

Discipline fondamentale

MATHÉMATIQUES

Classe 1U

4 heures

L'usage d'une calculatrice non programmable et sans écran graphique est autorisé.

Le Formulaire et Table de la CRM est également autorisé.

Exercice 1

(14 points)

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x + 2}$.

- 1.1 Étudier cette fonction et représenter son graphe dans le plan muni d'un système d'axes pourvus d'unités appropriées.
 - 1.2 Trouver l'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f si cette tangente passe par le point $P(-2;8)$.
 - 1.3 Déterminer l'aire du domaine compris entre l'axe Ox , la courbe représentative de la fonction f et les droites verticales d'équations $x = 0$ et $x = 8$.
-

Exercice 2

(14 points)

Une urne A contient 17 boules rouges et 58 blanches.

Une urne B contient 6 boules rouges et 9 blanches.

Une urne C contient 4 boules rouges, 5 blanches et 3 bleues.

- 2.1 On choisit une urne au hasard et ensuite on tire une boule de cette urne : elle est rouge. Quelle est la probabilité qu'elle provienne de l'urne C ?
- 2.2 On tire simultanément 5 boules de l'urne C . Calculer la probabilité d'obtenir exactement deux boules rouges, une blanche et deux bleues.
- 2.3 Un joueur tire simultanément 2 boules de l'urne B . Il gagne 4.- s'il obtient 2 boules rouges et 1.- s'il en obtient une. Il perd 3.- sinon. Ce jeu est-il équilibré ? Si non, en faveur de qui ?
- 2.4 On effectue un tirage à la fois avec remise d'une boule de l'urne A .
 - a) Après 5 tirages, calculer la probabilité d'avoir exactement une boule rouge.
 - b) Déterminer le nombre de tirages nécessaires pour être certain à 97% d'avoir sorti au moins une fois une boule rouge de l'urne.
 - c) On effectue 3000 tirages. Calculer la probabilité d'avoir obtenu entre 650 et 700 (y compris) fois une boule rouge.

Tournez la page svp.

Exercice 3

(12 points)

On considère les points $A(6; -2; 0)$, $B(-3; 2; 5)$, $C(9; 8; 4)$, $D(0; 0; 6)$ et $E(-6; 2; 1)$.

On note α le plan passant par les points A , B et C .

3.1 Trouver l'équation du plan α .

3.2 Trouver l'angle aigu entre le plan α et la droite DE .

3.3 Trouver les coordonnées du (ou des) point(s) S de sorte que le tétraèdre $ABCS$ ait un volume de 85. On sait de plus que le(s) point(s) S se situe(nt) sur la droite DE .

3.4 On considère la sphère $\sigma : x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 2z - 6 = 0$. Le plan α coupe la sphère σ . Trouver le centre et le rayon du cercle d'intersection.

Exercice 4 Questions diverses

(10 points)

4.1 Une plaque de métal rectangulaire possède une longueur de 4 m et une largeur de 80 cm. On la «plie» pour en faire une gouttière en forme de «U» avec «couvercle» (voir la figure 1 ci-dessous). La partie courbe a la forme d'un demi-cercle de rayon r . Trouver le rayon r de cette gouttière pour que son volume soit maximal.

4.2 On considère la fonction $f(x) = \frac{1}{2}(e^{2x} + 9e^{-2x})$ (voir la figure 2 ci-dessous).

- Trouver (par un calcul complet) l'abscisse des points d'intersection entre la courbe de la fonction f et la droite d'équation $y = 5$.
- On considère le domaine D limité par la courbe représentative de la fonction f et la droite d'équation $y = 5$. Calculer le volume engendré par la rotation de D autour de l'axe Ox .
Remarque : si vous n'avez pas trouvé la réponse au point a), prenez $x_1 = 0$ et $x_2 = \ln(3)$.

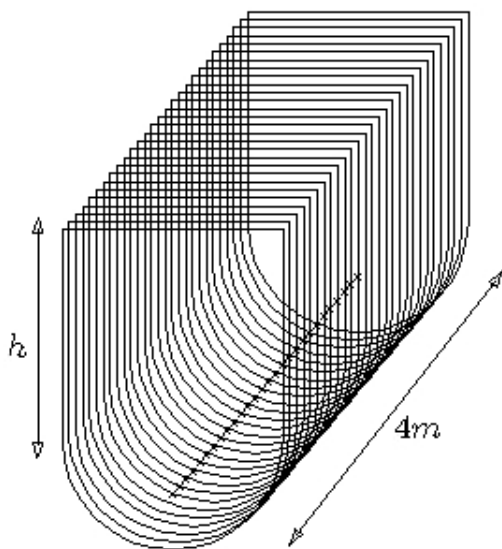


figure 1

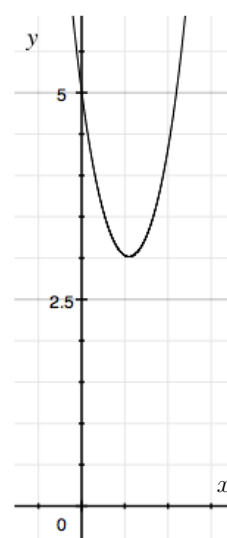


figure 2