Gibelotte façon Fibonacci

Alain Stucki, Lycée cantonal de Porrentruy

Introduction

Le très médiatique *Da Vinci Code* de Dan Brown a fait connaître la suite de Fibonacci à des centaines de millions de personnes. La soudaine popularité de cette suite définie communément par récurrence et qui traduit l'augmentation de la taille d'une population de lapins m'a incité à réviser le sujet pour pouvoir y faire référence dans un cours. J'ai finalement trouvé l'occasion de présenter une manière d'établir l'expression du terme général de la suite par le biais de l'algèbre linéaire.

Une de mes classes a ainsi pu goûter un ragoût de lapin assaisonné au nombre d'or sur son lit de diagonalisation.

Je vous livre la recette de la gibelotte façon Fibonacci que j'ai cuisinée avec mes élèves.

Recherche du terme général d'une suite récurrente linéaire

Une *suite récurrente linéaire d'ordre p* est une suite du type

$$u_0, u_1, \dots, u_{p-1},\ u_{n+p} = a_0 u_n + a_1 u_{n+1} + \cdots + a_{p-1} u_{n+p-1},\ n \geq 0.$$

Par exemple, la suite de Fibonacci qui est définie par $u_0 = 1, u_1 = 1$, $u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$, est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 où $a_0 = 1$ et $a_1 = 1$.

Intéressons-nous tout d'abord à une suite récurrente d'ordre $p = 1$

$$u_0,\ u_{n+1} = a u_n,\ n \geq 0 \text{ en posant } a = a_0.$$

Nous reconnaissons une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison a. Le terme général

$$u_n = a^n u_0$$

fournit le $(n+1)^{\text{e}}$ terme de la suite puisque l'énumération commence à u_0.

Passons à une suite d'ordre p. En posant

$$U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{p-2} \\ u_{p-1} \end{pmatrix}, U_k = \begin{pmatrix} u_k \\ u_{k+1} \\ \vdots \\ u_{k+p-2} \\ u_{k+p-1} \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{p-1} \end{pmatrix},$$

on obtient une nouvelle suite récurrente $U_0, U_{n+1} = \mathbf{A}U_n$. Observons

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ \vdots \\ u_{n+p-1} \\ u_{n+p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{p-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ \vdots \\ u_{n+p-2} \\ u_{n+p-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ \vdots \\ u_{n+p-1} \\ \sum_{k=0}^{p-1} a_k u_{n+k} \end{pmatrix}.$$

Le terme général de cette suite est donné par $U_n = \mathbf{A}^n\, U_0$, comme dans le cas d'ordre $p = 1$, et nous pouvons en déduire le terme général de la suite initiale (u_n) en considérant n'importe quelle composante du vecteur U_n. Le problème se ramène finalement au calcul de $\mathbf{A}^n$, ce qui peut s'avérer très difficile (d'autres méthodes sont alors utilisées). Dans notre exemple, c'est justement ce calcul qui est intéressant.

Application à la suite de Fibonacci

Revenons à nos lapins. La matrice $\mathbf{A}$ associée à la suite de Fibonacci $u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$ est

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est diagonalisable. Or, élever une matrice diagonale à la puissance n revient à élever les coefficients de la diagonale à la puissance n, ce qui est particulièrement aisé. Nous allons donc déterminer l'expression de $\mathbf{A}^n$ dans une base de vecteurs propres. Un dernier changement de base terminera le problème.

Soit le polynôme caractéristique de la matrice $\mathbf{A}$

$$p(x) = det(\mathbf{A} - x\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -x & 1 \\ 1 & 1-x \end{vmatrix} = -x(1-x) - 1 = x^2 - x - 1.$$

Les valeurs propres λ_i sont les solutions de l'équation $p(x) = 0$. On obtient

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi \text{ (le nombre d'or) et } \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1 - \varphi.$$

Les espaces propres E_{λ_i} s'obtiennent en résolvant le système homogène

$$\begin{pmatrix} -\lambda_i & 1 \\ 1 & 1-\lambda_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -\lambda_i x + y & = 0 \\ x + y(1-\lambda_i) & = 0 \end{cases}$$

Le déterminant principal de ce système est $\lambda_i^2 - \lambda_i - 1$ et vaut 0 car λ_i est solution de l'équation caractéristique $x^2 - x - 1 = 0$; le système est indéterminé. En choisissant $x = 1$, il suit que $y = \lambda_i$, et il en résulte une base (v_1, v_2) de vecteurs propres où

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} \text{ et } v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Notons $\mathbf{A}'$ la matrice $\mathbf{A}$ exprimée dans la base (v_1, v_2) et $\mathbf{P}$ la matrice de passage de la base canonique à la base (v_1, v_2). On obtient facilement

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, (\mathbf{A}')^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -\lambda_2 & 1 \\ \lambda_1 & -1 \end{pmatrix}.$$

La matrice $\mathbf{A}^n$ est ensuite obtenue par le changement de base $\mathbf{A}^n = \mathbf{P}(\mathbf{A}')^n \mathbf{P}^{-1}$

$$\mathbf{A}^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -\lambda_2 & 1 \\ \lambda_1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \lambda_1^{n-1} - \lambda_2^{n-1} & \lambda_1^n - \lambda_2^n \\ \lambda_1^n - \lambda_2^n & \lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1} \end{pmatrix}$$

en remarquant que $\lambda_1 \lambda_2 = -1$.

Le terme général de (U_n) est

$$U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \lambda_1^{n-1} - \lambda_2^{n-1} & \lambda_1^n - \lambda_2^n \\ \lambda_1^n - \lambda_2^n & \lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

duquel nous tirons le terme général de (u_n)

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\lambda_1^{n-1} - \lambda_2^{n-1} + \lambda_1^n - \lambda_2^n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\big(\lambda_1^{n-1}(1+\lambda_1) - \lambda_2^{n-1}(1+\lambda_2)\big) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1})$$

en remarquant cette fois que $1 + \lambda_i = \lambda_i^2$, puisque ce sont les solutions de l'équation caractéristique $x^2 - x - 1 = 0$.

Souvenons-nous que u_n représente le $(n+1)^{\text{e}}$ terme de la suite. Finalement, si $(t_n)_{n \geq 1}$ représente la suite de Fibonacci, le n^{e} terme est donné par la formule suivante, dite de Binet

$$t_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \big(\varphi^n - (1-\varphi)^n \big).$$

Remarques :

1) On vérifie facilement que la contribution du terme $-\frac{1}{\sqrt{5}}(1-\varphi)^n$, dont le signe alterne, est négligeable. Ainsi, le n^{e} terme de la suite peut être défini par

$$t_n \text{ est l'entier le plus proche de } \frac{1}{\sqrt{5}}\varphi^n.$$

2) Le résultat

$$\lim_{n \to \infty} \frac{t_{n+1}}{t_n} = \varphi$$

se calcule facilement à l'aide de la formule de Binet.