

$$2007=1+3+8+21+377+1597$$

Bernhard Ruh, Kantonsschule Solothurn

Einleitung

Manchmal ist es unvermeidlich, einem Schüler - aus welchen Gründen auch immer - eine zusätzliche Aufgabe aufzuerlegen. Wenn man diesem Schüler nicht einfach ein Algebrabuch in die Hand drückt, erweisen sich solche Zusatzaufgaben nicht selten als Bumerang, da mathematische Probleme ausserhalb des Schulstoffes auch für die Lehrperson ihre Tücken haben können. Etwas naiv drückte ich meinem Schüler ein Buch mit Aufgaben von früheren Mathematikolympiaden in die Hand, welches zu seinem (und meinem!) Glück neben den Aufgaben auch ein paar Lösungshinweise enthielt. Der Auftrag lautete, in einem Vortrag eine frei gewählte Aufgabe und ihre Lösung vorzustellen. Besagter Schüler (er zählte zu der Sorte der eher Faulen aber Intelligenten) wählte eine Aufgabe, deren Lösung er bis zur zweitletzten Zeile verstand. Die letzte Zeile lautete: "Mit dem Satz von Zeckendorf folgt die Behauptung". Natürlich wollte er von mir wissen, wie der Satz von Zeckendorf lautet. Auf solche Fragen kann man auf zwei Arten reagieren: Entweder man murmelt etwas von Zeitmangel und verschiebt die Sache auf übermorgen oder man ergibt sich dem Schicksal und gesteht, den Satz nicht zu kennen. In meinem Fall rang dies dem Schüler ein müdes und auch etwas mitleidiges Lächeln ab.

Um Ihnen diese Situation zu ersparen, sei hier der Satz von Zeckendorf vorgestellt.

Darstellung durch Fibonacci-Zahlen

Wir wollen eine Zahlenfolge von verschiedenen natürlichen Zahlen *vollständig* nennen, wenn jede natürliche Zahl als Summe von verschiedenen Folgigliedern dargestellt werden kann. Die bekannteste vollständige Zahlenfolge ist die Folge der Zweierpotenzen $1, 2, 4, 8, \dots$. In diesem Fall ist die Darstellung sogar eindeutig (Binärdarstellung). Weniger bekannt ist die Tatsache, dass auch die Primzahlen, um die Zahl 1 erweitert, vollständig sind (Postulat von Bertrand [1]). Die Darstellung ist natürlich nicht eindeutig: $6 = 5 + 1 = 3 + 2 + 1$, $2007 = 2003 + 3 + 1 = 1999 + 7 + 1$ etc.

Wie sieht es nun bezüglich Vollständigkeit mit der Fibonaccifolge $(f_i) = 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$ aus? (Die zweite 1 am Anfang der Originalfolge macht in unserem Zusammenhang keinen Sinn.)

Schreibt man sich einige Darstellungen auf,

n	Darstellungen			Anzahl
1	1			1
2	2			1
3	3	2+1		2
4	3+1			1
5	5	3+2		2
6	5+1	3+2+1		2
7	5+2			1
8	8	5+3	5+2+1	3

so merkt man schnell:

Satz 1 Die Folge der Fibonaccizahlen, definiert durch

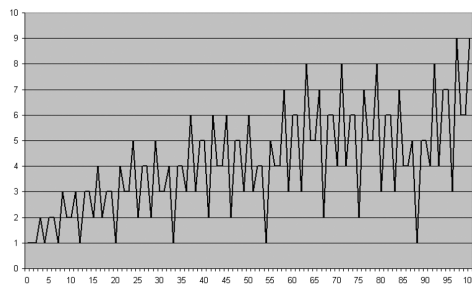
$$f_1 = 1, f_2 = 2, f_{n+2} = f_{n+1} + f_n,$$

ist vollständig.

Der Beweis erfolgt rekursiv nach dem Motto: Für jede natürliche Zahl $f_k \leq n < f_{k+1}$ ist $n - f_k < f_{k+1} - f_k = f_{k-1}$.

Bemerkungen

- Der "Maximalalgorithmus" (ziehe immer die grösstmögliche Fibonaccizahl ab) liefert immer eine Darstellung ("Maximaldarstellung").
- Bei den Zahlen 1,2,4,7,... ist die Darstellung eindeutig.
- Die Anzahl der Darstellungen von Fibonaccizahlen hat das Muster 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, ...
- Auch die Folge 1, 3, 8, 16, 24, ... ist interessant. (Kleinste Zahl, die 1, 2, 3, ... Darstellungen besitzt).
- Der Graph (n , AnzahlDarstellungen) macht einen selbstähnlichen Eindruck.



- Die Zahl 2007 hat 6 Darstellungen ($[3]$), z.B. $2007 = 1 + 3 + 8 + 21 + 377 + 1597 = 1 + 3 + 8 + 21 + 144 + 233 + 1597$.

Das Fibonaccimalsystem

Auf Grund der Vollständigkeit lassen sich die Zahlen der Fibonaccifolge (... , 13, 8, 5, 3, 2, 1) als Basis eines Zahlensystems mit den Ziffern 0 und 1 interpretieren. Man schreibt z.B.

$$11 = 1 \cdot 8 + 0 \cdot 5 + 1 \cdot 3 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 1 = 10100_{\text{fib}}.$$

Diese Darstellung ist aber leider nicht eindeutig: $10100_{\text{fib}} = 1111_{\text{fib}}$

Eindeutig ist hingegen die oben erwähnte Maximaldarstellung:

n	Max.Darst.
1	1
2	10
3	100
4	101
5	1000
6	1001

n	Max.Darst.
7	1010
8	10000
9	10001
10	10010
11	10100
12	10101

$2007 = 11001000001010101_{\text{fib}}$

Edouard Zeckendorf (1901-1983), ein belgischer Arzt(!), bemerkte in diesen Darstellungen eine Gemeinsamkeit: Es folgen nie zwei 1 aufeinander, was seinen Satz entstehen liess [2]:

Satz 2 (von Zeckendorf) *Jede natürliche Zahl lässt sich eindeutig als Summe von nicht aufeinanderfolgenden Fibonaccizahlen schreiben.*

Beweis: Die Existenz wird durch den Maximalalgorithmus garantiert. Die Eindeutigkeit folgt etwa so: Ist $f_k \leq n < f_{k+1}$, so muss f_k in der Darstellung von n auftreten, da ansonsten die grösstmögliche darstellbare Zahl gleich

$$n' = f_{k-1} + f_{k-3} + \dots$$

wäre. Nun gelten aber die bekannten Gleichungen

$$\sum_{i=1}^n f_{2i} = f_{2n+1} - 1, \quad \sum_{i=1}^n f_{2i-1} = f_{2n} - 1$$

und somit $n' < f_k$.

Anwendungen

Das Fibonacci Nim-Spiel

Von einem Haufen mit n Münzen darf jeder Spieler eine Anzahl Münzen entfernen, beim ersten Zug nicht alle und bei jedem weiteren Zug höchstens doppelt so viele wie der Gegner. Wer die letzte Münze nehmen kann, hat gewonnen. Man sieht sofort, dass der Spieler, der bei 1, 2, 3, 5, 8 Münzen ziehen muss und nicht alle Münzen wegnehmen darf, verloren hat. Man kann durch Induktion sehr einfach zeigen, dass alle Fibonaccizahlen verlieren. Die Strategie wird in der "Fibonaccimalschreibweise" klar: Entferne von rechts her möglichst oft die Zahl 1 (ohne dass der Gegner das Spiel beenden kann). Es ist also das Ziel, eine Fibonaccizahl oder zumindest eine möglichst einfache Summe von Fibonaccizahlen zu erhalten.

Beispiel ($n=32$):

n	fib	Bemerkung
32	1010100	10100 ist zu gross, also entferne ich 100=3
29	1010000	Der Gegner darf nicht 10000=8 wegnehmen, er nimmt z.B. 100=3
26	1001000	Ich nehme 1000
21	1000000	... und gewinne

Zum Schluss sei noch die Aufgabe aus der Mathematikolympiade vorgestellt. Ambitionierte Leserinnen und Leser versuchen natürlich, die Aufgabe selbständig zu lösen.

Eine IMO Aufgabe

Problem: Ist es möglich, die natürlichen Zahlen als disjunkte Vereinigung von Lucas-Folgen (Folgen mit $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$, beliebige Startwerte) zu schreiben?

Erster Versuch:

$$f^{(1)} : 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots \quad f^{(2)} : 4, 6, 10, 16, 26, 42, \dots \quad f^{(3)} : 7, 9, 16, \dots$$

Es wird schnell klar, dass es mit endlich vielen Folgen nicht geht, da die Lücken mit der Zeit zu gross werden. Der obige Versuch mit unendlich vielen Folgen funktioniert nicht, da die Folgen nicht disjunkt sind ($16 \in f^{(2)} \cap f^{(3)}$).

Zweiter Versuch:

Es sei (a_i) die Folge der Zahlen, deren Fibonaccimardarstellung mit einer 1 endet, also $a_1 = 1_{fib} = 1, a_2 = 101_{fib} = 4, a_3 = 1001_{fib} = 6$ etc. Das k -te Glied der Folge $f^{(i)}$ hat die Fibonaccimardarstellung von a_i gefolgt von $k - 1$ Nullen:

	Fibonaccimal	Dezimal
$f^{(1)}$	1, 10, 100, 1000, ...	1, 2, 3, 5, ...
$f^{(2)}$	101, 1010, 10100, 101000, ...	4, 7, 11, 18, ...
$f^{(3)}$	1001, 10010, 100100, 1001000, ...	6, 10, 16, 26, ...

Die so konstruierte Folge von Lucas-Folgen(Begründung!) erfüllt die verlangten Bedingungen!

Literatur

- [1] www.matha.rwth-aachen.de/lehre/SS01/ana3proseminar/bertrand.ps
- [2] E. Zeckendorf. *Représentation des nombres naturels par une somme de nombres de Fibonacci ou de nombres de Lucas*, Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 41, 179-182, 1972.
- [3] www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fibrep.html