

## CAS am Gymnasium und an der Hochschule

Otto Keiser

Wohl eine Mehrzahl der Deutschweizer Gymnasien setzt inzwischen in ihrem Mathematik- und Physikunterricht CAS (Computer Algebra Systeme) ein. Alternativ dazu werden meistens grafikfähige Taschenrechner verwendet. Gar nicht so selten wird der Verzicht auf CAS mit der Tatsache begründet, dass an den Examen vieler Hochschulen, insbesondere auch an der ETH, CAS in der Regel nicht erlaubt sind. In diesem Beitrag soll dargelegt werden, dass dieser Schluss m. E. nicht berechtigt ist.

Betrachten wir dazu eine typische Aufgabe, wie sie kürzlich an einem ETH-Vordiplom für Studenten verschiedener naturwissenschaftlicher Richtungen sinngemäss gestellt wurde:

Aufgabe 1:

- a) Berechne für die Funktion  $x \rightarrow y = \sqrt[3]{x}$  das Taylorpolynom vom Grad 2 an der Stelle  $x_0 = 1$ .
- b) Berechne hieraus  $\sqrt[3]{1.1}$ .

Es ist offensichtlich, dass die Aufgabe darauf abzielt, in einer sehr einfachen Umgebung fundamentale Begriffe und Ergebnisse der Analysis (Potenzfunktion mit gebrochenen Exponenten, Taylorreihe, Ableitung) samt praktischer Bedeutung abzufragen. Die geforderten mathematischen Fertigkeiten reduzieren sich auf die Anwendung der Potenzregel und einfachste Bruchrechnung. Es dürfte schwierig sein, einen Gymnasiallehrer zu finden, der nicht damit einverstanden ist, dass solche oder dazu äquivalente Aufgaben auch am Gymnasium *regelmässig* an Prüfungen *ohne* CAS zu lösen sind und dass im Hinblick auf den Aufgabenteil b) sogar *jedliches Rechenhilfsmittel untersagt* ist.

Andererseits müssen die besagten Studenten in den wöchentlichen Aufgabenserien regelmässig -oft realistische- Probleme lösen, bei welchen die Hilfe eines professionellen CAS (z. B. Mathematica) unerlässlich ist.

Diese Darlegungen sollten klar machen, dass die eingangs erwähnte Argumentation gegen CAS am Gymnasium schlecht begründet ist. Richtig ist das Gegenteil: Wenn wir am Gymnasium CAS einsetzen, so unterstützen wir sogar den aktuellen Hochschulunterricht.

Auch am Gymnasium müssen wir versuchen, Mathematik in überzeugenden und daher motivierenden Situationen anzuwenden. CAS ermöglicht dabei, den Bereich von möglichen Beispielen massiv auszuweiten. Zur Illustration ein mit dem obigen eng verwandtes Problem, das im Frühling 2005 an der T3-Regionaltagung Ostschweiz präsentiert und gelöst wurde [1].

Beleuchtet man den Innenrand eines Hohlzylinders (z.B. eine Kaffeetasse [2]) mit Parallellicht, so beobachtet man auf der inneren Kreisfläche einen beleuchteten Bereich, die sog. Kaustik mit einer herzförmigen Randkurve.

Man kann die Gleichung des Kaustikrandes näherungsweise gemäss folgender Idee [1] berechnen:

- Der Innenkreis mit der Gleichung  $y = -\sqrt{1-x^2}$  wird in jedem Punkte  $x = t$  durch eine Quadratparabel approximiert (Taylorreihe vom Grad 2).
- Ihr Brennpunkt  $F$  wird berechnet (die Parabel  $p(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$  hat  $F(-\frac{b}{2a} | \frac{4a \cdot c - b^2 + 1}{4a})$ ).
- Die Menge aller Brennpunkte bildet die gesuchte Grenzkurve, d.h. sie hat die Parameterdarstellung:

$$x(t) = -\frac{b}{2a} \quad y(t) = \frac{4 \cdot a \cdot c - b^2 + 1}{4a}$$

Es steht ausser Frage, dass dieser Lösungsweg viele unserer Schüler und Schülerrinnen ohne das Hilfsmittel CAS überfordern würde. Aber ebenso ist klar, dass

- die meisten die Lösungsidee verstehen,
- den Lösungsweg auf dem Papier planen
- und die Lösung auf einem CAS durchführen können (siehe nachstehendes, leicht bearbeitetes Lösungsprotokoll des TI-voyage 200).



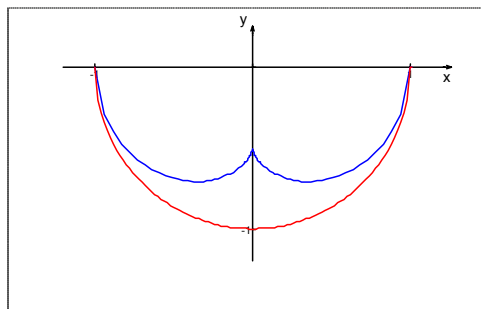
▪ Gleichung der Ringinnenseite	
▪ $-\sqrt{1-x^2} \rightarrow k(x)$	Done
▪ Taylorentwicklung	
▪ $\text{taylor}(k(x),x,2,t) \rightarrow \text{tp}(x)$	Done
▪ $\text{comDenom}(\text{tp}(x),x)$	$\frac{x^2 - 2 \cdot x \cdot t^3 + 3 \cdot t^2 - 2}{2 \cdot (1-t^2)^{3/2}}$
▪ Koeffizienten der Parabel	
▪ $\frac{1}{2 \cdot (1-t^2)^{3/2}} \rightarrow a$	$\frac{1}{2 \cdot (1-t^2)^{3/2}}$
▪ $\frac{-2 \cdot t^3}{2 \cdot (1-t^2)^{3/2}} \rightarrow b$	$\frac{-2 \cdot t^3}{2 \cdot (1-t^2)^{3/2}}$
▪ $\frac{3 \cdot t^2 - 2}{2 \cdot (1-t^2)^{3/2}} \rightarrow c$	$\frac{3 \cdot t^2 - 2}{2 \cdot (1-t^2)^{3/2}}$
▪ Koordinaten des Brennpunktes	
▪ $-\frac{b}{2 \cdot a}$	$t^3$
▪ $\text{ans}(1) \rightarrow x(t)$	Done
▪ $\frac{4 \cdot a \cdot c - b^2}{4 \cdot a} + \frac{1}{4a}$	$\frac{-(2 \cdot t^2 + 1) \cdot \sqrt{1-t^2}}{2}$
▪ $\text{ans}(1) \rightarrow y(t)$	Done

Nach diesen gut verständlichen Vorbereitungen erhalten wir also die folgende *Parameterdarstellung* für die gesuchte Grenzkurve:

$$x(t) = t^3$$

$$y(t) = \frac{-(2 \cdot t^2 + 1) \cdot \sqrt{1-t^2}}{2}$$

Erstaunt und überrascht werden die Schüler im Graphikfenster eine Kurve bestaunen, die sich oberflächlich gesehen nicht vom realen Rand der Kaustik unterscheidet.



Abschliessend möchte ich zur Frage „CAS am Gymnasium?“ zu bedenken geben, dass wohl die Mehrheit der Maturanden und Maturandinnen eine Studienrichtung einschlägt, bei welcher Mathematik und Physik nicht einmal mehr am Rande vorkommen. Sie werden Juristen, Sprachler, Geschichtler, Lehrer etc. Wir Gymnasiallehrer sind aufgerufen, ihnen für ihr ganzes Leben ein Bild von Mathematik und Physik zu vermitteln, das der *zentralen* Stellung dieser Disziplinen im sog. modernen Leben gerecht wird. Dass dies mit CAS besser möglich ist, steht für mich ausser Frage.

Übrigens gelangen einige dieser Absolventen schliesslich als Politiker oder Beamte in Positionen, aus welchen sie die übernächste Revision der MAR massgeblich mitbestimmen werden. Auch hier haben wir es in der Hand, sie für unsere Fächer günstiger zu stimmen als dies beim Entwurf der MAR der Fall war.

[1] A. Vogelsanger, KS Burggraben St. Gallen,

[2] <http://www1.physik.tu-muenchen.de/~cucke/ftp/lectures/kaustik3.pdf>

Otto M. Keiser

Hinterbergstrasse 88, 8044 Zürich; omkeiser@smile.ch