CEJEF
DIVISION LYCÉENNE

2, place Blarer-de-Wartensee
Case postale 152
CH-2900 Porrentruy

t +41 32 420 36 80
f +41 32 420 36 81
lycee.cantonal@jura.ch

Session 2010

EXAMEN DE MATHEMATIQUES – Discipline fondamentale

Problème 1.

Dans un repère orthonormé, on donne le plan α : $3x - y + 2z - 6 = 0$, la droite d : $\begin{cases} x = 3 - t \\ y = -1 + t \\ z = -2 + 2t \end{cases}$

ainsi que les points $A(3;5;-1)$, $B(5;3;3)$ et $C(4;0;4)$.

1.1. Calculer l'aire du triangle *ABC*.
1.2. Calculer l'angle que forme la droite (*AB*) avec le plan α.
1.3. Vérifier que la droite *d* est contenue dans le plan α.
1.4. Déterminer l'équation cartésienne du plan β passant par *C* et contenant *d*.
1.5. Vérifier que les plans α et β sont perpendiculaires.
1.6. On considère dans le plan β le cercle centré en *C* et tangent à la droite *d* en un point noté *T*. Déterminer le rayon de ce cercle et les coordonnées du point *T*.
1.7. Soit la droite *d'* : $\begin{cases} x = 3 + k \\ y = 5 - k \\ z = -1 + 2k \end{cases}$. Existe-t-il une sphère tangente au plan α en $T'(1;3;3)$ et centrée sur d' ? Si oui, indiquer l'équation de cette sphère. Si non, expliquer pourquoi.

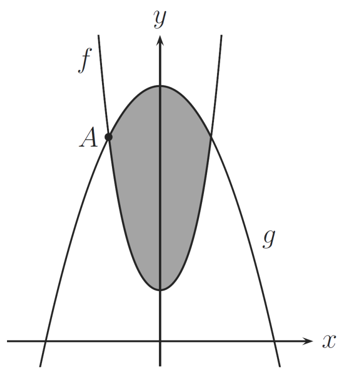
Problème 2.

Les trois sections sont indépendantes.

2.1. Calculer $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sin(x^2 - 9)}{\ln(2x - 5)}$.

2.2. Soient les fonctions *f* et γ données par $f(x) = (x^2 + 1)^2$ et $\gamma(x) = 5 - x^2$, et dont les graphes sont représentés ci-contre.

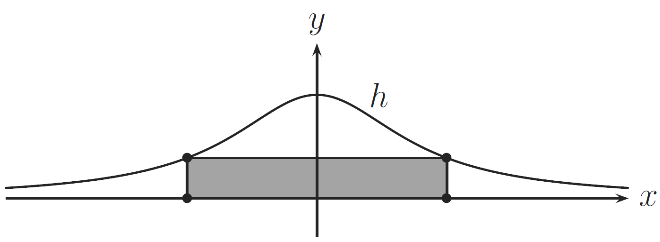
a) Calculer les coordonnées du point *A*.
b) Etablir l'équation de la droite *t*, tangente au graphe de γ en *A*.
c) Calculer l'angle aigu d'intersection entre les graphes de *f* et de γ au point *A*.
d) Calculer l'aire du domaine grisé.



2.3. Soit la fonction η donnée par

$$\eta(x) = \frac{1}{x^2 + 1},$$

dont le graphe est représenté ci-contre. On désire construire un rectangle comme indiqué sur la figure. Quelles sont les dimensions du rectangle de plus grande surface ?



(suite au verso)

Problème 3.

Etudier puis représenter graphiquement (unité : 1 cm) la fonction f définie par $f(x) = \left(1 - \frac{4}{x}\right) \cdot e^x$.

Durant l'étude, vous montrerez que la dérivée seconde est : $f''(x) = \frac{(x-2)\cdot(x^2 - 2x + 4)}{x^3} \cdot e^x$.

Problème 4.

Six amis (Alain, Benjamin, Charles, Daniel, Emile et François) se retrouvent pour jouer au « *Chercheur d'Or* ». Ce jeu se déroule en deux phases :

1ère phase : le tirage au sort des équipes

Une urne contient 8 boules. Sur cinq d'entre elles est inscrite la lettre « C » et sur les trois autres la lettre « S ». Les six participants tirent, dans l'ordre alphabétique de leur prénom, une boule (sans remise). Les joueurs qui ont tiré une boule sur laquelle est inscrit un « C » forment l'équipe des *chercheurs d'or*, ceux qui ont tiré une boule portant la mention « S » forment l'équipe des *saboteurs*.

2ème phase : le jeu

Les règles du jeu n'ayant pas d'importance ici, elles ne seront pas expliquées.
Toutefois, on peut dire que

- si l'équipe des *chercheurs d'or* est formée de cinq joueurs, elle gagne 2 fois sur 3
- si l'équipe des *chercheurs d'or* est formée de quatre joueurs, elle gagne 1 fois sur 2
- si l'équipe des *chercheurs d'or* est formée de trois joueurs, elle gagne 1 fois sur 4

4.1. Les six amis jouent une partie.

4.1.1. Calculer la probabilité des événements :

G : Alain, Benjamin, Charles et Daniel forment l'équipe des *chercheurs d'or*, Emile et François l'équipe des *saboteurs*
H : l'équipe des *chercheurs d'or* est formée de quatre joueurs
I : la partie se joue à trois *chercheurs d'or* contre trois *saboteurs*
J : la partie se joue à trois contre trois et les *chercheurs d'or* gagnent

4.1.2. Montrer que la probabilité que l'équipe des *chercheurs d'or* gagne est égale à $\frac{3}{7}$.

4.2. Les six amis jouent dix parties.

Calculer la probabilité des événements suivants :

K : l'équipe des *chercheurs d'or* gagne exactement quatre parties
L : l'équipe des *chercheurs d'or* gagne exactement quatre parties, sachant qu'elle gagne la première et la huitième
M : l'équipe des *chercheurs d'or* gagne au moins deux parties

4.3. Combien de parties doivent jouer les six amis pour que la probabilité que l'équipe des *chercheurs d'or* gagne au moins une partie soit supérieure 0,999 ?

- temps à disposition : 4 heures
- note maximale (6) pour 4 problèmes justes
- extrait des « Formulaires et Tables » à disposition
- machine à calculer (non graphique et non programmable) autorisée