Attente aux guichets

Jean Piquerez
Collège et Ecole de Commerce Madame de Staël

Le problème 39 en page 89 de l'ouvrage « Probabilités et Statistique » du regretté Freddy Taillard m'a inspiré une généralisation. Envisageons dès lors l'énoncé suivant :

Trois personnes entrent dans une banque au moment de l'ouverture. Deux guichets seulement sont ouverts. Soit X_1 et X_2 le temps (en minutes) qu'il faut pour servir les deux personnes qui ont eu accès immédiatement aux guichets. Les X_i sont des variables aléatoires indépendantes suivant une loi uniforme sur un intervalle de temps pris pour unité de temps. Leur densité est donc donnée par

$$f_{X_i}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Soit Y, le temps que passe le troisième client à faire la queue en attendant que l'un ou l'autre des guichets se libère. Déterminer la densité $f_Y(y)$ associée à Y. On a

$$P(Y > \alpha) = P(X_1 > \alpha \text{ et } X_2 > \alpha) = P(X_1 > \alpha)P(X_2 > \alpha) = (1-\alpha)^2.$$

Soit $F_Y(\alpha)$ la fonction de répartition de Y,

$$F_Y(\alpha) = P(Y \le \alpha) = 1-(1-\alpha)^2 \Rightarrow f_Y(\alpha) = F_Y'(\alpha) = 2(1-\alpha) \text{ si } 0 \le \alpha \le 1.$$

Ainsi

$$f_Y(y) = \begin{cases} 2(1-y) & \text{si } 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Supposons ensuite qu'un quatrième client est entré en même temps que les trois premiers et fait la queue derrière le troisième. Déterminer la densité $f_Z(z)$ de la variable aléatoire Z indiquant le temps d'attente de ce client avant qu'il n'ait accès à un guichet.

D'après la formule des probabilités totales, on a, pour $0 \le \alpha \le 1$:

$$P(Z > \alpha) = P(Z > \alpha \mid Y > \alpha)P(Y > \alpha) + P(Z > \alpha \mid 0 \le Y \le \alpha)P(0 \le Y \le \alpha).$$

Or, $P(Z > \alpha \mid Y > \alpha) = 1$ à l'évidence, d'une part, et

$$P(Z > \alpha \mid 0 \le Y \le \alpha)P(0 \le Y \le \alpha) = \int_0^\alpha P(Z > \alpha \mid Y = y) f_Y(y)dy$$

car il faut alors conditionner l'événement «$Z > \alpha$» par tous les événements «$Y = y$», ce qui se fait à l'aide de la densité de probabilité de la variable aléatoire Y pour toutes les valeurs de Y allant de 0 à α.

Au temps y, les deux guichets sont donc occupés, l'un par le troisième client qui vient de s'y trouver, l'autre par l'un des deux premiers clients qui n'a pas encore fini d'être servi. Dès lors il convient de calculer probabilité qu'aucun de ces deux guichets ne se libère pour le quatrième client avant le temps α.

Si le troisième client se présente au temps y, la probabilité qu'il reste devant le guichet jusqu'au temps α au moins, avec $y \le \alpha$, est donnée par $1-(\alpha-y)$. Quant à celui des deux premiers clients qui est encore à l'autre guichet au temps y, la probabilité qu'il y reste jusqu'au temps α au moins est donnée par

$$P(X_i > \alpha \mid X_i > y) = \frac{P(X_i > \alpha)}{P(X_i > y)} = \frac{1-\alpha}{1-y}.$$

Ainsi,

$$P(Z > \alpha \mid Y = y) = \big(1-(\alpha-y)\big)\cdot\frac{1-\alpha}{1-y}$$

d'après l'hypothèse d'indépendance. Il reste donc à calculer l'intégrale précédente :

$$\int_0^\alpha \frac{(1-\alpha+y)(1-\alpha)}{1-y}\cdot 2(1-y)\,dy = 2(1-\alpha)\left[(1-\alpha)y+\frac{y^2}{2}\right]\Bigg|_0^\alpha = (1-\alpha)\alpha(2-\alpha)$$

d'où

$$P(Z>\alpha) = (1-\alpha)^2 + (1-\alpha)\alpha(2-\alpha) = (1-\alpha)(1+\alpha-\alpha^2).$$

Généralisation du problème

On suppose que $(n+1)$ personnes entrent au moment de l'ouverture dans une banque disposant de n guichets. On suppose ensuite que $(n+2)$ personnes rentrent dans cette banque au moment de l'ouverture.

On a alors :

$$F_{X_{n+1}}(\alpha) = P(X_{n+1} \le \alpha) = 1-(1-\alpha)^n \Rightarrow f_{X_{n+1}}(\alpha) = F'_{X_{n+1}}(\alpha) = n(1-\alpha)^{n-1}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
P(X_{n+2} > \alpha) &= P(X_{n+1} > \alpha) + \int_0^\alpha P(X_{n+2} > \alpha \mid X_{n+1} = x)\, f_{X_{n+1}}(x)\,dx \\
&= (1-\alpha)^n + \int_0^\alpha (1-\alpha+x)\left(\frac{1-\alpha}{1-x}\right)^{n-1} n(1-x)^{n-1}\,dx \\
&= (1-\alpha)^n + n(1-\alpha)^{n-1}\int_0^\alpha (1-\alpha+x)\,dx \\
&= (1-\alpha)^{n-1}\left[1-\alpha+n\left(\alpha(1-\alpha)+\frac{\alpha^2}{2}\right)\right] \\
&= (1-\alpha)^{n-1}\left(1+(n-1)\alpha-\frac{n}{2}\alpha^2\right)
\end{aligned}$$

Si $n=2$, on retrouve la réponse précédente.

Remarquons, en toute logique que

$$P(X_{n+2} > 0) = 1,\ P(X_{n+2} > 1) = 0,$$

et que, si $n \to \infty$, alors

$$P(X_{n+2} > \alpha) \to 0, \forall \alpha \in \left]0,1\right], \text{ ce qui est rassurant}.$$

PS : Monsieur Christian Benes, spécialiste en Probabilités et PhD à Duke, qui a relu mon article, me fait remarquer qu'en général, pour ce genre de modèle,on n'utilise pas de variables aléatoires uniformes qui représentent assez mal la réalité, mais des variables exponentielles.