DPK

Euler'sche Polyederformel und elektrische Netzwerke

Martin Lieberherr, MNG Rämibühl, 8001 Zürich

Einleitung

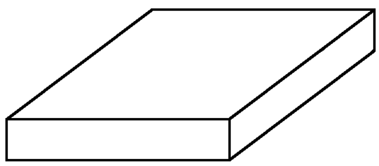
Es gibt Situationen, in denen man merkt, dass man im Alter sonderbar wird. Ich hätte z.B. beinahe die Haltestelle meines Zuges verpasst, weil ich in einem Buch auf eine Verbindung zwischen dem Euler'schen Polyedersatz (Topologie) und der Kirchhoff'schen Maschenregel (Elektrotechnik) stiess. Das Kapitel hatte mich so fasziniert, dass ich den Stopp im Zielbahnhof nicht bemerkte. Da meine Kollegen auch nichts von dieser Verbindung wussten, möchte ich den Gedankengang hier mitteilen. Das Buch heisst "Möbius und sein Band: Der Aufstieg von Mathematik und Astronomie im Deutschland des 19. Jahrhunderts" von J. Fauvel, R. Flood, R. Wilson (Hrsg.), Birkhäuser Verlag, 1994. Das Kapitel, auf das ich mich beziehe, heisst "Die Entwicklung der Topologie" und wurde von Norman Biggs geschrieben.

Euler'sche Polyederformel

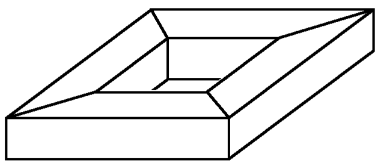
In einem Brief an Christian Goldbach vom November 1750 teilte Leonhard Euler einen Zusammenhang zwischen der Zahl der Ecken (e), Kanten (k) und Flächen (f) eines Körpers mit, und dass er den Zusammenhang nicht streng beweisen könne.

$$e - k + f = 2$$

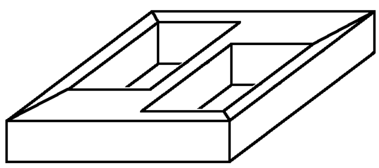
Die Regel kann leicht an einfachen Körpern wie Pyramiden, Quadern oder Prismen nachgeprüft werden. Der nächste Schritt bei der Erkundung dieses Satzes wurde vom Schweizer Mathematiker Simon-Antoine-Jean Lhuilier im Jahr 1813 veröffentlicht. Er fand, dass die Formel für Körper "mit Löchern" (Fig.1, 2, 3) nicht gilt.



Figur 1: Quader
$e - k + f = 8 - 12 + 6 = 2$



Figur 2: Quader mit Loch
$e - k + f = 16 - 32 + 16 = 0$

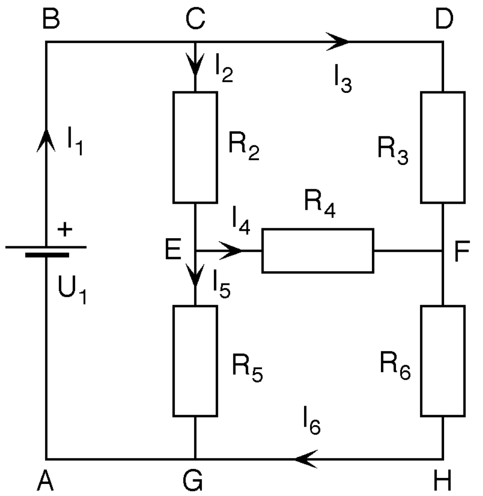


Figur 3: Quader mit zwei Löchern:
$e - k + f = 24 - 44 + 18 = -2$

Wenn der Köper g Löcher aufweist, ist $e - k + f = 2 - 2g$. Es ist jedoch nicht ganz klar, was mit "Zahl der Löcher" gemeint ist, geschweige denn, wie man sie mathematisch beschreiben soll. Die Tunnels im Innern eines Körpers können ja zusammenhängen. Der nächste Schritt wurde nicht von einem Mathematiker, sondern von einem Physiker gemacht: Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887). Er veröffentlichte 1845 und 1847 zwei Arbeiten über elektrische Netzwerke.

Knoten- und Maschenregel

Gegeben sei ein elektrisches Netzwerk aus Spannungsquellen, Widerständen und idealen Leitern (Figur 4).



Figur 4: Elektrisches Netzwerk bestehend aus einer Batterie mit Spannung U_1 und fünf Widerständen mit Widerstandswerten R_2 bis R_6. Gesucht sind die Ströme I_1 bis I_6. Die Bezugsrichtung für die Ströme ist bereits eingezeichnet.

Falls das resultierende Gleichungssystem linear sein soll, müssen die Spannungen der Quellen und die Widerstandswerte konstant (unabhängig von der Stromstärke) sein.

Die Kirchhoff'sche **Knotenregel** besagt, dass an jedem Knoten (Verzweigung) der Schaltung die Summe der hinein fliessenden Ströme gleich der Summe der hinaus fliessenden Ströme sein muss. Wäre das nicht so, müsste sich Ladung anhäufen oder verschwinden. Wegen dem Ladungserhaltungssatz kann sie nicht verschwinden. Anhäufen geht auch nicht, weil sonst starke elektrische Felder auftreten, die dem Ladungsfluss entgegen wirken. Die Knotenregel führt auf folgende Gleichungen (Schaltung von Figur 4):

Knoten C: $I_1 = I_2 + I_3$ (1)
Knoten E: $I_2 = I_4 + I_5$ (2)
Knoten F: $I_4 + I_3 = I_6$ (3)
Knoten G: $I_5 + I_6 = I_1$ (4)

Die Kirchhoff'sche **Maschenregel** besagt, dass entlang eines geschlossenen Weges im Netzwerk (Masche) die Summe der Potenzialänderungen verschwinden muss. Wie bei einer Bergwanderung: die Summe der zurückgelegten Höhenunterschiede muss Null sein, wenn man zum Ausgangspunkt zurückkehrt. Die Höhe über Meer entspricht dem elektrischen Potenzial. Das elektrische Potenzial ist beim Pluspol einer Batterie um die

Batteriespannung höher als am Minuspol. Die Potenziale vor und nach einem Widerstand unterscheiden sich um ±R·I. Da der elektrische Strom stets vom höheren zum tieferen Potenzial fliesst, ist die Potenzialänderung -R·I (negativ), wenn der Weg in Stromrichtung ("abwärts") durch einen Widerstand führt, sonst positiv. Damit folgt für unsere Schaltung:

Masche ABCEGA:	$U_1 - R_2I_2 - R_5I_5 = 0$	(5)
Masche ABCDFHGA:	$U_1 - R_3I_3 - R_6I_6 = 0$	(6)
Masche CDFEC:	$+ R_2I_2 - R_3I_3 + R_4I_4 = 0$	(7)
Masche EFHGE:	$- R_4I_4 - R_6I_6 + R_5I_5 = 0$	(8)
Masche ABCEFHGA:	$U_1 - R_2I_2 - R_4I_4 - R_6I_6 = 0$	(9)

Masche ABCDFDCEFHGEGA: .....

etc.

Zahl der unabhängigen Gleichungen

Wie man unschwer sieht, ist Gleichung (4) abhängig von den vorangehenden Gleichungen (1) - (3). Hat eine Schaltung n Knoten, so gibt es maximal n - 1 unabhängige Knotengleichungen. Dass dies so sein muss, kann man folgendermassen sehen: Man bringe alle Knotengleichungen auf die Standardform "einfliessende Ströme minus ausfliessende Ströme gleich Null". Dann zähle man alle Gleichungen zusammen. Da jeder Strom einmal als ausfliessender und einmal als einfliessender Strom vorkommt, muss 0 = 0 herauskommen. Weiss man das, kann man die n-te Knotengleichung aus den vorhergehenden ausrechnen.

Schwieriger ist es, die Zahl der unabhängigen Maschengleichungen zu bestimmen. Man kann sich mit der Regel behelfen, dass jede Batterie und jeder Widerstand einmal vorkommen muss. Auch sollten die Maschen möglichst einfach gewählt werden, also keine Zusatzrunden oder Umwege. Aber schon das ist schwierig festzustellen, wenn die Schaltung sehr gross ist oder nur als Liste in einem Computerspeicher existiert.

Im Beispiel von Figur 4 gibt es drei unabhängige Maschengleichungen. Kirchhoff bemerkte, dass 3 = 6 - 4 + 1 resp. f = k - e + 1 ist, wobei f = Zahl unabhängiger Maschen, e = "Ecken" (Knoten) und k = "Kanten" (Verbindung zweier Knoten, Ströme) ist. Kirchhoff konnte diese Beziehung beweisen. Knoten- und Maschenregel liefern zusammen also gerade genug Gleichungen, um alle Ströme zu berechnen. Kirchhoff fand einen Weg, das Netzwerk mathematisch zu beschreiben. Der Anzahl unabhängiger Maschen f des Netzwerks entsprechen eine Dimension höher die Anzahl Löcher g in einem Körper. Die Ideen G. R. Kirchhoffs sind u. A. von Enrico Betti und Henri Poincaré zur algebraischen Topologie ausgebaut worden.

Beweis (Schülerversion)

Im genannten Buch wird ein Beweis angedeutet, der leider nicht schülertauglich ist.

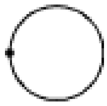
Meike Akveld (DMK) hat mich dankenswerterweise mit einem Beweis versorgt. In der Schülerversion werden nur ebene Netzwerke behandelt, der Satz gilt aber allgemeiner.

Leonhard Euler formulierte 1752 den folgenden Satz:
Für jeden zusammenhängenden, planaren Graphen gilt: $f - k + e = 1$, wobei f die Anzahl der eingeschlossenen Flächen, k die Anzahl Kanten und e die Anzahl Ecken ist.

Ein Graph ist ein Gebilde aus Ecken (Knoten, Punkte), die durch Kanten (Linien) verbunden sein können. Ein Graph ist zusammenhängend, wenn es zwischen zwei beliebigen Ecken einen Verbindungsweg entlang von Kanten gibt. Ein Graph ist planar, wenn er auf einer Ebene dargestellt werden kann, ohne dass sich die Kanten schneiden.

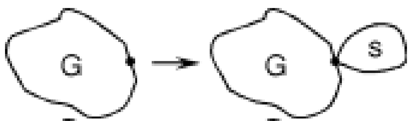
Man sieht sofort, dass Eulers Satz dieselbe Struktur wie Kirchhoffs Satz hat, wenn man die Anzahl eingeschlossener Flächen als Anzahl unabhängiger Maschen betrachtet. Der Beweis erfolgt mit vollständiger Induktion über die Anzahl Kanten. Für $k = 1$ gibt es zwei mögliche Graphen (Fig. 5 und 6).

Figur 5: $f - k + e = 0 - 1 + 2 = 1$ ist korrekt

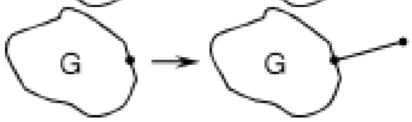


Figur 6: $f - k + e = 1 - 1 + 1 = 1$ ist korrekt

Nun nehmen wir an, der Satz sei bewiesen für einen Graphen mit k Kanten. Wir wollen zeigen, dass er immer noch wahr ist, wenn man die Kantenzahl um Eins erhöht. Dafür haben wir zwei Möglichkeiten (Figur 7 und 8).

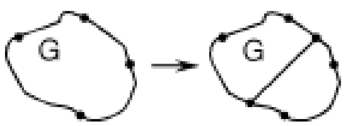


Figur 7: Wir hängen bei einem Graphen G an einer Ecke eine Schlaufe S an: $(f + 1) - (k + 1) + (e + 0) = f - k + e = 1$ (kor.)



Figur 8: Wir fügen eine Kante mit freier Ecke an:
$(f + 0) - (k + 1) + (e + 1) = f - k + e = 1$ (korrekt)

Somit ist der Satz von Euler durch vollständige Induktion bewiesen. Den Physikerinnen und Physikern gefallen die Erweiterungen des Graphen (Fig. 7-8) vielleicht nicht, weil sie elektrisch sinnlos sind. Wir können gerne ein realistischeres Beispiel probieren (Figur 9).



Figur 9: Wir unterteilen eine bestehende Masche:
$(f + 1) - (k + 3) + (e + 2) = f - k + e = 1$ (korrekt)

Und nun liefert Meike noch den vollständigen Beweis für Lehrkräfte.