Problème 1

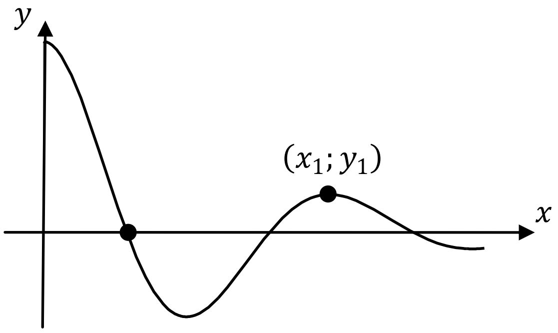
On considère l'équation différentielle

$$y'' + y' + 4y = 0$$

On appelle s la solution satisfaisant $s(0) = 1$ et $s'(0) = u$.

Dans ce problème la variable x est positive.

Le graphe de s est une oscillation amortie.



Partie A

Dans cette partie on prend $u = 0$.

a) Au moyen de la méthode d'Euler et avec un pas $h = 0{,}4$, estimer $s(0{,}8)$.

b) Avec un pas h inconnu, trouver l'estimation de $s(3h)$ donnée par la méthode d'Euler.
Estimer un zéro de cette estimation en exécutant une fois la méthode de Newton en partant de la graine $h_0 = 0{,}5$.
En déduire une estimation d'un zéro de la fonction s.

Partie B

c) Écrire le code d'une fonction g qui, en fonction de u, calcule la première coordonnée x_1 du premier maximum de la fonction s. Utiliser la méthode de Runge.

d) Écrire le code d'une procédure qui détermine une valeur de u, comprise entre -5 et 0, pour laquelle $x_1 = 3$, en résolvant par bissection l'équation $g(u) - 3 = 0$.

Partie C

Dans cette partie on prend $u = 0$.

e) Écrire un programme qui calcule le nombre de maximums de la fonction s dont la deuxième coordonnée est supérieure à $\frac{1}{100}$.
Utiliser la méthode de Runge.

Problème 2

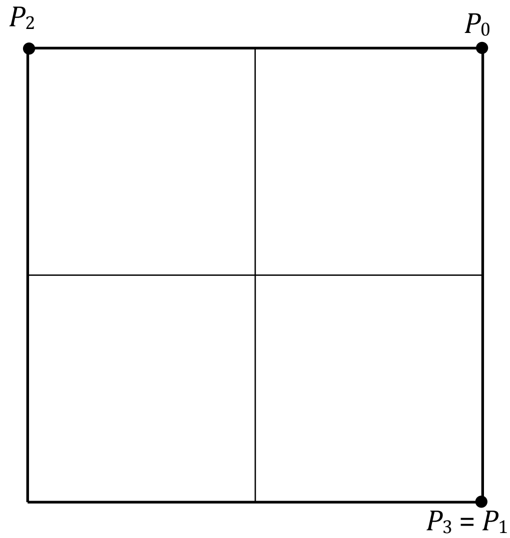
Dans une zone d'image *Picture*1, on considère l'arc de Bézier d'extrémités $P_0(400; 0)$ et $P_3(400; 400)$ et de points secondaires $P_1(x_1; y_1)$ et $P_2(x_2; y_2)$.

On rappelle qu'un arc de Bézier est contrôlé par quatre points P_0, P_1, P_2, P_3 et qu'il est formé des points P donnés par l'égalité

$$\overrightarrow{OP} = (1-t)^3\overrightarrow{OP_0} + 3(1-t)^2t\overrightarrow{OP_1} + 3(1-t)t^2\overrightarrow{OP_2} + t^3\overrightarrow{OP_3}\ ,\ t \text{ variant de 0 à 1.}$$

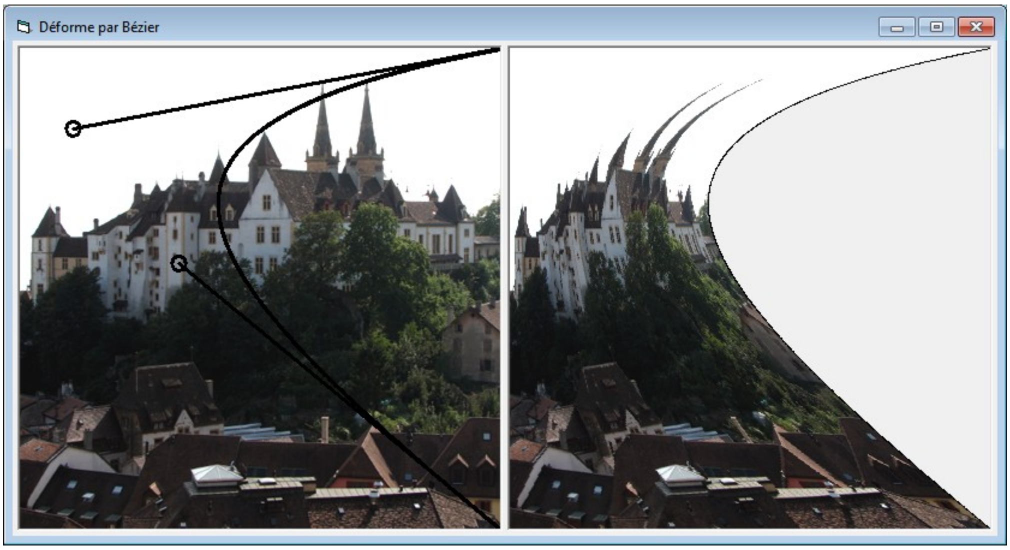
a) On pose $x_1 = 400$, $y_1 = 400$, $x_2 = 0$, $y_2 = 0$ donc $P_1 = P_3$ et $P_2(0; 0)$.
Sur le cadre ci-contre,

- construire le point de la courbe correspondant à $t = \frac{1}{2}$ et le vecteur vitesse en ce point ;
- calculer les points à tangente verticale de cette courbe, puis les dessiner ;
- dessiner l'arc de Bézier.



b) Écrire le code d'une fonction qui, étant donné une valeur de y comprise entre 0 et 400, détermine **une** valeur de x de sorte que le point $(x; y)$ appartienne à l'arc de Bézier.

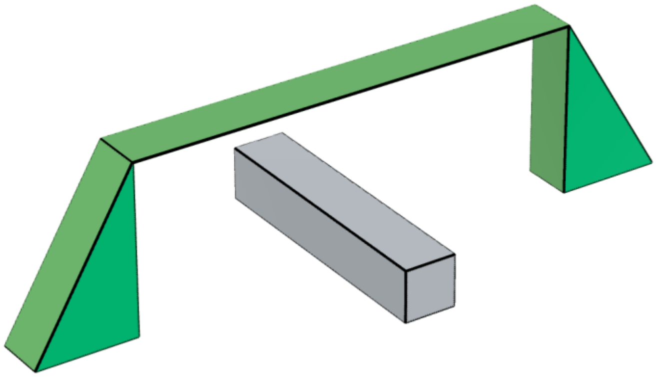
c) En utilisant cet arc de Bézier, des valeurs de x_1, y_1, x_2, y_2 étant données, on veut transformer une image comme illustré ci-dessous.
Écrire un programme qui effectue cette transformation dans une zone d'image *Picture*2.



d) Esquisser l'image par cette transformation des droites d'équations $x = 200$ et $y = 200$, pour l'arc de Bézier défini dans la question du point a) ci-dessus. Utiliser le cadre du point a) pour cette esquisse.

Problème 3

Une maquette de pont autoroutier, posée sur le sol, est représentée ci-dessous.
L'autoroute est séparée en deux par un parallélépipède rectangle.

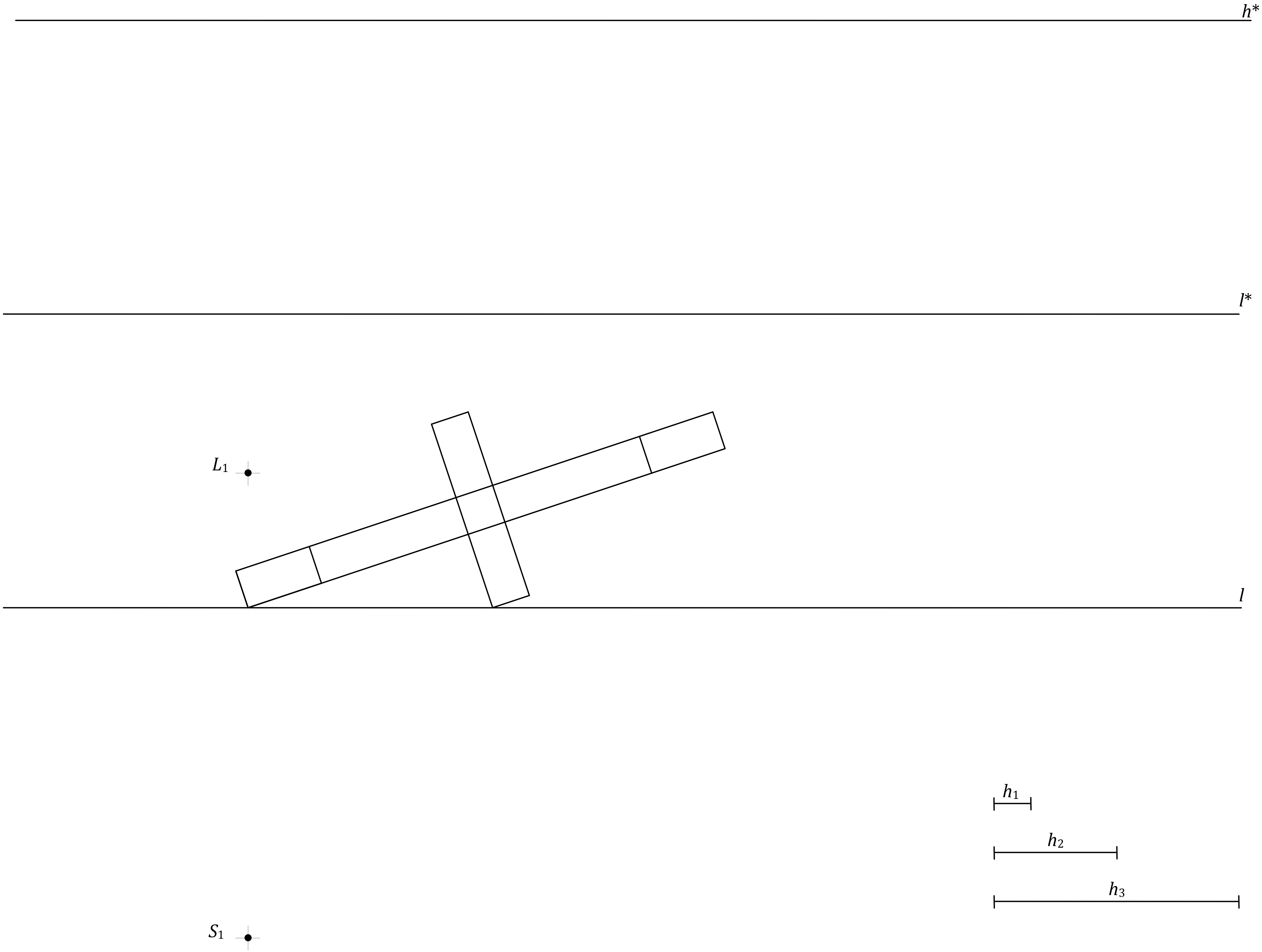


La hauteur du parallélépipède séparant les deux voies est h_1 = 0,75 cm.
La hauteur du pont est h_2 = 2,5 cm. L'épaisseur du pont est considérée comme nulle.

Dessiner cette maquette en perspective, en déplaçant l'écran en l^*.

La maquette est éclairée par une source lumineuse ponctuelle donnée par sa projection L_1 et sa cote h_3 = 5 cm.

Dessiner la perspective de l'ombre de la maquette sur le sol et sur elle-même.


h^*
l^*
L_1
l
h_1
h_2
h_3
S_1

Solution 1

a)

x	y	y'	$y'' = -4y - y'$
0	1	0	-4
0,4	1	-1,6	
0,8	**0,36**		

b)

x	y	y'	$y'' = -4y - y'$
0	1	0	-4
h	1	$-4h$	$-4 + 4h$
$2h$	$1 - 4h^2$	$-8h + 4h^2$	
$3h$	$1 - 12h^2 + 4h^3$		

$s(3h) \cong 4h^3 - 12h^2 + 1$

$N(h) = h - \frac{4h^3-12h^2+1}{12h^2-24h}$, $N\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}$, donc $s(3h) = 0 \Rightarrow h \cong \frac{1}{3}$,

zero $= 3h \cong 1$

c) et d) Pour d) on utilise la bissection

```
Function g(u)
 x = 0: y = 1: yp = u
 h = 1 / 128
 Do
   ypavant = yp
   xm = x + h / 2
   ym = y + h / 2 * yp
   ypm = yp + h / 2 * (-yp - 4 * y)
   x = x + h
   y = y + h * ypm
   yp = yp + h * (-ypm - 4 * ym)
 Loop Until ypavant >= 0 And yp <= 0
 g = xm
End Function

Function f(u)
 f = g(u) - 3
End Function

Private Sub Command1_Click()
 a = -5: b = 0
 m = (a + b) / 2
 Do
   If f(m) * f(a) <= 0 Then
      Let b = m
   Else
      Let a = m
   End If
   Let m = (a + b) / 2
 Loop Until m <= a Or m >= b
 Label1.Caption = a
End Sub
```

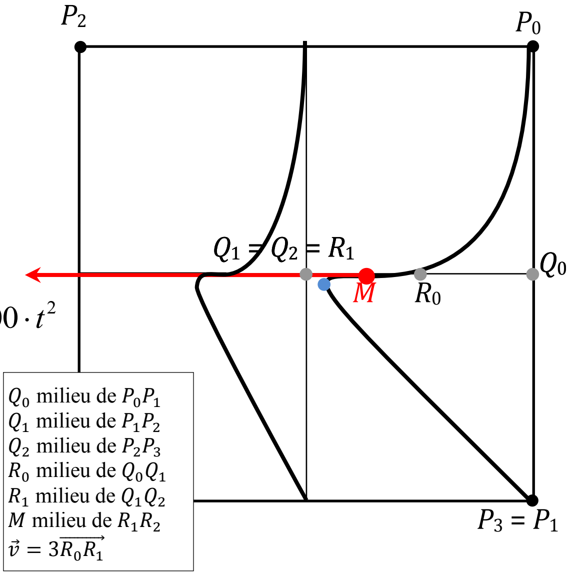
e)

```
Private Sub Command1_Click()
t = 0: ymax = 1
x = 0: y = 1: yp = 0
h = 1 / 128
Do
   ypavant = yp
   xm = x + h / 2
   ym = y + h / 2 * yp
   ypm = yp + h / 2 * (-yp - 4 * y)
   x = x + h
   y = y + h * ypm
   yp = yp + h * (-ypm - 4 * ym)
   If ypavant > 0 And yp <= 0 Then
      t = t + 1
      ymax = y
   End If
 Loop Until ymax <= 1 / 100
 Label1.Caption = t
End Sub
```

Solution 2

a) $\begin{cases} x = 400\cdot(1-t)^3 + 1200\cdot(1-t)^2\cdot t + 400\cdot t^3 \\ y = 1200\cdot(1-t)^2\cdot t + 400\cdot t^3 \end{cases}$

$$\begin{cases} x = 400\cdot(3t^3 - 3t^2 + 1) \\ y = 400\cdot(4t^3 - 6t^2 + 3t) \end{cases}$$



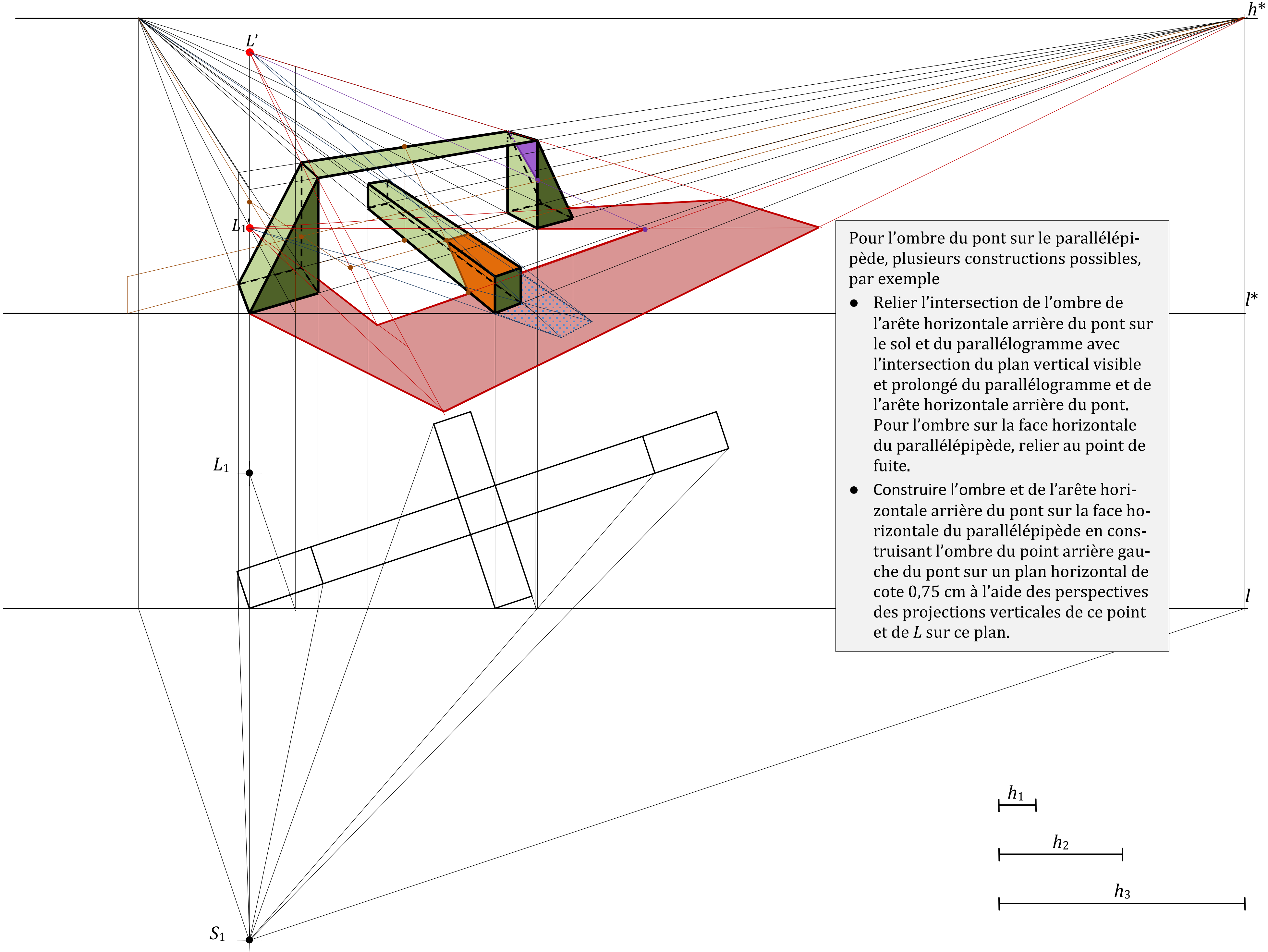
$$\begin{cases} x' = -1200\cdot(1-t)^2 + 1200\cdot(1-4t+3t^2) + 1200\cdot t^2 \\ y' = 1200\cdot(1-4t+3t^2) + 1200\cdot t^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = 1200\cdot t\cdot(3t-2) \\ y' = 1200\cdot(1-4t+4t^2) \end{cases}$$

$$x' = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 0\,, x_1 = 400,\ y_1 = 400 \\ t_2 = \tfrac{2}{3}, x_2 \cong 222{,}22,\ y_2 \cong 207{,}41 \end{cases}$$

b)
```
Function xb(y)
   t = 0
   Do
     t = t + 1 / 800
    yb = (1 - t)^3 * 0 + 3 * (1 - t)^2 * t * y1 + 3 * (1 - t) * t^2 * y2 + t^3 * 400
   Loop Until yb >= y
   xb = (1 - t)^3 * 400 + 3 * (1 - t)^2 * t * x1 + 3 * (1 - t) * t^2 * x2 + t^3 * 400
End Function
```

c)
```
For y = 0 To 399
   k = xb(y) / 400
   For x = 0 To 399
    c = Picture1.Point(x , y)
    nx = k * x
    ny = y
    Picture2.PSet (nx, ny), c
   Next x
Next y
```



Pour l’ombre du pont sur le parallélépipède, plusieurs constructions possibles, par exemple

- Relier l’intersection de l’ombre de l’arête horizontale arrière du pont sur le sol et du parallélogramme avec l’intersection du plan vertical visible et prolongé du parallélogramme et de l’arête horizontale arrière du pont. Pour l’ombre sur la face horizontale du parallélépipède, relier au point de fuite.
- Construire l’ombre et de l’arête horizontale arrière du pont sur la face horizontale du parallélépipède en construisant l’ombre du point arrière gauche du pont sur un plan horizontal de cote 0,75 cm à l’aide des perspectives des projections verticales de ce point et de L sur ce plan.

Barème indicatif

Problème 1	**17 points**
Aa	3
Ab	5
Bc	3
Bd	3
Ce	3
Problème 2	**17 points**
a1	3
a2	2
a3	2
b	5
c	4
d	1
Problème 3	**17 points**
Parallélépipède	2
Pont	5
L_1' et L'	2
Ombre du pont sur sol	3
Ombre du paral.sur sol	2
Ombre du pont sur le paral.	2
Ombre du pont sur le pilier.	1
Total	**51 points**
Note	$\boldsymbol{n = 1 + \frac{\text{nb points}}{10}}$