



Die Euler-Methode, ein universelles didaktisches Konzept - ein Beitrag zum Euler-Jahr

Robert Märki, Gymnasium Thun-Schadau

Die *Euler-Methode* ist bekannt als ein einfaches numerisches Verfahren zur Lösung einer Differenzialgleichung oder eines Systems von Differenzialgleichungen erster Ordnung. Da es genauere und effizientere Verfahren gibt, etwa Runge-Kutta, geriet die Euler-Methode etwas in Vergessenheit. Weniger bekannt ist allgemein, dass die Euler-Methode von hohem didaktischem Wert ist und bei der Vermittlung vieler wichtiger Konzepte der Differenzial- und Integralrechnung hervorragende Dienste leistet. Gerade ihre Einfachheit erlaubt es, den Blick auf die wesentlichen konzeptionellen Aspekte zu richten und sich nicht in technischen Details zu verlieren. Dies sei an einigen Beispielen erörtert:

1. Bei der Verwendung eines CAS ist es möglich und sinnvoll, auch in einem einführenden Kurs bereits Differenzialgleichungen zu behandeln. In einer diskreten Vorstufe handelt es sich dabei noch um Differenzengleichungen. Beispielsweise ist für die Lernenden das Newton'sche Abkühlgesetz $T'(t) = -k(T(t) - T_u)$ (T_u ist die Umgebungstemperatur) leicht nachvollziehbar. T' , die Änderungsrate der Temperatur, ist intuitiv einfach das «Tempo», mit der sich der Körper abkühlt. Dass dieses Tempo von der Temperaturdifferenz abhängt, erfährt man oft im Alltag. Der Schritt zur Modellannahme, dass dieses Abkühltempo proportional zur Temperaturdifferenz sei, liegt dann sehr nahe. Die Euler-Methode erlaubt es nun, aus dieser Differenzialgleichung die Funktion $T = T(t)$ schrittweise approximativ zu konstruieren. Die Ableitung zeigt sich hier vor Allem unter dem Aspekt der «Änderungsrate», welcher zentraler ist als der Aspekt der «Tangentensteigung». In diesem Beispiel liefert die Euler-Methode erstens eine vertiefte Einsicht in den Ableitungsbegriff (Änderungsrate), zweitens die Einsicht, dass eine Differenzialgleichung, zusammen mit einem Anfangswert eine Funktion definiert und drittens, damit zusammenhängend, einen intuitiven Zugang zum Existenz- und Eindeutigkeitssatz (eine Differenzialgleichung erster Ordnung mit einem Anfangswert hat unter bestimmten Voraussetzungen genau eine Lösung).
2. Betrachtet man die Differenzialrechnung unter dem Gesichtspunkt der Differenzialgleichungen, dann ist es naheliegend, die Exponentialfunktionen durch die Differenzialgleichung $y' = ky$ zu definieren oder zumindest diese Differenzialgleichung in diesem Zusammenhang einzuführen. Betrachtet man das besonders einfache (normierte) Anfangswertproblem $y' = y; y(0) = 1$, dann ergibt sich die Definition der Zahl

e sofort aus der Lösung dieser Anfangswertproblems, indem man $y(1)$ mit der Euler-Methode berechnet und dabei die Schrittweite $\Delta x = \frac{1}{n}$ verwendet. Die Euler-Methode liefert hier also eine Definition der Zahl e und zugleich eine Einsicht in die grosse Bedeutung dieser Zahl.

3. Hauptsatz: Löst man das Anfangswertproblem $y'(x) = f(x)$; $y(a) = 0$ mit der Euler-Methode, indem man z. B. $y(b)$ berechnet, so zeigt sich, dass die Euler-Methode einfach eine Riemann-Summe von f über dem Intervall $[a; b]$ liefert. Andererseits ist es einfach einzusehen, dass $y(x) = F(x) - F(a)$ (F ist eine Stammfunktion von f) die Lösung des erwähnten Anfangswertproblems ist, also ist insbesondere $y(b) = F(b) - F(a)$. Daraus ergibt sich unmittelbar der Hauptsatz $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ ohne den sonst üblichen langwierigen Umweg über die Integralfunktion.
4. Dynamische Systeme: Da der grösste Teil der wichtigen und bedeutsamen Anwendungen der Differenzial- und Integralrechnung erst im Zusammenhang mit Differenzialgleichungen auftaucht und diese ein unentbehrliches Werkzeug beim mathematischen Modellieren sind, ist es sinnvoll, auch in einem allgemeinbildenden Unterricht dynamische Systeme zu betrachten. Die Euler-Methode liefert hier wiederum eine einfache Methode zum Auffinden und zum Verstehen von Lösungen.

Fazit: Auch wenn die Euler-Methode in mathematischer Hinsicht eine eher krude Methode ist und oft nicht Resultate hoher Genauigkeit liefert, kann sie bei einer grossen Vielfalt von Konzepten zu tieferen Einsichten führen, frei nach dem Motto: «Der Zweck von Berechnungen ist nicht ein Resultat sondern Einsicht». Oder anders ausgedrückt: Wenn das Ziel des Mathematikunterrichts darin besteht, *Konzepte* und nicht *Rezepte* zu vermitteln, dann liefert die Euler-Methode dabei hervorragende Dienste.

Bemerkung: Ein Unterrichtsskript für die Einführung in die Differenzial- und Integralrechnung, welches Differenzialgleichungen und die Euler-Methode zentral verwendet, ist zu beziehen über <http://www.romae.ch>