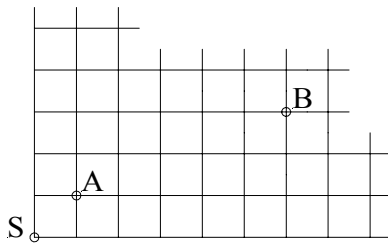


Unabhängige Punkte im Koordinatengitter

Oliver Riesen, Kantonsschule Zug

Ausgangspunkt meiner kleinen Betrachtung war die Vorbereitung zu einer Stochastik-Prüfung, was schliesslich zu folgender Prüfungsaufgabe führte.

Mr. X startet im Koordinatengitter im Punkt $S(0 | 0)$ und bewegt sich nach rechts und oben. An jedem Kreuzungspunkt entscheidet er per Zufall ($p = \frac{1}{2}$), ob er nach rechts bzw. nach oben weiter gehen soll.



Wir definieren die Ereignisse

A: Mr X kommt im Punkt A vorbei.

B: Mr X kommt im Punkt B vorbei.

Sind die Ereignisse A und B abhängig oder unabhängig?

Die W'keit, dass Mr. X auf seinem Weg im Punkt $A(1 | 1)$ vorbeikommt, beträgt genau $\frac{1}{2}$, was man mit der bekannten Formel löst.

Die W'keit, dass Mr. X beim Punkt $B(6 | 3)$ vorbeikommt, beträgt $\binom{9}{3} \cdot 0.5^9 = \frac{21}{128}$.

Und die W'keit, dass Mr. X sowohl beim Punkt A und auch beim Punkt B vorbeikommt, beträgt $\binom{2}{1} \cdot 0.5^2 \cdot \binom{7}{2} \cdot 0.5^7 = \frac{21}{256}$

Weil $P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$, sind die beiden Punkte unabhängig. (Ich werde nun nicht mehr von unabhängigen Ereignissen, sondern von unabhängigen Punkten schreiben.)

Das kann man auch so sehen: Wenn Mr. X beim Punkt A sicher vorbeikommt (er kann auch dort starten), dann beträgt die W'keit, dass er bei B vorbeikommt $\binom{7}{2} \cdot 0.5^7 = \frac{21}{128}$ und diese

W'keit ist dieselbe, wie wenn Mr. X im Punkt $(0 | 0)$ startet. Die Information über den Punkt A verändert also die W'keit nicht, dass Mr. X bei B vorbeikommt. Also ist die W'keit, bei B vorbeizukommen, unabhängig davon, ob Mr. X vorher bei A vorbeikam oder nicht.

Die Tatsache, dass die beiden Punkte unabhängig sind, hängt wesentlich davon ab, dass für die verwendeten Binomialkoeffizienten $\binom{9}{3} = 4 \cdot \binom{7}{2}$ gilt.

Weil ich beim Vorbereiten besagter Prüfung per Zufall darauf gestossen bin, dass

$\binom{9}{3} = 4 \cdot \binom{7}{2}$ gilt und somit die Punkte A und B unabhängig sind, habe ich mich gefragt, ob es

weitere solche Punkte im Koordinatensystem gibt, die unabhängig sind.

Hier lässt sich der Taschenrechner mit CAS experimentell gut einsetzen.

1. Unabhängigkeit zum Punkt (1 | 0)

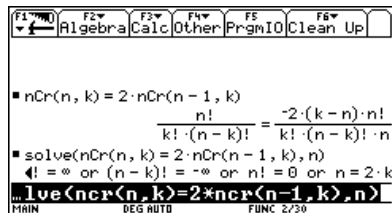
Die W'keit, in einem Punkt (m | k) vorbeizukommen, muss also dieselbe sein, egal ob man im Punkt (0 | 0) oder im Punkt (1 | 0) startet.

Also muss $\binom{m+k}{k} \cdot 0.5^{m+k} = \binom{m+k-1}{k} \cdot 0.5^{m+k-1}$ sein.

Wenn wir vereinfachend $m+k = n$ setzen und die Zweierpotenzen zusammenfassen, erhalten

wir die entscheidende Gleichung $\binom{n}{k} = 2 \cdot \binom{n-1}{k}$. Diese Gleichung kann man auch noch von

Hand gut lösen, aber den Einsatz von CAS kann man damit auch gerade üben.



Der TI liefert problemlos $n = 2k$, folglich ist $m = k$ und der Punkt (k | k) zu (1 | 0) unabhängig. Dies gilt für alle $k > 0$.

Für jedes t ist der Punkt (t | t) unabhängig zu (1 | 0)

Aus Symmetriegründen ist (t | t) auch unabhängig zu (0 | 1). Ich werde mich aber für den Rest der Arbeit auf die Fälle beschränken, bei denen im Punkt A(x | y) $x \geq y$ ist.

2. Unabhängigkeit zum Punkt (1 | 1)

Wenn der Punkt (m | k) zu A(1 | 1) unabhängig sein soll, dann muss die folgende Gleichung

gelten: $\binom{m+k}{k} \cdot 0.5^{m+k} = \binom{m+k-2}{k-1} \cdot 0.5^{m+k-2}$

Setzen wir wieder $m+k = n$ und vereinfachen, dann erhalten wir $\binom{n}{k} = 4 \cdot \binom{n-2}{k-1}$. Dabei

muss $n \geq 2$ sein.

Die Umformung $\binom{n}{k} - 4 \cdot \binom{n-2}{k-1} = 0$ liefert sofort die entscheidende Gleichung $4 \cdot k^2 - 4 \cdot k \cdot n + n \cdot (n-1) = 0$. Deren Lösung zeigt alles Nötige:

Damit ganzzahlige Lösungen auftreten, muss n eine Quadratzahl sein. Für $n = 4$ erhält man a) $k = 3$, somit $m = 1$ und der Punkt ist $(1 | 3)$ b) $k = 1$, somit $m = 3$ und der Punkt ist $(3 | 1)$ Analog gibt es für $n = 9$ die beiden zur Diagonalen symmetrisch liegenden Punkte $(6 | 3)$ und $(3 | 6)$. Hier taucht der Punkt vom Ausgangsproblem auf.

Wir lösen den Fall noch allgemein und setzen $n = t^2$.

k hat dann die Form $k = \frac{t \cdot (t+1)}{2}$, $t \in \mathbb{N}$ oder $k = \frac{t \cdot (t-1)}{2}$, $t \in \mathbb{N}$. Hier kommt nebenbei die Summe der ersten t natürlichen Zahlen ins Spiel. Somit ist der folgende Satz bewiesen:

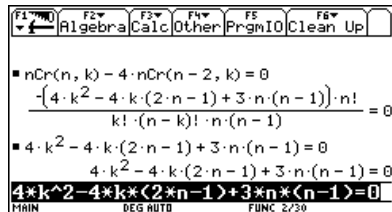
Für jedes t sind die Punkte $\left(\frac{t \cdot (t+1)}{2} \mid \frac{t \cdot (t-1)}{2}\right)$ und $\left(\frac{t \cdot (t-1)}{2} \mid \frac{t \cdot (t+1)}{2}\right)$ unabhängig zu $(1 | 1)$.

Die Unabhängigkeit zu $(1 | 1)$ hat sich als interessantester Fall meiner Untersuchungen herauskristallisiert.

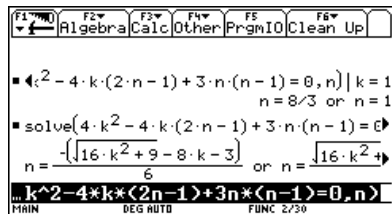
3. Unabhängigkeit zum Punkt $(2 | 0)$

Jetzt lautet die Gleichung $\binom{n}{k} = 4 \cdot \binom{n-2}{k}$ resp. $\binom{n}{k} - 4 \cdot \binom{n-2}{k} = 0$. Dabei ist $n \geq 2$.

Daraus ergibt sich (siehe Rechner-Output): $4 \cdot k^2 - 4 \cdot k \cdot (2n-1) + 3 \cdot n \cdot (n-1) = 0$
 Interessanterweise ist es für diesen Fall einfacher, die Gleichung nach n auflösen zu lassen
 (und nicht nach k).



Für $k = 1$ erhält man $n = 1$, was zu $n \geq 2$ im Widerspruch steht.
 Wenn man für k weitere Werte einsetzt, sieht man, dass es keine ganzzahligen Lösungen gibt.
 Also lassen wir die Gleichung allgemein auflösen:



Unter der Wurzel steht $(4k)^2 + 9$. Damit eine ganzzahlige Lösung vorkommt, muss dieser Ausdruck wieder ein Quadrat sein. Das geht aber nur für $k = 1$. Somit gilt:

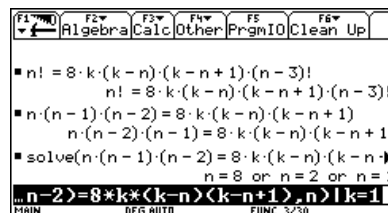
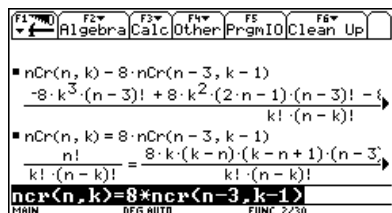
Es gibt keinen zu (2 | 0) unabhängigen Punkt.

4. Unabhängigkeit zum Punkt (2 | 1)

Jetzt lautet die wichtige Gleichung $\binom{n}{k} = 8 \cdot \binom{n-3}{k-1}$, wobei $n \geq 3$.

Hier hilft der Lösungsansatz über die Differenz $\binom{n}{k} - 8 \cdot \binom{n-3}{k-1} = 0$ nicht weiter.

Wenn man hingegen die Gleichung direkt hinschreibt, dann erhält man
 $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) = 8 \cdot k \cdot (k-n) \cdot (k-n+1)$



Wenn man nun auflöst, erhält man für $k = 1$ die widersprüchlichen Lösungen $n = 1$ oder $n = 2$, hingegen ist $n = 8$ interessant. Das führt zum Punkt $P(7 | 1)$.

Der Punkt $P(7 | 1)$ ist vom Punkt $(2 | 1)$ unabhängig.

Für $k = 2$ erhält man nur $n = 2$, was aber nicht geht.

Für $k \leq 10$ gibt es keine weiteren ganzzahligen Lösungen für n .

Der Taschenrechner ist nicht in der Lage, die Gleichung allgemein zu lösen.

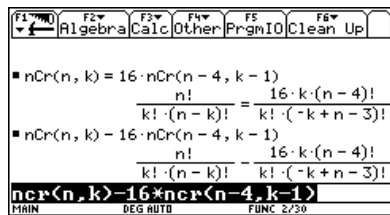
Mathematik-Software-Pakete (Mathematica, Maple etc.) können die Gleichung zwar auflösen; ob sich darunter ganzzahlige Lösungen befinden, ist aber nicht ohne weiteres ersichtlich.

Ich vermute, dass ausser $(7 | 1)$ kein ganzzahliger Punkt zu $(2 | 1)$ unabhängig ist.

5. Unabhängigkeit zum Punkt $(3 | 1)$

Jetzt starten wir mit der Gleichung $\binom{n}{k} = 16 \cdot \binom{n-4}{k-1}$. Jetzt gilt $n \geq 4$.

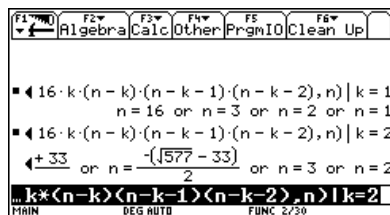
Da bringen beide Ansätze vorerst keinen entscheidenden Fortschritt.



Also formen wir von Hand um: $\frac{n!}{(n-4)!} = 16k \frac{(n-k)!}{(n-k-3)!}$

oder noch besser $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) = 16 \cdot k \cdot (n-k) \cdot (n-k-1) \cdot (n-k-2)$

und lösen auf nach n , wenn k verschiedene Werte annimmt.



Für $k = 1$ erhält man nur den interessanten Fall $n = 16$. Das ergibt den Punkt $(15 | 1)$.

Der Punkt $(15 | 1)$ ist zu $(3 | 1)$ unabhängig.

Für $k = 2$ gibt es zwar $n = 2$ oder $n = 3$, was aber nicht geht. Für weitere Werte von $k \leq 10$ gibt es keine ganzzahligen Lösungen.

Ich vermute, dass es ausser $(15 | 1)$ keine weiteren Punkte gibt, die zu $(3 | 1)$ unabhängig sind.

6. Unabhängigkeit zu weiteren Punkten

Aus den Berechnungen der beiden vorherigen Kapitel lässt sich vermuten:

Der Punkt $(2^t - 1 | 1)$ ist zu $(t - 1 | 1)$ unabhängig.

Das lässt sich zum Schluss sogar von Hand beweisen.

Die Gleichungen $\binom{n}{k} = 8 \cdot \binom{n-3}{k-1}$ bzw. $\binom{n}{k} = 16 \cdot \binom{n-4}{k-1}$ stehen für die Fälle $t = 3$ resp. $t = 4$.

Verallgemeinert ergibt sich $\binom{n}{k} = 2^t \cdot \binom{n-t}{k-1}$.

Für $k = 1$ wird die Gleichung zu $\binom{n}{1} = 2^t \cdot \binom{n-t}{0}$. Weil $\binom{n-t}{0} = 1$, muss für $n = 2^t$ sein.

Somit ist der eine Punkt $(2^t - 1 | 1)$ und der andere ist $(t - 1 | 1)$.

7. Schlussbetrachtungen

Ich habe drei Scharen von Punkten gefunden, die zueinander unabhängig sind. (In der Zusammenfassung lasse ich die jeweils symmetrisch liegenden Fälle weg.)

In 2. habe ich gezeigt, dass die Punkte $(t | t)$ zu $(1 | 0)$ unabhängig sind.

In 3. habe ich gezeigt, dass die Punkte $\left(\frac{t \cdot (t+1)}{2} \mid \frac{t \cdot (t-1)}{2}\right)$ zu $(1 | 1)$ unabhängig sind.

In 6. habe ich gezeigt, dass die Punkte $(2^t - 1 | 1)$ und $(t - 1 | 1)$ voneinander unabhängig sind.

Ich vermute, dass es keine weiteren ganzzahligen Punkte gibt, die voneinander unabhängig sind, jedoch habe ich dazu – abgesehen vom betrachteten Fall $A(2 | 0)$ – keinen Beweis.

Insbesondere wäre die Unabhängigkeit zu $(3 | 0)$ und zu $(2 | 2)$ interessant. Die entstehenden Gleichungen sind jedoch dritten resp. vierten Grades. Ein Mathematik-Software-Paket wie beispielsweise Maple löst die Gleichungen zwar auf, ob ganzzahlige Lösungen dabei auftreten können, ist aber nicht klar. Experimentell lässt sich ermitteln, dass es für kleine Werte von k (getestet habe ich etwa bis $k = 10$) keine ganzzahligen Lösungen für n gibt.

Daher meine Vermutung, dass es abgesehen von den oben erwähnten Unabhängigkeiten keine weiteren Fälle gibt. Mich interessiert, ob meine Vermutung richtig ist, jedoch habe ich keinen Beweis dafür.

Oliver Riesen, Kantonsschule Zug
Lüssiweg 24, 6302 Zug
oliver.riesen@ksz.ch