



JEUX AVEC LES CHIFFRES DES DÉVELOPPEMENTS DÉCIMAUX DE QUELQUES RATIONNELS

Jean Luc Bovet, Auvernier

Notre merveilleuse manière d'écrire les nombres, due, dit-on, aux Indiens via les Arabes, présente en plus de son efficacité incontestable des aspects parfois étonnants. Certaines propriétés sont bien connues, d'autres peut-être un peu moins.

1. Je vous laisse déterminer les 6 premiers multiples du nombre 142857 ou les 12 de 076923 au cas où vous ne l'auriez jamais fait. Je ne vous ferai pas l'injure d'une démonstration du phénomène : calculez simplement le développement décimal de $1/7$, $2/7$... et de $1/13$, $2/13$... ; le reste coule de source.

2. (Pour simplifier l'écriture, je note $0, \{142857\}$ pour $0,142857142857\dots$). Parmi les développements périodiques présentant un nombre pair de chiffres dans la période, certains ont la propriété suivante : la deuxième moitié de la période est le complément à 9 de la première moitié : par exemple $1/7 = 0, \{142857\}$.

$$1 + 8 = 4 + 5 = 2 + 7 = 9$$

Il en va ainsi chaque fois que le développement est issu de la division par un nombre premier ou par une puissance de celui-ci.

$$1/49 = 0, \{020408163265306122448979591836734693877551\}$$

Démontrons la chose avec une période de 6 chiffres, la généralisation étant immédiate.

Soit $1/p = 0, \{abcdef\}$. Alors $10^6/p = abcdef + 1/p$, puis $(10^6 - 1)/p = abcdef$: entier.

Donc p divise $10^6 - 1$ donc p divise $(10^3 - 1)(10^3 + 1)$.

Or si p (premier) divise un produit, il divise l'un des facteurs. Il ne saurait diviser le premier : la période serait alors de longueur 3 (ou moins) et non 6 ; p divise donc $10^3 + 1$.

$(10^3 + 1)/p$ s'écrit $abc, \{defabc\} + 0, \{abcdef\}$ c'est-à-dire $abc, \{(a+d)(b+e)(c+f)\}$ et il est entier. Donc ou bien $a + d = b + e = c + f = 0$, (ce qui n'est pas possible), ou bien ces trois sommes valent chacune 9, ce qu'il fallait démontrer.

Si nous avons p^k au dénominateur, les facteurs premiers de p^k , tous égaux à p ne sauraient diviser simultanément $10^3 + 1$ et $10^3 - 1$ qui sont impairs et qui diffèrent de 2.

3. La contemplation de certains développements décimaux crée parfois des états d'âme :

A) dans le début de la période

$$1/49 = 0, \{02\ 04\ 08\ 16\ 32\ 65\dots\}.$$

$$1/19 = 0, \{0526315789\dots\} \text{ ou plus visiblement}$$

$$1/199 = 0, \{005\ 025\ 125\ 628\dots\} \text{ où le report des retenues ne trouble la vision que plus tard.}$$

Quelle est la raison de l'apparition des puissances de 2 ou de 5 dans ces développements ?

B) dans la fin de la période

$$1/19 = 0, \{ \dots 4736\ 8\ 4\ 2\ 1 \} \text{ ou plus visiblement dans}$$

$$1/199 = 0, \{ \dots 728\ 64\ 32\ 16\ 08\ 04\ 02\ 01 \}$$

$$1/29 = 0, \{ \dots 4137\ 9\ 3\ 1 \} \text{ ou plus visiblement dans}$$

$$1/299 = 0, \{ \dots 143\ 81\ 27\ 09\ 03\ 01 \}$$

$$1/399 = 0, \{ \dots 656\ 64\ 16\ 04\ 01 \}$$

Pourquoi les puissances de 2, 3 ou 4 interviennent-elles dans ces développements ?

C) dans le début

$$1/89 = 0, \{ 01123595505\dots \} \text{ ou plus visiblement dans}$$

$$1/998999 = 0, \{ 000\ 001\ 001\ 002\ 003\ 005\ 008\ 013\ 021\ 034\ 055\ 089\ 144\ 233\ 377\ 611\dots \}$$

Que vient faire ici la suite de Fibonacci ?

D) dans la fin

$$1/109 = 0, \{ \dots 23853211 \} \text{ ou plus visiblement dans}$$

$$1/10099 = 0, \{ \dots 444\ 89\ 55\ 34\ 21\ 13\ 08\ 05\ 03\ 02\ 01\ 01 \}$$

Encore une intervention de Fibonacci !

* * *

A) On sait que $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots$ Faisons $x = \frac{1}{20}$ et enlevons 1 de chaque côté

Il vient $\frac{1}{19} = \frac{1}{20} + \frac{1}{20^2} + \dots$

$$\begin{array}{r}
 0 \ . \ 0 \ 5 \\
 0 \ . \ 0 \ 0 \ 2 \ 5 \\
 0 \ . \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 5 \\
 0 \ . \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 6 \ 2 \ 5 \\
 0 \ . \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 3 \ 1 \ 2 \ 5 \\
 0 \ . \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 5 \ 6 \ 2 \ 5 \\
 0 \ . \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 7 \ 8 \ 1 \ 2 \ 5 \\
 0 \ . \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 3 \ 9 \ 0 \ 6 \ 2 \ 5 \\
 0 \ . \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 9 \ 5 \ 3 \ 1 \ 2 \ 5 \\
 0 \ . \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 9 \ 7 \ 6 \ 5 \ 6 \ 2 \ 5 \\
 0 \ . \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 4 \ 8 \ 8 \ 2 \ 8 \ 1 \ 2 \ 5 \\
 0 \ . \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 2 \ 4 \ 4 \ 1 \ 4 \ 0 \ 6 \ 2 \ 5 \\
 0 \ . \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 2 \ 0 \ 7 \ 0 \ 3 \ 1 \ 2 \ 5 \\
 0 \ . \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 6 \ 1 \ 0 \ 3 \ 5 \ 1 \ 5 \ 6 \ 2 \ 5 \\
 0 \ . \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 3 \ 0 \ 5 \ 1 \ 7 \ 5 \ 7 \ 8 \ 1 \ 2 \ 5 \\
 0 \ . \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 5 \ 2 \ 5 \ 8 \ 7 \ 8 \ 9 \ 0 \ 6 \ 2 \ 5 \\
 \hline
 0 \ . \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 7 \ 6 \ 2 \ 9 \ 3 \ 9 \ 4 \ 5 \ 3 \ 1 \ 2 \ 5 \\
 \hline
 0 \ . \ 0 \ 5 \ 2 \ 6 \ 3 \ 1 \ 5 \ 7 \ 8 \ 9 \ 4 \ 7 \ 3 \ 6 \ 8 \ 4 \ 2 \ 1 \ | \ 0 \ 5 \ 2 \ 6
 \end{array}$$

De même $\frac{1}{49} = \frac{1}{50} + \frac{1}{50^2} + \dots$ d'où le développement en puissances de 2 ou de 5.

Remettons-le dans sa disposition habituelle :

0 0 1	1	a
0 0 0 1 1	1 1	b c
0 0 0 0 1 2 <u>1</u>	1 2 <u>1</u>	d e f
0 0 0 0 0 1 <u>3</u> <u>3</u> 1	1 <u>3</u> <u>3</u> 1	g <u>h</u> i j
0 0 0 0 0 0 <u>1</u> <u>4</u> 6 4 1	<u>1</u> <u>4</u> 6 4 1	<u>k</u> <u>l</u> m n o
0 0 0 0 0 0 0 <u>1</u> 5 10 10 5 1	<u>1</u> 5 10 10 5 1	<u>p</u> q r s t u
0 0 0 0 0 0 0 0 1 6 15 20 15 6 1	1 6 15 20 15 6 1	v w x y z A B

La somme $1 + 6 + 5 + 1$ se présente alors en diagonale. Regardons-la avec les lettres : $v = p (=1), q = k + l, m = h + i, j = f (=1)$. Donc chaque diagonale est la somme des deux précédentes ce qui est la règle de Fibonacci.

D) A droite.

$$\frac{1}{109} = 0, \{009174311926605504587155963302752293577981651376146788990825688073394495412844036697247706422018348623853211\}$$

Soit P le nombre qui s'écrit avec les 108 chiffres de la période de $\frac{1}{109}$. Comme précédemment,

$$P = \frac{10^{108} - 1}{109}$$

D'autre part,

$$S = 1 + 110 + 110^2 + \dots + 110^{107} = \frac{110^{108} - 1}{109} = 109^{-1} \cdot (11^{108} \cdot 10^{108} - 10^{108} + 10^{108} - 1)$$

$$= 109^{-1} \cdot (11^{108} - 1) \cdot 108 + P$$

Les 108 derniers chiffres de S sont donc ceux de P , $109^{-1} \cdot (11^{108} - 1)$ étant entier selon Fermat. Calculons S

			1		1		a
			1 1		1 1		b c
			<u>1</u> <u>2</u> 1		<u>1</u> <u>2</u> 2		<u>d</u> <u>e</u> f
		1 3 <u>3</u> <u>1</u>		1 3 <u>3</u> <u>1</u>		g h i i	
	1 4 6 4 <u>1</u>		1 4 6 4 <u>1</u>		1 4 6 4 <u>1</u>	k l m n <u>o</u>	
1 5 10 10 5 1		1 5 d d 5 1		1 5 d d 5 1		p q r s t u	

On reconnaît de nouveau le triangle de Pascal. De même qu'avant on voit que chaque diagonale est la somme des deux précédentes : règle de Fibonacci.

* * *

Remarques

1. La suite des décimales de la période de $1/109$ recèle d'autres surprises. Pour la décaler, calculons $21/109$:

$$21/109 = 0, \{192660550458715596330275229357798165137614678899082568807339449541284403669724770642201834862385321100917431\}$$

On voit qu'à droite on n'a plus la suite de Fibonacci, mais celle de Lucas !

2. D'ailleurs, à partir de tous les chiffres précédés d'un chiffre plus grand, vers la gauche, on trouve une « supersuite » de Fibonacci. S'ils sont précédés d'un chiffre plus petit, il faut simplement leur ajouter 1.
3. La fréquence des différents chiffres est très constante : chacun intervient 11 fois sauf 0 et 9 qui interviennent 10 fois.
4. D'autre part cette suite a une propriété très remarquable (probabilité $< 10^{-46}$ dans une suite aléatoire) : les 108 nombres formés par deux chiffres consécutifs (y compris le 108^{ème} et le 1^{er}) sont 00, 01, ..., 99, chacun 1 fois, sauf pour les doubles 11, 22, ..., 88 : chacun 2 fois. Cela ne saurait être dû au hasard, et je vois une explication a posteriori: si deux chiffres consécutifs (par exemple 21) se présentaient deux fois, la suite des décimales, à partir de ceux-ci, vers la gauche, serait identique et la période n'aurait pas 108 chiffres mais moins. En d'autres termes, 1/109 ne peut avoir la période maximale (108 chiffres) que si cette condition est remplie. Seuls 11 ... 88 peuvent exister 2 fois, une fois avec retenue, une fois sans. Remarquons que si les chiffres **a2** se suivent, $a = 6$. Si **a24**, $a = 7$ (retenue). Si **abb0**, $a = 2b$ (ou $2b - 10$) alors que si **abb9**, $a = 2b + 1$ (ou $2b + 1 - 10$). On peut voir enfin que tous les 0 et tous les 9 sont « utilisés » pour suivre les doubles ou eux-mêmes. La suite contient donc toutes les suites de Fibonacci commençant par deux nombres d'un chiffre. Et y en a encore qui ne croient pas aux miracles !
5. Précisons enfin que les propriétés A, B, C et D sont valables dans n'importe quelle base. Voici quelques résultats :
- En base 7

$1/13 = 1/16 = 0, \{035245631421\}_7$	cf en base 10: 1/19
$1/41 = 1/56 = 0, \{011236326213520225065543034045314644161\}_7$	cf en base 10: 1/89
$1/55 = 1/106 = 0, \{00614403364220153211\}_7$	cf en base 10: 1/109
 - En base 12. (A et B : chiffres 10 et 11)

$1/23 = 1/1B = 0, \{06316948421\}_{12}$	cf en base 10: 1/19
$1/71 = 1/5B = 0, \{020408142854A997732650A1834691163061\}_{12}$	cf en base 10: 1/49
$1/131 = 1/AB = 0, \{0112359...78404491B1\}_{12}$	cf en base 10: 1/89
$1/155 = 1/10B = 0, \{00B1944B55...99BA1853211\}_{12}$	cf en base 10: 1/109
6. La propriété notée sous 4. est valable en base 2 et en base 6. (Mais pas dans les quelques autres bases que j'ai testées...). Il faut et il suffit pour cela que $b^2 + b - 1$ soit premier et que son inverse soit de période maximale ($b^2 + b - 2$ chiffres) dans la base b, mais cette remarque est bien loin de donner les bases où la propriété est vraie !
- En base 2, $1/5 = 1/101 = 0, \{0011\}_2$
 En base 6, $1/41 = 1/105 = 0, \{0051335412440330234455042201431152253211\}_6$; tous les nombres de 2 chiffres de 00 à 55 apparaissent 1 fois sauf 11, 22, 33 et 44 qui apparaissent 2 fois.
7. On m'a signalé enfin que les nombres 109 et 89, qui présentent des propriétés « fibonaccien-nes » (donc des accointances avec le nombre d'or φ), sont donnés par les polynômes $b^2 + b - 1$ et $b^2 - b - 1$ dont les zéros sont φ et $-1/\varphi$ pour le premier, et pour le second $-\varphi$ et $1/\varphi$. Coïncidences ?