

Option spécifique Physique et applications des mathématiques

Classe 1E

3 heures

L'usage d'une calculatrice non programmable et sans écran graphique est autorisé.

Le Formulaire et Table de la CRM est également autorisé.

Exercice 1

- Ecrire l'approximation d'ordre 4 de la fonction $f(x) = \ln(x)$ au voisinage de $a = 1$.
 - En déduire le développement en série de Taylor au voisinage de $a = 1$ de la fonction $f(x) = \ln(x)$.
 - Donner une estimation de l'erreur maximale lorsque l'approximation d'ordre 4 est utilisée sur l'intervalle $I =]0,7; 1,3[$.
 - En déduire une approximation de $\ln(1,2)$ et son erreur maximale.
 - Trouver son rayon de convergence.
-

Exercice 2

On lâche une bille de verre ($\rho_{\text{verre}} = 1180,00 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$) de 1,1919 mm de rayon dans de l'eau à $5,6^\circ\text{C}$ ($\rho_{\text{eau}} = 999,57 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $\eta_{\text{eau}} = 0,00149 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$). L'écoulement est laminaire, c'est-à-dire que la bille subit une force de frottement fluide donnée par

$$F_f = kr\eta v,$$

avec

r : le rayon maximal de l'objet ;

k : un coefficient de forme de l'objet (6π pour la sphère) ;

η : la viscosité du fluide ;

v : la vitesse relative de l'objet par rapport au fluide.

La bille accélère jusqu'à atteindre une vitesse limite. On prend pour l'accélération de la pesanteur la valeur de $g = 9,8100 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

- Dessiner l'ensemble des forces qui agissent sur la balle.
- Calculer la vitesse limite de chute de la bille.
- Montrer que la vitesse en fonction du temps peut être déterminée par l'équation différentielle suivante :
 $\dot{v} = 1,5 - 4v$
- Résoudre l'équation différentielle afin de trouver en combien de temps la balle a atteint la moitié de la vitesse limite..