Knoten in der Mathematik

Meike Akveld, MNG Rämibühl, 8001 Zürich

Knoten gibt es überall. Jeder braucht Knoten, sei es um die Zeitungen zusammenzuschnüren, ein Seil zu befestigen oder die Schuhe zu binden. Aber mathematische Knoten – was sind das?

Definition: Ein Knoten ist eine glatte, 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit der 3-dimensionalen Mannigfaltigkeit S^3.

In etwas weniger gehobener Sprache stellen wir uns einen Knoten am besten aus einem Stück Schnur her. Nehmen Sie also eine recht dicke Schnur in die Hand und verknoten Sie sie ganz nach Belieben. Jetzt kommt der handwerklich schwierige Teil: Die beiden Enden der Schnur müssen so zusammengefügt werden, dass man gar nicht mehr merkt, dass dort einmal ein Unterbruch war. Auch wenn Ihnen das kaum gelingt, können Sie diese unschöne Flickstelle in Ihrer Vorstellung einfach wegdenken – und schon haben Sie einen mathematischen Knoten.

Das Ziel der Mathematik ist, diese Knoten zu klassifizieren, d.h. eine Liste aller verschiedenen Knoten zu erstellen. Dabei muss man entscheiden können, wann zwei Knoten gleich sind und wann nicht. In der Mathematik heissen zwei Knoten **gleich**, wenn man den einen durch Deformieren in den anderen überführen kann. Unter Deformieren verstehen wir das Umherführen von Schnurstücken des Knotens, ohne eine Schere zur Hand zu nehmen.

Der einfachste Knoten ist der Unknoten, der sich durch Deformieren in eine o-förmige Schlaufe auflösen lässt. Was ist nun der nächst kompliziertere Knoten? Wenn Sie ein bisschen mit einer Schnur herumspielen, kommen Sie wahrscheinlich schnell zum Beispiel in der Abbildung 1. Diese Abbildung stellt ein so genanntes **Knotendiagramm** des Kleeblattknotens dar.

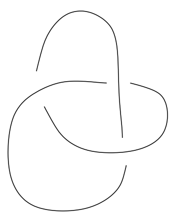

Abbildung 1: Das Kleeblatt

Wenn man etwas länger mit diesem Knoten herumspielt, kommt man zum Schluss, dass dieser Knoten sich nicht durch Deformieren in den Unknoten umformen lässt. Aber wie können wir dies beweisen?

In diesem Artikel möchte ich zuerst die Methode der Dreifärbbarkeit einführen und damit beweisen, dass das Kleeblatt tatsächlich verschieden ist von dem Unknoten. Danach werde ich skizzieren wie man zeigen kann, dass die Dreifärbbarkeit wirklich eine Knoteninvariante ist.

Schliesslich sehen wir, dass auch diese Methode bald an ihre Grenzen stösst und werfen einen kleine Blick in die grosse Welt der Knotentheorie.

1 Dreifärbbarkeit

Eine Methode, mit der man gewisse Dinge als gleich und gewisse Dinge als verschieden bezeichnen kann, beruht in der Mathematik auf so genannten **Invarianten**, also Eigenschaften, die erhalten bleiben, wenn man die Objekte unwesentlich verändert. Das heisst für uns jetzt, dass wir Eigenschaften eines Knotens suchen, die sich nicht ändern, wenn wir den Knoten deformieren. Eine solche Eigenschaft ist die Dreifärbbarkeit, die wie folgt definiert ist. Ein Knoten ist **3-färbbar**, wenn man das Knotendiagramm mit drei Farben färben kann, wobei die folgenden Regeln eingehalten werden müssen:

- Man färbt jedes Schnurstück so mit einer einzigen Farbe ein, dass sie nicht wechselt, bis die Linie im Knotendiagramm abbricht. Das bedeutet: Zwischen zwei aufeinander folgenden Kreuzungen, an denen die Schnur unten liegt, wird immer nur eine Farbe verwendet.
- An jeder Kreuzung stossen entweder eine oder drei Farben zusammen.
- Beim Färben des Knotendiagramms müssen alle drei Farben benützt werden.

Es ist leicht einzusehen, dass der Unknoten nicht 3-färbbar ist – man braucht nur eine Farbe. Auch wenn man ihn anders hinlegt (siehe Abb. 2), gelingt es nicht, ihn mit drei Farben einzufärben. Das Kleeblatt lässt sich aber gut mit drei Farben einfärben und ist damit dreifärbbar (machen Sie dies selber). Somit hätten wir bewiesen dass diese beide Knoten in der Tat nicht gleich sind.

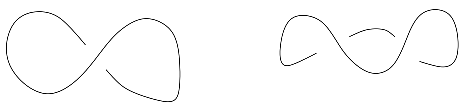

Abbildung 2: Varianten zu dem Unknoten

2 Knoteninvarianten

Wieso aber ist Dreifärbbarkeit eine Knoteninvariante? Eine Knoteninvariante soll die Eigenschaft haben, dass – egal wie man den Knoten deformiert–, die Invariante unverändert bleibt. Wie wir schon gesehen haben, betrachten wir oft statt den in $\mathbb{R}^3$ eingebetteten Knoten seine Projektion auf einer Ebene. Das heisst also, dass zwei verschiedene Projektionen des gleichen

Knotens die gleichen Invarianten oder Eigenschaften haben sollten. Wie lässt sich dies überhaupt überprüfen? Jeder Knoten hat unendlich viele verschiedene Projektionen.

Wenn wir einen Knoten deformieren, um ihn zu vereinfachen oder um ihn in eine besser erkennbare Form zu bringen, heisst das, dass wir Schnurstücke hin und her schieben und dabei neue Kreuzungen kreieren oder alte vernichten. Wir machen das mehr oder weniger instinktiv und merken, was wohl am sinnvollsten ist. Im Jahr 1929 wollte der Knotentheoretiker Kurt Reidemeister (1893-1971) über das einfache Probieren hinausgehen und herausfinden, wie viele verschiedene Deformierungsschritte überhaupt möglich sind. Überraschend stellte er fest, dass sich die Knotendiagramme von zwei gleichen Knoten mit nur drei Sorten von Schritten, den so genannten **Reidemeister-Schritten**, ineinander überführen lassen (siehe Abb. 3). Der Beweis dafür ist nicht sehr schwierig, aber es würde zu weit führen, ihn hier zu besprechen. Jedenfalls leuchtet ein, dass die drei Reidemeister-Schritte einen Knoten sicher nicht verändern. Überraschend ist eher, dass es nichts Komplizierteres braucht.

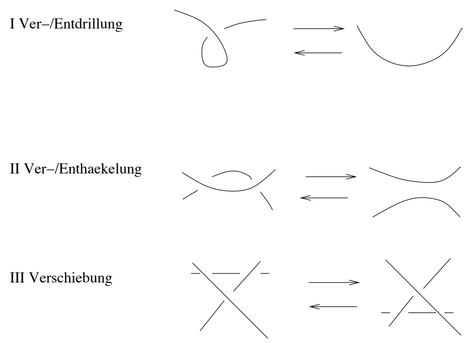

Abbildung 3: Die drei Reidemeister-Schritte

Der Beweis, dass Dreifärbbarkeit eine Knoteninvariante ist, besteht darin zu zeigen dass diese Eigenschaft unverändert bleibt unter den drei Reidemeister-Schritten. Um dies zu zeigen, stellen wir uns vor, wir hätten vor uns ein Knotendiagramm von einem 3-färbbaren Knoten. Jetzt wollen wir das Diagramm mit einem der drei Reidemeister-Schritte ändern und schauen, ob es danach immer noch 3-färbbar ist. Man kann sich vorstellen, dass diese Änderung nur in einem kleinen Teil des Knotendiagramms stattfindet, und wir werden diesen Teil umkreisen. Innerhalb dieses Kreises werden wir einen Reidemeister-Schritt ausführen, die Regeln der Dreifärbbarkeit bei einer allfälligen Neufärbung einhalten und darauf achten, dass die den Kreis verlassenden Schnurstücke die gleiche Farbe wie zuvor behalten. Damit erreichen wir, dass ein Knoten, der 3-färbbar war, auch nach dem Reidemeister-Schritt immer noch 3-färbbar ist.

Als Beipsiel schauen wir uns den Reidemeister-Schritt II an. Hier müssen wir zwei Fälle unterscheiden: Beide Schnurstücke haben entweder die gleiche Farbe oder verschiedene (siehe Abb. 4).

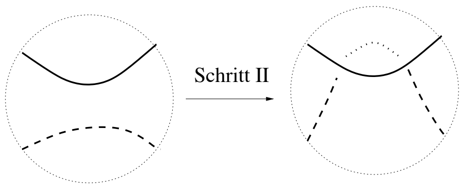

Abbildung 4: Dreifärbbarkeit unter Reidemeister-Schritt II

Wenn wir – im Fall von zwei Farben – jetzt die Verhäkelung durchführen, bleibt uns nur eine Möglichkeit, das neu entstandene Schnurstück einzufärben. Da die vier Ausgänge ihre Farbe beibehalten müssen, treffen an den beiden neuen Kreuzungen schon zwei Farben aufeinander, was bedeutet, dass das neu entstandene Schnurstück mit der dritten Farbe gefärbt werden muss. So sind die Regeln der Dreifärbbarkeit innerhalb des Kreises eingehalten, weil sich an jeder Kreuzung drei Farben treffen. Damit bleibt in diesem Fall beim Reidemeister-Schritt II die Dreifärbbarkeit erhalten. Auf ähnlicher Weise lassen sich auch die andere Variante zum Schritt II sowie die anderen Schritte beweisen. Damit haben wir bewiesen, dass Dreifärbbarkeit eine Knoteninvariante ist und der Unknoten also nicht gleich dem Kleeblatt ist.

3 Noch ein Beispiel

Betrachten Sie die drei Knoten in Abbildung 5. So wie sie hier dargestellt sind, zeigen alle drei sechs Kreuzungen. Versucht man diese Knoten mit weniger Kreuzungen zu projizieren, wird man sehen, dass dies nicht gelingt. Sind diese drei Knoten doch aber gleich?

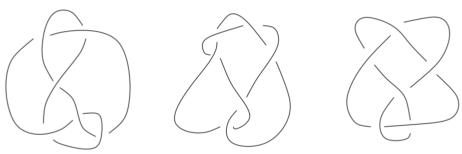

Abbildung 5: Drei Knoten mit sechs Kreuzungen

Beweisen Sie mit Hilfe der Dreifärbbarkeit, dass mindestens zwei der drei Diagramme zu Knoten gehören die verschieden sind.

4 Wie es weiter geht...

Die drei Knoten in Abbildung 5 sind tatsächlich die einzigen drei Knoten mit Kreuzungszahl sechs – und alle sind verschieden. Um dies zu beweisen, reicht die Dreifärbbarkeit leider nicht. Sie unterteilt die Knoten nur in zwei Gruppen: 3-färbbar oder nicht. Es gibt in der Knotentheorie eine Reihe weiterer Methoden, um Knoten voneinander unterscheiden zu können. In "Knoten in der Mathematik; Ein Spiel mit Schnüren, Bildern und Formeln" [1] stelle ich einige andere Knoteninvarianten vor – als Höhenpunkt das Jonespolynom. Diese Invariante ordnet jedem Knoten ein Polynom zu. Der neuseeländische Mathematiker Vaughan Jones wurde für diese neue Knoteninvariante im Jahr 1990 mit der Fieds-Medaille geehrt. Dieses Themenheft besteht im Prinzip aus zwei Teilen: Die ersten fünf Kapitel sind durchaus für das Untergymnasium zugänglich. Die letzten zwei Kapitel sind eher für die Oberstufe gedacht und erfordern eine gewisse Sicherheit im Umgang mit algebraischen Umformungen [2].

[1] Themenheft Knoten in der Mathematik; Ein Spiel mit Schnüren, Bildern und Formeln, Meike Akveld, herausgegeben durch die DMK bei Orell Füssli

[2] Es folgt eine Weiterbildung zu diesem Thema im Herbst 2007