^2+1} - 2\right)^2 = \left(\frac{-2x}{x^2+1}\right)^2 + \left(\frac{-x^2+1}{x^2+1}\right)^2 = \frac{4x^2 + x^4 - 2x^2 + 1}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{x^4 + 2x^2 + 1}{(x^2+1)^2} = \frac{(x^2+1)^2}{(x^2+1)^2} = 1 \end{aligned}$$

Problème 4

$$a) P = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{10} = 0,0024.$$

$$b) P = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot 4! = 0,0576.$$

$$c) P = 1 - \frac{9}{10} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{9}{10} = 0,3439.$$

$$d) 1 - \left(\frac{9^4}{10^4}\right)^n \geq 0,98 \Rightarrow \left(\frac{9^4}{10^4}\right)^n < 0,02 \Rightarrow n \ln\left(\frac{9^4}{10^4}\right) < \ln(0,02) \Rightarrow n \geq \frac{\ln(0,02)}{\ln(0,9^4)} = 9,28 \Rightarrow n = 10$$

$$e) P(1000.-) = 0,0001, P(50.-) = 0,0036, P(5.-) = 0,0486, P(1.-) = 0,2916, P(0.-) = 0,6561.$$

$$f) P = \frac{0,2916}{0,0001 + 0,0036 + 0,0486 + 0,2916} = \frac{0,2916}{0,3439} \cong 0,8479$$

$$g) \text{Gain moyen} = 0,0001 \cdot 1000 + 0,0036 \cdot 50 + 0,0486 \cdot 5 + 0,2916 \cdot 1 \cong 0,815 < 1 \text{ pas intéressant !}$$