

## Examens de maturité 2008

**MATHÉMATIQUES FORTES**

**DF**

**Série B**

### Problème 1 : Analyse

On considère la fonction  $f : x \mapsto x \cdot \ln^2(x)$

1. Étudier et représenter graphiquement la fonction  $f$ .
2. La droite  $d$  d'équation  $y = x$  coupe la courbe représentative  $\Gamma$  de la fonction  $f$  en deux points  $A$  et  $B$  (distincts de l'origine).
  - (a) Déterminer les coordonnées de  $A$  et  $B$ .
  - (b) Montrer qu'en l'un des points, la droite  $d$  coupe  $\Gamma$  à angle droit. Calculer ensuite l'angle aigu  $\alpha$  que forme la courbe  $\Gamma$  avec la droite  $d$  au second point d'intersection.
  - (c) Calculer la valeur exacte de l'aire du domaine délimité par la courbe  $\Gamma$  et la droite  $d$  entre  $A$  et  $B$ .

### Problème 2 : Géométrie vectorielle et analytique de l'espace

Dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ , on note :

$\Sigma$  la sphère de centre  $W(-2; -1; 0)$ , passant par le point  $A(0; 0; 1)$ ;

$\pi_m$  le plan d'équation :  $(2+m)x + y + mz - 4 + m = 0$  où  $m \in \mathbb{R}$ ;

$d$  la droite définie par la représentation paramétrique : 
$$\begin{cases} x = k \\ y = 2+k \\ z = -1-2k \end{cases}, \text{ avec } k \in \mathbb{R}.$$

1. Écrire l'équation cartésienne de la sphère  $\Sigma$ .
2. Déterminer l'intersection de la droite  $d$  et de la sphère  $\Sigma$ .  
Quelle est l'équation cartésienne du plan tangent à  $\Sigma$  en chacun des points d'intersection de  $\Sigma$  et  $d$  ?
3. Montrer que tous les plans  $\pi_m$ , obtenus lorsque  $m$  décrit  $\mathbb{R}$ , contiennent une même droite  $e$  dont on donnera une représentation paramétrique.
4. Déterminer, en fonction de  $m$ , la distance  $\delta$  du point  $W$  au plan  $\pi_m$ . En déduire les valeurs de  $m$  pour lesquelles le plan  $\pi_m$  est tangent à  $\Sigma$ .

**Problème 3 : Probabilités**

Durant une séance de pénalties, en moyenne, un footballeur gaucher marque 5 fois sur 6 et un droitier 2 fois sur 3. On admet qu'un footballeur sur 10 est gaucher.

1. On choisit au hasard un footballeur et il tire un penalty. Quelle probabilité a-t-il de marquer ?
2. Un deuxième tireur ne marque pas. Quelle est la probabilité qu'il soit gaucher ?
3. Combien doit-on choisir de joueurs, chacun tirant un penalty, pour avoir une probabilité supérieure à 99.99% qu'au moins un tir soit loupé ?
4. Deux équipes s'affrontent à une séance de tirs au but. Si deux joueurs de chaque équipe ont tiré leur penalty, quelle est la probabilité que ces équipes soient à égalité ?
5. Soit  $X$  la variable aléatoire indiquant le nombre de tirs marqués sur 3 essais. Calculer son espérance mathématique et son écart-type.
6. A la fin du match, on réunit, pour une photo souvenir, les deux équipes de 6 joueurs dont 1 gardien. Les joueurs se plaçant au hasard sur un rang, quelle est la probabilité que les deux gardiens ne se trouvent pas côte à côte ?

**Problème 4 : Nombres complexes**

1. Soit la fonction complexe  $g(z) = (3-i)z + 4 + 3i$ . Déterminer le nombre complexe  $w$  tel que  $g(w) = w$ .
2. Soient les nombres complexes  $z_1 = -2 + 6i$ ,  $z_2 = 4i$  et  $z_3 = 0$ . Soit la fonction complexe  $f(z) = a\bar{z} + b$ . Déterminer les nombres complexes  $a$  et  $b$  pour lesquels les deux conditions suivantes sont simultanément vérifiées :  $f(z_1) = z_2$  et  $f(z_2) = z_3$ .
3. On considère le nombre complexe  $u = \frac{-4}{1+i}$ .
  - (a) Montrer que  $u^8$  est réel.
  - (b) Mettre sous forme trigonométrique, puis sous forme algébrique le nombre complexe  $z$  tel que  $u \cdot z = 4\sqrt{2} \left( \cos\left(\frac{13\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{13\pi}{12}\right) \right)$ .
  - (c) En déduire les valeurs exactes de  $\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right)$  et  $\sin\left(\frac{13\pi}{12}\right)$ .

Fin