Grisha Perelman und die Poincaré-Vermutung

Dr. Markus Kriener, Wettingen

VSMP Bulletin, Nr. 104, 2007

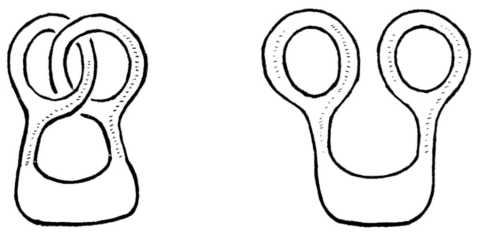
Der russische Mathematiker Grigorij Perelman hat die Poincaré-Vermutung bewiesen, ein seit über hundert Jahren offenes Problem aus der Topologie. Perelman wurde zum Medienereignis, nicht zuletzt wegen seiner exzentrischen Persönlichkeit und trotz seiner Bemühungen, sich dem Zugriff der Medien zu entziehen. Im August 2006 lehnte er die Fields-Medaille ab, das mathematische Pendant zum Nobelpreis; noch zweifelhaft ist, ob er ein auf die Lösung des Problems ausgesetztes Preisgeld von einer Million Dollar ebenfalls zurückweisen wird. Vollends zum wissenschaftssoziologischen Lehrstück geriet der Fall durch die Versuche einer Gruppe chinesischer Mathematiker um den in Havard lehrenden S.T. Yau, im nachhinein ein Stückchen vom Ruhm zu ergattern.

Die Poincaré-Vermutung

Mais cette question nous entraînerait trop loin.
Henri Poincaré

Was eigentlich ist Topologie?

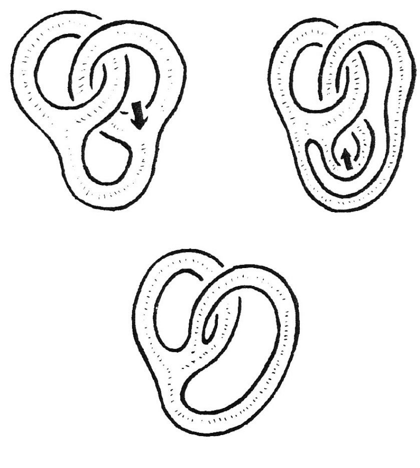
Hier ist ein typisches topologisches Problem: Kann man diese beiden Objekte ineinander verwandeln?



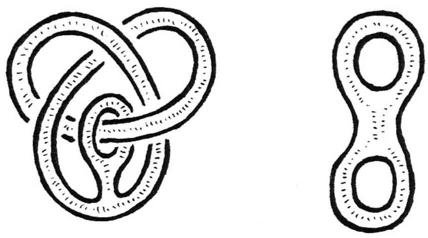
Vielleicht werden Sie sagen: "Das ist doch keine Kunst. Man muss nur die eine Schlaufe zerschneiden, die beiden Arme aus der anderen Schlaufe herausnehmen und dann wieder zusammenkleben."

Aber kommt man auch *ohne* Zerschneiden aus? Sie dürfen allerdings *sehr* grosszügig deformieren - stellen Sie sich vor, die Objekte seien aus einer extrem elastischen Knetmasse. Vielleicht haben Sie ja Lust, sich das einen Moment zu überlegen, bevor Sie weiterlesen.

Es geht tatsächlich: Vergrössern Sie die eine Schlaufe so lange, bis Sie sie durch die andere herausziehen können.



Und wie sieht es bei folgendem Beispiel aus? Versuchen Sie, ob Sie diese etwas spezielle Brezel nur durch Deformieren entwirren können[1]:



In der *Topologie* fragt man sich, was für charakteristische Eigenschaften von einem geometrischen Objekt übrigbleiben, wenn man nicht nur von Lage und Grösse, sondern auch von der Form abstrahiert[2]. Alle Objekte oben haben zum Beispiel zwei Löcher - und die lassen sich nicht wegbringen, da kann man deformieren, so lange man will.

Ein Planeten-Archipel

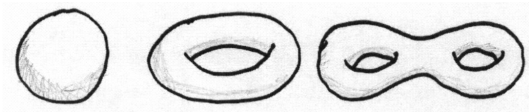
Zur Verdeutlichung der Aussage der Poincaré-Vermutung lassen Sie mich die folgende Geschichte erzählen:

Durch eine Reihe von Zufällen hat es Sie vor einiger Zeit nach *Flächonien* verschlagen, einem höchst bemerkenswerten Sonnensystem in einer entlegenen Galaxie[3]. Hier kommen Planeten in den unmöglichsten Formen vor - die Brezeln aus dem vorhergehenden Abschnitt gehören noch zu den harmloseren Beispielen. Die Planeten sind klein und so zahlreich, dass die Bewohner von Flächonien ein ganzes Archipel dieser Kleinstplaneten besiedelt haben und mit ihren Raumschiffen interplanetarischen Handel treiben.

Die politischen Verhältnisse sind auf den ersten Blick sehr einfach. Nach langen Wirren haben sich zwei Staaten gebildet: *Sphäria* und *Löchria*. Die Zugehörigkeit zu einem dieser Staaten wird durch den topologischen Typ des Planeten geregelt:

- Wenn er im wesentlichen eine sphärische Form[4] hat (egal wie deformiert), dann gehört der Planet zu Sphäria.
- Wenn er eines oder mehrere Löcher hat, gehört er zu Löchria[5].

Hier sehen Sie drei der etwas konventioneller geformten Planeten:



Hintergrund ist natürlich die Klassifikation kompakter, orientierbarer Flächen, vgl. zum Beipiel (2): Wenn sich eine Fläche (ohne Rand) im dreidimensionalen Raum realisieren lässt, dann ist ihr topologischer Typ durch die Anzahl der Löcher eindeutig bestimmt: Die drei abgebildeten Flächen oben sind die ersten, die vorkommen - mit null, eins bzw. zwei Löchern.

Virtuelle Lassos

Der Verkehr zwischen den Planeten ist immens, und es kann vorkommen, dass man plötzlich nicht mehr weiss, in welchem Staat man sich befindet[6]. Zu diesem Zweck ist in jedem Raumschiff ein raffiniertes Instrument eingebaut, das *virtuelle Lasso*. Aktiviert man es, so schickt es einen elektromagnetischen Strahl aus, der sich um den gesamten Planeten wickelt und schliesslich wieder zum Raumschiff zurückkehrt. Ist dies geschehen, versucht das Gerät, das ausgeworfene "Lasso" zusammenzuziehen. Auf den Planeten, die zu Sphäria gehören, gelingt dies immer tadellos. Ist man jedoch in Löchria, wird es vorkommen, dass der Strahl sich durch eines der Löcher gewunden hat und sich das Lasso also nicht zusammenziehen lässt. Dies erkennt das Gerät und lässt verlauten, man sei in Löchria. Da das Lasso einige hundert mal in der Minute in alle möglichen Richtungen ausschickt wird, kann man nach einigen Minuten mit einer sehr grossen Wahrscheinlichkeit entscheiden, in welchem Staat man sich befindet[7].

[1] Die Lösung und weitere Rätsel dieser Art findet man in dem auch für den Mathematikunterricht brauchbaren Büchlein (6).

[2] Von Lage und Grösse abstrahiert man ja schon in der gewöhnlichen Geometrie, wenn man von kongruenten und ähnlichen Dreiecken spricht.

[3] Denken Sie etwa an *Douglas Adams: The Hitch-Hiker's Guide to the Galaxy.* Oder aber an *E. A. Abbott: Flatland. A romance of many dimensions.*

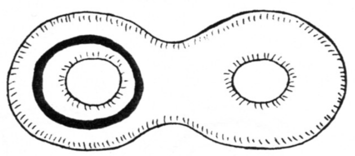
[4] Eine **Sphäre** ist die Oberfläche einer Kugel.

[5] Eine bemerkenswerte Besonderheit von Löchria ist, dass sich der Staat in eine *unendliche* Anzahl von Kantonen aufgeteilt hat - *Toria* und *Brezlia* und so weiter. Die Zugehörigkeit wird durch die Anzahl der Löcher geregelt.

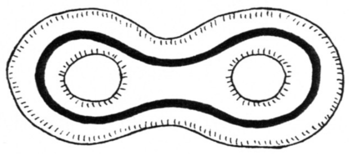
[6] Bei den etwas exotischer geformten Exemplaren war es zur Zeit der Staatengründung alles andere als trivial, die Staatszugehörigkeit zu entscheiden. Zudem sind sich in Löchria diverse Planeten noch heute nicht im Klaren darüber, zu welchem Kanton sie gehören.

[7] Hintergrund ist die Tatsache, dass sich Flächen via Fundamentalgruppe unterscheiden lassen.

Es war übrigens lange Gegenstand eines wissenschaftlichen Disputs, ob man auf diese Weise wirklich Sphären von Nicht-Sphären unterscheiden kann. Dies wird vielleicht verständlicher vor dem Hintergrund des folgenden Phänomens:



(a)



(b)

Man kann die Brezel mit dem aufgemalten Lasso in Bild (a) so deformieren, dass man in der Situation aus Bild (b) ankommt. Versuchen Sie es[8] !

Ist das Universum eine 3-Sphäre?

Die spezielle Natur der "Geographie" flächonischer Planeten legt es nahe, sich ausgiebig Gedanken über die Form des Universums zu machen. Dazu muss man wissen, dass es für die Bewohner dieser Gegend ausgemachte Sache ist, dass das Universum keinen Rand hat, also nirgendwo aufhört. Man kann also im Prinzip immer geradeaus laufen, ohne jemals an ein Ende des Universums zu kommen. Andererseits ist es endlich, d.h. es hat ein endliches Volumen. Des Rätsels Lösung: Der Weltraum ist gekrümmt und schliesst sich wieder in sich selbst; man würde nach einer sehr langen Reise "immer der Nase nach" wieder genau an seinen Ausgangspunkt zurückkehren. Tatsächlich hat das Universum möglicherweise die Form einer 3-Sphäre, dem dreidimensionalen Analogon zur gewöhnlichen Sphäre oder 2-Sphäre:

- die 3-Sphäre hat ein endliches Volumen, die 2-Sphäre hat eine endliche Fläche
- beide haben keinen Rand
- und bei beiden gilt: Wenn man genügend lange geradeaus läuft, kommt man schliesslich wieder an seinen Ausgangsort zurück.

[8]Die Lösung findet sich wieder in (6).

Sollte das Universum tatsächlich eine 3-Sphäre sein, wäre es durchaus möglich, dass einer der Sterne, die wir durch unsere Teleskope sehen, unsere eigene Sonne ist. Oder genauer: Was wir aus dem Weltraum empfangen, sind Lichtstrahlen, die unsere Sonne vor sehr langer Zeit ausgesandt hat und die jetzt wieder an den Ort ihrer Entstehung zurückgelangt sind.

Wie soll man sich eine 3-Sphäre vorstellen?

Die Bewohner Flächoniens haben verschiedene Antworten auf diese Frage - alle gehen von einer anderen Methode aus, eine gewöhnliche 2-Sphäre zu konstruieren und übertragen diese Methode dann auf die nächsthöhere Dimension.

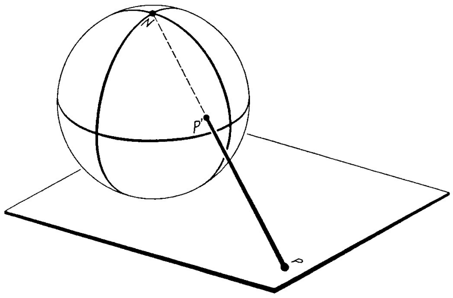
Punktweise Konstruktion: Eine 2-Sphäre besteht aus allen Punkten des 3-dimensionalen Raumes mit einem bestimmten Abstand zu einem ausgezeichneten Punkt, dem Mittelpunkt. Eine 3-Sphäre besteht demnach aus allen Punkten im 4-dimensionalen Raum, die einen bestimmten Abstand zum Mittelpunkt haben. Problem: Wie stellt man sich einen 4-dimensionalen Raum vor?

Verkleben am Rand: Eine 2-Sphäre lässt sich zerlegen in eine obere und eine untere Hälfte - Nordhalbkugel und Südhalbkugel, gemeinsamer Rand ist der Äquator. Man kann sich also umgekehrt eine 2-Sphäre basteln, indem man zwei Kreisscheiben erst etwas verbeult und dann entlang des Ränder verklebt; die Nahtstelle wird also ein Kreis. Analog erhält man eine 3-Sphäre, wenn man zwei Vollkugeln entlang ihrer Ränder verklebt - die Nahtstelle wird dann eine 2-Sphäre. Problem: Man muss eine der beiden Vollkugeln so verbeulen, dass das Innere sich nach aussen kehrt wie ein Handschuh, dazu muss man wieder durch die vierte Dimension; auch beim Verbeulen der Kreisscheiben musste man ja in die dritte Dimension ausweichen.

Zwiebelschalenkonstruktion: Eine 2-Sphäre lässt sich in lauter 1-Sphären zerlegen (die

Breitenkreise) plus zwei Ausnahmepunkte - Nord- und Südpol. Man kann sich umgekehrt auch vorstellen, dass aus dem Südpol (einer 0-Sphäre) immer grösser werdende 1-Sphären nach oben wachsen, die nach Überschreiten des Äquators wieder kleiner werden und schliesslich im Nordpol wieder zu einer 0-Sphäre degenerieren. Genauso kann man sich eine 3-Sphäre zusammengesetzt denken aus einem Startpunkt, vielen erst grösser und dann wieder kleiner werdenden 2-Sphären und schliesslich einem Endpunkt. Übrigens wäre die nächste Stufe eine unserer aktuellen Vorstellungen von Vergangenheit und Zukunft des Kosmos: Wir haben einen Startpunkt (den *Big Bang*), dann eine sich erst ausdehnende 3-Sphäre (unser Universum), welche sich möglicherweise irgendwann wieder zusammenzieht, bis sie schliesslich in einem Endpunkt verschwindet (dem *Big Crunch*). Die gesamte Raumzeit hätte dann übrigens die topologische Form einer 4-Sphäre.

Hochklappen: Man kann die 2-Sphäre auch aus einer unendlichen Ebene plus einem einzelnen Punkt konstruieren: Man stelle sich eine gläserne Sphäre auf der Ebene ruhend vor.



Wenn man auf dem Nordpol N steht (N liegt dem Auflagepunkt genau gegenüber), dann sieht man die Ebene nur, wenn man durch die Sphäre hindurch schaut. Fasst man einen beliebigen Punkt P der Ebene ins Auge, so schneidet die Verbindungsgerade NP die Sphäre in einem eindeutig bestimmten Schnittpunkt P'. Entlang dieser Verbindungsgeraden kann man die Ebene auf die Sphäre ”hochziehen”, wie an unendlich vielen Marionettenfäden sozusagen. Zur Vervollständigung benötigt man als ”Stöpsel” noch einen einzelnen Punkt N[9]. Ganz analog kann man den sich in alle Richtungen ins Unendliche erstreckenden dreidimensionalen Raum auf die endliche dreidimensionale Sphäre ”hochziehen”.

Eine grosse Mehrheit der Wissenschaftler Flächoniens vertritt die Meinung, dass das Universum die Form einer 3-Sphäre hat. Einige jedoch meinen, dass es eine kompliziertere Form haben könnte. Irgendetwas Interessantes mit ”dreidimensionalen Löchern”[10].

Intergalaktische Lassos und die Poincaré-Vermutung

Schon bald kam jemandem der Einfall, die bewährten virtuellen Lassos zur Klärung dieser kosmologischen Grundfrage zu verwenden:

”Lasst uns gewaltige *intergalaktische Lassos* in den Weltraum schicken. Wenn wir eines davon *nicht* zusammenziehen können, dann wissen wir jedenfalls mit Sicherheit, dass das Universum *keine* 3-Sphäre ist.”

Gesagt, getan. Allerdings: Jedes Lasso, das man über die Jahre hinweg ausgeworfen hatte, *liess* sich zusammenziehen. ”Wunderbar”, frohlockte der von Natur aus optimistische Forschungsminister, ” also ist das Universum eine 3-Sphäre!”

Die Gelehrten um ihn herum schüttelten betrübt die Köpfe. ”Unser Universum ist offenbar ein dreidimensionaler Raum von unbekannter Form” begannen sie zögernd. ”Wir nennen so etwas eine **3-Mannigfaltigkeit**. In zwei Dimensionen, also bei Flächen bzw. 2-Mannigfaltigkeiten, wissen wir: Wenn sich jedes Lasso zusammenziehen lässt (übrigens nennen wir diese Eigenschaft einer Fläche **einfach zusammenhängend**), wenn also eine Fläche einfach zusammenhängend ist, dann muss es die 2-Sphäre sein.” Ein junger Wissenschaftler mit Pferdeschwanz ergänzte: ”Wir wissen das, weil wir alle möglichen topologischen Typen von 2-Mannigfaltigkeiten kennen, wir haben sie *klassifiziert*.” Ein Graubart führt den Bericht fort: ”Und

[9] Diese Abbildung nennt man *stereographische Projektion*. Es ist eine ausgesprochen interessante Abbildung. Sie ist zum Beispiel sowohl *kreistreu* (Kreise auf der Sphäre werden auf Kreise auf der Ebene abgebildet) als auch *winkeltreu* (Winkel auf der Sphäre werden auf die gleichen Winkel auf der Ebene abgebildet) ist, siehe (3).

[10] Spekulationen dieser Art stammen selbstverständlich allesamt von Bewohnern Löchrias

zwar schon vor mehr als hundert Jahren. Bei 3-Mannigfaltigkeiten sind wir noch nicht so weit. Wir sind uns noch immer nicht sicher, ob wir alle möglichen Typen kennen. Vielleicht gibt es ausser der 3-Sphäre noch eine weitere, völlig exotische 3-Mannigfaltigkeit, die ebenfalls einfach zusammenhängend ist, aber eben nicht die 3-Sphäre."

Der Forschungsminister blickt etwas ratlos. "Wir können also nichts sagen?" Die Gelehrten schütteln die Köpfe. "Und was brauchen wir?" "Eine Klassifikation!" ruft der junge Wissenschaftler mit Pferdeschwanz. "Oder zumindest einen Beweis der Poincaré-Vermutung," fügt der Graubart bedächtig hinzu. Der Forschungsminister blickt ihn ein weiteres mal fragend an. Der Graubart verfällt in eine Art Singsang:

> **Die Poincaré-Vermutung:** Jede kompakte, einfach zusammenhängende 3-Mannigfaltigkeit ist homöomorph zur 3-Sphäre.

"*Kompakt* heisst so viel wie *endlich*" meint der Pferdeschwanz. "So wie unser Universum. Wenn man nur lange genug in die gleiche Richtung geht, kommt man irgendwann wieder an seinen Ausgangspunkt zurück. Jedenfalls fast, " fügt er noch eilig hinzu, als er bemerkt, wie sich die Augenbrauen des Graubarts fast unmerklich zusammenziehen[11]. "Und *homöomorph* heisst so viel wie *gleiche Form* - im topologischen Sinne, also bis auf Deformationen."

Die gute Nachricht

Als Sie kürzlich wieder einmal nach Flächonien reisten, kam Ihnen der Graubart strahlend entgegen: "Ein russischer Mathematiker hat die Poincaré-Vermutung bewiesen." Die Augen seines Kollegen mit dem Pferdeschwanz funkelten: "Und zusätzlich Thurstons Geometrisierungs-Vermutung. Wir haben jetzt also eine Klassifikation." Der Graubart schüttelt wieder einmal bedächtig den Kopf. "Das ist noch nicht so sicher. Aber sehr gut möglich. Bei der Poincaré-Vermutung sind wir uns aber inzwischen sicher - der Beweis ist wasserdicht."

[11] Der Graubart denkt hier an den Poincaréschen Wiederkehrsatz.

Die Poincaré-Vermutung: Stationen auf dem Weg zu einem Beweis

1895 Jules Henri Poincaré (1854 – 1912) führt das Konzept der *Fundamentalgruppe* ein.

1900 Er behauptet unvorsichtigerweise, dass eine geschlossene 3-Mannigfaltigkeit[12] mit der *Homologie* einer 3-Sphäre auch schon die 3-Sphäre sein müsse.

1904 Er bringt selbst ein Gegenbeispiel zu seiner Behauptung von 1900: Die Mannigfaltigkeit $SO(3)/I_{60}$ (man faktorisiere die Symmetriegruppe eines Ikosaeders aus der Gruppe der Rotationen des Euklidischen Raumes heraus) hat zwar triviale Homologie, aber eine Fundamentalgruppe der Ordnung 120. Er schliesst die Diskussion mit der Frage:

> Wenn eine geschlossene 3-dimensionale Mannigfaltigkeit triviale Fundamentalgruppe hat, muss sie dann homöomorph zur 3-Sphäre sein?

1934 Henry Whitehead kündigt einen Beweis der Vermutung an, erkennt ihn aber selbst als falsch und konstruiert bald darauf selbst ein Gegenbeispiel. Mit einer Methode, welche sich als bahnbrechend für das Verständnis von Mannigfaltigkeiten erweisen wird.

In den nächsten Jahrzehnten erhält die Poincaré-Vermutung durch eine ganze Reihe vergeblicher Beweisversuche bedeutender Mathematiker den Status eines mathematischen heiligen Grals, vergleichbar nur noch mit der 1994 von Andrew Wiles bewiesenen Fermat-Vermutung oder der noch ausstehenden Riemannschen Vermutung.

1960 Stephen Smale legt einen Beweis der Poincaré-Vermutung in den Dimensionen 5 und höher vor.

1982 Michael H. Freedman beweist die Vermutung für den 4-dimensionalen Fall. Er erhält dafür 1986 die Fields-Medaille.

[12] **geschlossen** heisst *kompakt und ohne Rand*

Richard Hamilton führt in einer Serie vielbeachteter Artikel den Ricci-Fluss auf Mannigfaltigkeiten ein und benutzt ihn, um Spezialfälle der Poincaré-Vermutung zu zeigen.

William P. Thurston erhält die Fields-Medaille, er stellt sein Geometrisierungs-Programm für 3-Mannigfaltigkeiten vor, vgl. (1).

2000 Die Poincaré-Vermutung wird vom *Clay Mathematics Institute* zu einem der sieben *Millenium Problems* erklärt, der wichtigsten offenen mathematischen Problemen. Für die Lösung jedes dieser Probleme setzt das Institut ein Preisgeld von jeweils einer Million Dollar aus.

2002/2003 Grigori Perelman vom Steklov Institut für Mathematik in St. Petersburg stellt drei Artikel ins Netz, die Hamiltons Ricci-Fluss-Programm weiterführen. In sehr gedrängter Form wird ein Beweis der Poincaré-Vermutung und von Thurstons Geometrisierungs-Vermutung gegeben.

22. August 2006 Der ICM (International Congress of Mathematicians) verleiht Perelman die Fields-Medaille (die dieser nicht annimmt) und bestätigt damit, dass die Mathematikergemeinde nach ausgiebiger Prüfung von der Richtigkeit des Beweises überzeugt ist.

Grigorij Perelman

Curriculum Vitae

> If they know my work, they don't need my C.V.
> If they need my C.V., they don't know my work.
>
> Grigorij Perelman

13. Juni 1966 Grigorij Yakovlevich 'Grisha' Perelman wird in Leningrad (jetzt St. Petersburg) geboren. Sein Vater ist Elektroingenieur und weckt und fördert sein Interesse an Mathematik und Physik; seine Mutter unterrichtet Mathematik an einem Technikum; seit er sechs ist, nimmt sie ihn regelmässig mit in die Oper. Mit fünfzehn ist Perelman der Star des örtlichen Mathematikclubs und gibt sein Geld für Schallplatten mit Opernaufnahmen aus.

1982 Perelman erhält mit 16 an der Internationalen Mathematikolympiade in Budapest mit 42 von 42 möglichen Punkten eine Goldmedaille und nimmt sein Studium an der Leningrader Universität auf.

1992 Perelman veröffentlicht seit einigen Jahren Artikel über Differentialgeometrie in führenden amerikanischen und russischen Fachzeitschriften. Er wird eingeladen, jeweils ein Semester an der *New York University* und an der *Stony Brook University* zu verbringen. Etwa zur gleichen Zeit bricht in seinem Heimatland die Wirtschaft zusammen. Er diskutiert in Princeton mit Richard Hamilton über dessen Ergebnisse zum Ricci-Flow.

1993 Perelman tritt ein zweijähriges Stipendium in Berkeley an und diskutiert weiterhin mit Hamilton. Am Ende seines ersten Jahres in Berkeley hat er mehrere höchst originelle Artikel veröffentlicht.

1994 Er hält einen vielbeachteten Vortrag am internationalen Mathematikerkongress in Zürich.

Sommer 1995 Trotz lukrativer Angebote von Universitäten wie Princeton und Stanford kehrt er an seine alte Forschungsstelle am Steklov Institut in St. Petersburg zurück, wo er monatlich weniger als 100 Dollar verdient. Er habe in den USA genug gespart, um für den Rest seines Lebens sein Auskommen zu haben, meinte er zu einem Freund. "Ich habe gemerkt, dass ich in Russland besser arbeiten kann". Yakov Eliashberg von der Stanford University denkt, dass er nach Russland zurückgekehrt ist, um in Ruhe an der Poincaré-Vermutung arbeiten zu können.

Richard Hamilton veröffentlicht einen Artikel mit einigen Ideen, die zu einem Beweis der Poincaré-Vermutung führen könnten. Perelman realisiert, dass Hamilton mit der Bewältigung der Hauptschwierigkeiten keinerlei Fortschritte gemacht hat.

1996 Er schreibt Hamilton einen langen Brief, in dem er ihm seine eigenen Ideen zur Behandlung dieser Schwierigkeiten auseinandersetzt - in der Hoffnung auf eine Zusammenarbeit. "Er hat nicht geantwortet" sagt Perelman, "also habe ich mich entschlossen alleine zu arbeiten."

11. November 2002 Perelman setzt den ersten seiner drei Artikel zum Ricci-Fluss ins Internet.

April 2003 Er hält in den USA eine Reihe von Vorträgen über seine spektakuläre Arbeit. Danach kehrt er nach Petersburg zurück und hat praktisch nur noch per Email Kontakt mit seinen Fachkollegen.

Juli 2003 Perelman hat die beiden anderen ergänzenden Artikel auf dem Internet deponiert. Er unternimmt keinerlei Anstalten, seine Resultate in einer Fachzeitschrift zu publizieren.

Zwei Teams von Mathematikern nehmen es auf sich, die Details in Perelmans extrem knapper Darstellung auszuarbeiten und in Form eines Buches zu veröffentlichen: Perelman erhält ein langes Email von Gang Tian, einem Kollegen am M.I.T., der ihm mitteilt, dass gerade ein zweiwöchiges Seminar in Princeton stattgefunden habe, in dem es um Perelmans Beweis ging:

"Ich denke, dass wir jetzt den gesamten Artikel verstehen" schreibt Tian "Er ist in Ordnung."

Mai 2005 Ein Kommittee aus neun prominenten Mathematikern entsendet Sir John Ball nach St. Petersburg, um Perelman zur Annahme der Fieldsmedaille zu überreden. Vergeblich.

Dezember 2005 Perelman gibt seine Stelle am Steklov-Institut in St. Petersburg auf. Er lebt zusammen mit seiner Mutter in einem Appartment in Kupchino, einem Petersburger Vorort. Seine Lieblingsbeschäftigungen neben der Mathematik sind Opernbesuche und lange Spaziergänge.

Mai bis Juli 2006 Mehrere Gruppen von Mathematikern präsentieren längere Artikel, die Details in Perelmans Beweis erläutern:

- Bruce Kleiner und John Lott
- John Morgan und Gang Tian
- Cao, Huai-Dong; Xi-Ping Zhu

Keine der Gruppen findet ernsthafte Fehler oder Lücken, die nicht mit Perelmans Techniken geschlossen werden können.

20. Juni 06 Der in Havard und Peking lehrende Shing Tung Yau hält einen Vortrag vor mehreren hundert Physikern im Auditorium des Pekinger Freundschaftshotels. Er behauptet, dass die Ausarbeitung seiner chinesischen Kollegen Cao und Zhu einen eigenständigen und essentiellen Beitrag zum Beweis darstellt. Er geht so weit, Hamilton 50% des Beweises, seinen beiden chinesischen Kollegen 30% und Perelman ganze 25% zuzuschreiben[13].

22. August 2006 Der ICM verleiht Perelman die Fields-Medaille für seine Arbeiten, aber Perelman weigert sich, die Medaille anzunehmen. Zu der Million Dollar des *Clay Institutes* meint er: "Ich werde nicht entscheiden, ob ich den Preis akzeptieren werde, bevor er mir angeboten wird."

28. August 2006 Spätestens mit Erscheinen des Artikels *Manifold Destiny* im renommierten Magazin *The New Yorker* wird der Beweis wegen der von Yau in Gang gesetzten Querelen um die Prioritätenfrage zum Politikum.

22. Dezember 2006 Das *Science Magazine* verleiht Perelmans Beweis die Ehrung *wissenschaftlicher Durchbruch des Jahres*. Es ist das erste mal, dass diese Ehrung einem Ergebnis aus der Mathematik zuteil wird.

Ende Dezember 2006 Cao und Zhu entschuldigen sich in einem Erratum zu ihrem Artikel. Es sei ihrer Aufmerksamkeit entgangen, dass eines ihrer Hauptargumente tatsächlich aus einem Vorabdruck des Buches von Kleiner und Lott stamme.

Medienstar wider Willen

Es scheint paradox - und gehorcht doch der inneren Logik der Mediengesellschaft: Je mehr sich dieser bärtige Russe dem Zugriff der Medien zu entziehen versucht, desto stärker entfacht er ihr Interesse.

"Ich denke nicht, dass ich irgendetwas zu sagen hätte, das von geringstem öffentlichen Interesse wäre" diktiert er einer Reporterin des britischen *Sunday Telegraph* im August 2006 in den Block, kurz bevor er mitteilen lässt, dass er die höchste Ehrung

[13] Offenbar sind selbst Mathematiker in besonderen Momenten nicht gefeit gegen arithmetische Schnitzer.

der mathematischen Fachwelt, die Fieldsmedaille, ablehne - ohne Begründung[14]. Das ist der Stoff, aus dem moderne Mythen geboren werden.

Die Welt hat jetzt das Bild eines genialen Einsiedlers mit langem Bart und ungeschnittenen Fingernägeln[15]. Ein moderner Hieronymus, der es fertigbringt, einen langen russischen Winter mutterseelenallein in der Datscha eines Freundes zu verbringen. Wozu auch passt, was er über seinen Stammplatz hoch oben im 3. Rang des Mariinsky Theaters in St. Petersburg zu sagen hat: Natürlich könne er weder die Mimik der Opernsänger noch Details ihrer Kostüme erkennen. Aber die Akustik! Auf keinem Platz sei sie so gut wie auf seinem.

So berichtet Sylvia Nasar, der er schliesslich doch ein Interview für den *New Yorker* gewährte[16]. Er betont darin mehrmals, dass er sich aus der mathematischen Gemeinschaft zurückziehe und sich nicht länger als professioneller Mathematiker betrachte. Er sei bestürzt über die inzwischen unter Mathematikern vorherrschenden laxen ethischen Standards im Hinblick auf geistiges Eigentum. Auf die Frage, ob er den Artikel von Cao und Zhu gelesen habe, antwortet er: "Es scheint, als habe Zhu das Argument nicht ganz verstanden und es sich erarbeitet". Zu Yau meint er: "Ich kann nicht sagen, das ich wütend bin. Andere Leute machen Schlimmeres. Natürlich gibt es Mathematiker, die mehr oder weniger ehrlich sind. Aber fast alle sind Konformisten. Sie sind mehr oder weniger ehrlich, aber sie tolerieren die, die nicht ehrlich sind."

Durch die Aussicht auf eine Fields-Medaille sei er dazu gezwungen worden, vollständig mit seinem Stand zu brechen. "So lange ich nicht weiter auffällig war, hatte ich eine Wahl. Entweder etwas Hässliches zu machen[17], oder mich als Schosshündchen behandeln lassen. Jetzt, wo ich zu einer sehr auffälligen Person geworden bin, kann ich nicht länger ein Schosshündchen bleiben und nichts sagen. Darum musste ich gehen."

Mikhail Gromov ist ein russischer Geometer, der seit längerem an dem Forschungsinstitut IHES in Paris beheimatet ist und bei den Spezialisten seines Gebietes Kultstatus hat. Wie viele russische Mathematiker ist auch er berüchtigt für eine *äusserst* knappe Darstellung seiner Resultate. Er hat Verständnis für Perelmans Logik:

"Um wirklich grosse Arbeit zu leisten, muss man einen reinen Geist haben. Man darf nur an die Mathematik denken. Alles andere ist menschliche Schwäche. Preise zu akzeptieren heisst, Schwächen zu zeigen."

Andere mögen Perelmans Ablehnung der Fields-Medaille als arrogant bezeichnen, meint Gromov, aber seine Prinzipien seien bewundernswert. "Der ideale Wissenschaftler macht Wissenschaft und kümmert sich um nichts anderes." sagt er. "Er möchte sein Ideal leben. Nun, ich denke nicht, dass er wirklich in dieser idealen Welt lebt. Aber er versucht es."

Literaturempfehlungen

Es würde den Rahmen dieses Artikels eindeutig sprengen, wenn ich versuchen würde, einen Überblick über die mathematischen Hintergründe zu geben. Zudem gibt es dazu hervorragende und leicht zugängliche Artikel im Internet[18].

Poincaré-Vermutung: Die offizielle Beschreibung des Problems findet man auf der Website des *Clay Mathematics Institutes*, das auch das Preisgeld von einer Million Dollar ausgesetzt hat. Etwas ausführlicher ist der Artikel (4) desselben Autors.

Beweisidee: Sehr klar finde ich (1). Nach zwei Seiten kennt man Thurstons Geometrisierungsvermutung und versteht, wie sich daraus die Poincaré-Vermutung ergibt.

Zur Person Grigorij Perelman: Am verlässlichsten scheint mir der 17-seitige Artikel

[14] Schon 1996 hatte er einen Preis der Europäischen Mathematischen Gesellschaft ausgeschlagen.

[15] Laut Perelman habe das die Natur nicht vorgesehen.

[16] Nasar ist bekannt geworden durch ihre Biographie von John Nash, verfilmt als *A Beautiful Mind*. Sie schildert in ihrem (zusammen mit David Gruber verfasstem) Artikel (5) sehr amüsant, wie sie Perelman drei Tage lang diskret belagert hat - mit Botschaften und kleinen Gastgeschenken in seinem Briefkasten. Später stellte sich dann heraus, dass er seinen Briefkasten schon seit einer Woche nicht geleert hatte. Bei ihrem Treffen durfte sie Perelman zunächst auf einem vierstündigen Spaziergang durch St. Petersburg begleiten und anschliessend einem fünfstündigen Gesangswettbewerb im Petersburger Konservatorium lauschen, bevor er sich zu dem Interview bereit fand.

[17] i.e. sich öffentlich zur mangelnden Integrität innerhalb der Mathematikerzunft zu äussern

[18] Die zitierten Artikel aus den *Notices of the AMS* kann man sich als PDF herunterladen.

(5) zu sein[19]. Dort findet man mehr zu der auch wissenschaftssoziologisch interessanten Yau-Affaire.

Topologie: Wunderbar ist (6), lohnende Lektüre ist auch (3). Als ersten Einstieg in die verschiedensten Formalismen der algebraischen Topologie bis hin zum Riemann-Roch-Theorem über Riemannsche Flächen ist (2) zu empfehlen. Klassikerstatus (grundlegende Ideen aus der Sicht des Meisters) dürfte schon jetzt (7) zuzusprechen sein.

Literatur

[1] Michael T. Anderson. Geometrization of 3-manifolds via the Ricci Flow. *Notices of the AMS*, 51(2), February 2004.

[2] William Fulton. *Algebraic Topology. A First Course.* Springer-Verlag, New York, 1995.

[3] David Hilbert and Stephan Cohn-Vossen. *Anschauliche Geometrie.* Springer, 1996.

[4] John Milnor. Towards the Poincaré conjecture and the classification of 3-manifolds. *Notices of the AMS*, 50(10), November 2003.

[5] Sylvia Nasar and David Gruber. Manifold destiny. *The New Yorker*, (28), August 2006.

[6] Viktor V. Prasolov. *Intuitive Topology.* American Mathematical Society, 1995.

[7] William P. Thurston. *Three-dimensional Geometry and Topology.* Princeton University Press, 1997.

[19] Der Artikel hat es sogar zu einem eigenen Eintrag in *Wikipedia* gebracht.