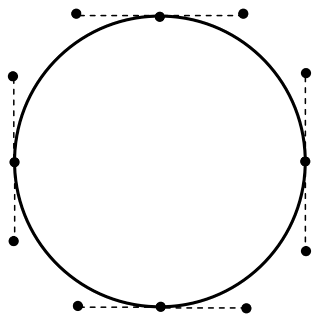
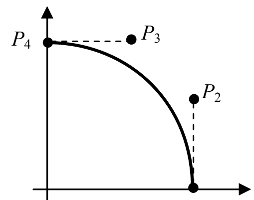
CERCLES et ARCS DE BÉZIER

Jean-Marc Ledermann, Neuchâtel



Un cercle, dessiné par un logiciel graphique est en pratique composé de 4 arcs de Bézier. Pour observer cette particularité, il suffit de dessiner un cercle avec Illustrator par exemple, puis de le sélectionner pour voir apparaître les points de contrôle des arcs de Bézier qui le forment.

Dans cet article, nous nous intéresserons à la meilleure façon de choisir les points de contrôle de ces arcs de sorte qu'ils ressemblent à des quarts de cercle, puis nous observerons la différence entre le dessin produit et un *vrai* cercle.



Prenons le quart de cercle de rayon 1 centré à l'origine. Il est approché par un arc de Bézier dont les points de contrôle sont P_1, P_2, P_3 et P_4. Les extrémités de l'arc de Bézier étant P_1 et P_4, il est naturel de choisir $P_1(1;0)$ et $P_4(0;1)$.

En considérant l'arc de Bézier comme la trajectoire d'un point mobile, on sait que le vecteur $\overrightarrow{P_1P_2}$ est le tiers du vecteur vitesse en P_1 et que le vecteur $\overrightarrow{P_3P_4}$ est le tiers du vecteur vitesse en P_4 (pour s'en convaincre, il suffit de dériver les fonctions paramétriques définissant l'arc de Bézier).

Pour que la courbe formée des 4 arcs soit lisse et ressemble à un cercle il faut que le vecteur $\overrightarrow{P_1P_2}$ soit vertical et que le vecteur $\overrightarrow{P_3P_4}$ soit horizontal. Pour des raisons de symétrie, on prendra des vecteurs $\overrightarrow{P_1P_2}$ et $\overrightarrow{P_3P_4}$ de même norme.

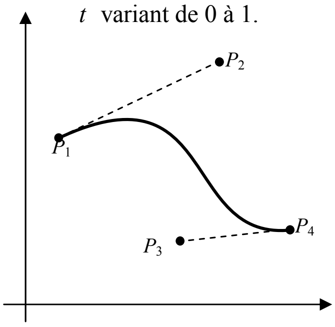
Les remarques ci-dessus nous poussent donc à choisir $P_2(1;k)$ et $P_3(k;1)$ et il reste à trouver une valeur positive de k de sorte que l'arc de Bézier ressemble à un arc de cercle.

Arcs de Bézier

Un arc de Bézier contrôlé par les 4 points P_1, P_2, P_3, P_4 est la courbe formée des points P donnés par l'égalité

$$\overrightarrow{OP} = (1-t)^3\overrightarrow{OP_1} + 3t(1-t)^2\overrightarrow{OP_2} + 3t^2(1-t)\overrightarrow{OP_3} + t^3\overrightarrow{OP_4}$$

t variant de 0 à 1.



On obtient ainsi l'équation paramétrique de l'arc de Bézier

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (1-t)^3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3t(1-t)^2 \begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix} + 3t^2(1-t) \begin{pmatrix} k \\ 1 \end{pmatrix} + t^3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad t \in [0;1]$$

ou

$$\begin{cases} x(t) = (1+2t)(1-t)^2 + 3t^2(1-t)k \\ y(t) = t^2(3-2t) + 3t(1-t)^2 k \end{cases} \qquad t \in [0;1]$$

Plusieurs méthodes sont envisageables pour trouver une bonne valeur de k.

- Dans un cours d'applications des mathématiques, des élèves ont cherché la valeur de k pour laquelle l'arc passe par le point $P(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2})$ en $t = \frac{1}{2}$.

  En posant $t = \frac{1}{2}$, on obtient $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8}k$ et $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{8}k + \frac{3}{8} + \frac{1}{8}$ et on trouve ainsi facilement $k = \frac{4\sqrt{2}-4}{3} \cong 0{,}55228$.

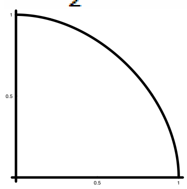
- D'autres élèves ont déterminé k de sorte que $\overrightarrow{P_1P_2}$ soit le tiers du vecteur vitesse en $t = 0$ de l'arc de cercle décrit par

  $$\begin{cases} x(t) = \cos(\frac{\pi}{2}t) \\ y(t) = \sin(\frac{\pi}{2}t) \end{cases} \qquad t \in [0;1].$$

  Ils ont ainsi obtenu $k = \frac{\pi}{6} \cong 0{,}52360$.

On peut vérifier, ici avec Mathematica, que pour $k = 0{,}5$ l'arc de Bézier ressemble à un arc de cercle.

$$\texttt{ParametricPlot}\left[\left\{(1-t)^3 + 3\,(1-t)^2\,t + 3\,\frac{1}{2}\,(1-t)\,t^2,\; 3\,\frac{1}{2}\,(1-t)^2\,t + 3\,(1-t)\,t^2 + t^3\right\},\,\{t,\,0,\,1\},\,\texttt{AspectRatio} \to 1\right]$$



- La méthode des moindres carrés peut ici fournir une meilleure valeur de k. On pourrait ainsi chercher la valeur de k pour laquelle la somme des carrés des distances séparant les points de l'arc de Bézier de l'arc de cercle est minimale. Ceci reviendrait à déterminer le minimum de la fonction $a(k) = \int_0^1 \left(\sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} - 1\right)^2 dt$.

Cette intégrale est toutefois difficile à calculer, même pour Mathematica. Pour simplifier les calculs, on peut minimiser une autre fonction :

$$a_2(k)=\int_0^1\left(x(t)^2+y(t)^2-1\right)^2dt\,.$$

Les calculs peuvent se faire *à la main*, il est également possible d'utiliser Mathematica ou tout autre calculateur symbolique.

```
x[t_, k_] := (1 - t)^3 + 3 (1 - t)^2 t + 3 k (1 - t) t^2
y[t_, k_] := 3 k (1 - t)^2 t + 3 (1 - t) t^2 + t^3
d[t_, k_] := (x[t, k]^2 + y[t, k]^2 - 1)^2
a[k_] := ∫_0^1 d[t, k] dt
a[k]
```

$$\frac{486}{5005}-\frac{4276\,k}{15015}+\frac{438\,k^2}{5005}+\frac{888\,k^3}{5005}+\frac{387\,k^4}{10010}$$

```
a'[k]
```

$$-\frac{4276}{15015}+\frac{876\,k}{5005}+\frac{2664\,k^2}{5005}+\frac{774\,k^3}{5005}$$

```
NSolve[a'[k] == 0]
{{k → -2.80402}, {k → -1.18981}, {k → 0.55197}}
```

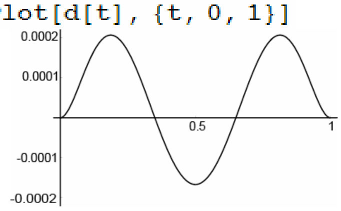
On obtient ainsi $k\cong 0{,}55197$, une valeur proche de celle fournie par la première méthode.

Les calculs précédents montrent déjà que l'arc de cercle et l'arc de Bézier seront fort semblables. Il est toutefois possible de calculer la plus grande différence radiale entre ces arcs pour les différentes valeurs de k obtenues. Nous allons pour cela déterminer les extremums de la fonction $d(t)=\sqrt{x(t)^2+y(t)^2}-1$. Ces calculs sont effectués ci-dessous avec Mathematica pour $k\cong 0{,}55197$.

```
k = 0.5519703175158828`;
x[t_] := (1 - t)^3 + 3 (1 - t)^2 t + 3 k (1 - t) t^2
y[t_] := 3 k (1 - t)^2 t + 3 (1 - t) t^2 + t^3
d[t_] = √(x[t]^2 + y[t]^2) - 1
```

$$-1+\sqrt{\left(\left((1-t)^3+3\,(1-t)^2\,t+1.65591\,(1-t)\,t^2\right)^2+\left(1.65591\,(1-t)^2\,t+3\,(1-t)\,t^2+t^3\right)^2\right)}$$

```
Plot[d[t], {t, 0, 1}]
```



```
NSolve[d'[t] == 0, t]
{{t → 1.}, {t → 0.813616}, {t → 0.5}, {t → 0.186384}, {t → 0.}}
d[0.1863836545991224`]
0.000206419
d[0.5]
-0.000166753
```

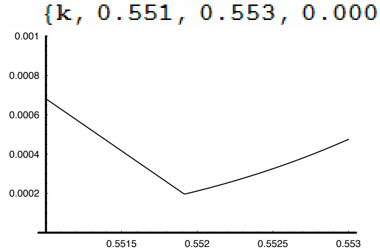
En prenant $k \cong 0{,}55197$ on obtient donc, en remplaçant l'arc de cercle par l'arc de Bézier, une erreur maximale de 0,021%.

En prenant $k = \frac{4\sqrt{2}-4}{3}$ l'erreur maximale est de 0,027%.

En prenant $k = \frac{\pi}{6}$ l'erreur maximale est de 1,52%.

Cette recherche de l'erreur maximale fournit une nouvelle méthode pour la quête d'une *bonne* valeur de *k*, nous pouvons chercher la valeur de *k* pour laquelle l'extremum de $d(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} - 1$ est, en valeur absolue, le plus petit possible. Mathematica nous offre à nouveau un moyen d'obtenir cette valeur par tâtonnement. Voici, sans autres explications, les commandes Mathematica qui permettent d'estimer cette valeur de *k*.

```
x[t_, k_] := (1 - t)^3 + 3 (1 - t)^2 t + 3 k (1 - t) t^2
y[t_, k_] := 3 k (1 - t)^2 t + 3 (1 - t) t^2 + t^3
d[t_, k_] = √(x[t]^2 + y[t]^2) - 1;
ListPlot[Table[{k , Max[Abs[d[
      ReplaceAll[t, Extract[NSolve[D[d[t, k], t] == 0, t],
        {2}]], k]], Abs[d[0.5, k]]]},
  {k, 0.551, 0.553, 0.00001}], PlotRange -> {0, 0.001}]
```



Pour $k \cong 0{,}551915$, on obtient en remplaçant l'arc de cercle par l'arc de Bézier, une erreur maximale de 0,020%.

En conclusion on peut affirmer que l'on ne voit aucune différence entre un *vrai* cercle et une courbe composée de quatre arcs de Bézier bien choisis.

Exercice
Trouver cette dernière estimation de *k* par une méthode directe, sans tâtonnements.

jean-marc.ledermann@rpn